Matematik A - Htx
Undervisningsvejledning
August 2008

Vejledningen indeholder uddybende og forklarende kommentarer til læreplanens enkelte punkter samt en række paradigmatiske eksempler på undervisningsforløb. Vejledningen er et af ministeriets bidrag til faglig og pædagogisk fornyelse. Det er derfor hensigten, at den ændres forholdsvis hyppigt i takt med den faglige og den pædagogiske udvikling.
Citater fra læreplanen er anført i kursiv.

Forord

Det er primært vejledningernes opgave at give konkrete forslag om, hvilket fagligt indhold og hvilke tilrettelæggelsesformer, der er egnet til at opfylde de kompetencemål, som er formuleret i læreplanen. Der er ikke tale om juridisk normative skrifter, men derimod om forslag til, hvorledes de normative bestemmelser i love og bekendtgørelser kan opfyldes.

Denne vejledning skal ses i sammenhæng med følgende bekendtgørelser:

- Bekendtgørelse nr. 743 af 20. juni 2008 om uddannelsen til højere teknisk eksamen (htx-bekendtgørelsen), herunder læreplanen for Matematik A (bilag nr. 20).
- Bekendtgørelse nr. 754 af 25. juni 2007 om prøver og eksamen i folkeskolen og i de almene og studieforberedende ungdoms- og voksenuddannelser.
- Bekendtgørelse nr. 262 af 20. marts 2007 om karakterskala og anden bedømmelse.

I forhold til 2007-udgaven af denne vejledning er der ændringer i afsnit 4.2 Prøveformer, så dette svarer til gældende bekendtgørelse.

Indholdsfortegnelse

Matematik A-kompetencen kan opnås ved at følge studieretningsfaget matematik A eller ved at vælge matematik A som valgfag. Matematik på A-niveau har i alt 410 timer, og heraf skal mindst 40 timer indgå i grundforløbet. Det anbefales, at timetallet fordeles jævnt på alle 6 semestre med et gennemsnitligt ugentligt timetal på 3-4 timer.

1 Identitet og formål

1.1 Identitet

Faget matematik består af både fagligt teoretiske områder, faglige og tværfaglige anvendelsesområder.

Faget har stor betydning i et demokratisk samfund, hvor kendskab til matematiske metoder er en forudsætning for forståelsen af og deltagelsen i politiske beslutningsprocesser. Fagets praktiske dimension har stor vægt og består i, at man ved hjælp af matematiske teorier og modeller beskriver, analyserer og vurderer såvel tekniske, naturvidenskabelige og samfundsmæssige emner og relationer.

Matematikken bygger på folkeskolens matematik og skal bl.a. indgå i samspil med andre fag og som et redskab ved løsning af problemstillinger inden for de øvrige naturvidenskabelige fag. Endvidere skal der i undervisningen arbejdes med fagets teoretiske og ræsonnerende sider. Som selvstændigt fag har matematikken desuden en kulturbærende rolle. De metoder, der anvendes i forbindelse med matematikundervisningen, er centrale i forbindelse med al udvikling og efterprøvning af teknisk og teknologisk viden og anvendelse af prognoser til beslutninger og styring. Eleven lærer at give en vurdering af matematikkens anvendelse i dagligdagen
I matematik anvendes it-værktøjer som naturlige hjælpemidler. Eleven anvender matematiske begreber, metoder og informationsteknologiske hjælpemidler i forbindelse med formulering, analyse og løsning af teoretiske og praktiske problemer.

1.2 Formål

Med udgangspunkt i matematiske og praktiske problemstillinger opnår eleven kompetencer, der giver den enkelte både en formel og en reel studiekompetence på højeste gymnasiale niveau.

Faget medvirker til at udvikle elevens personlige kompetencer så som analytisk sans, logisk tænkning og præcist sprogbrug.

Arbejdet med matematisk stof leder frem til, at eleven opnår matematiske kompetencer, der sætter den enkelte i stand til at forstå, analysere, vurdere og træffe beslutninger i komplekse systemer i såvel samfunds- og erhvervs- som studiemæssige sammenhænge.

I htx-læreplanen er fagets formål i uddannelsen beskrevet som både fagligt dannende og alment dannende. Faget har derved til formål at medvirke til elevens udvikling af både faglige, almene og personlige kompetencer. Undervisningen i faget skal medvirke til at udvikle elevens faglige nysgerrighed og mod til at gå i gang med anvendelse af faget ved modellering af autentiske problemstillinger og styrke refleksionen over egen læring. Desuden er det vigtigt, at elevens forståelse af, at matematik optræder som et redskab overalt i dagligdagen og i medierne, øges.

2 Faglige mål og fagligt indhold

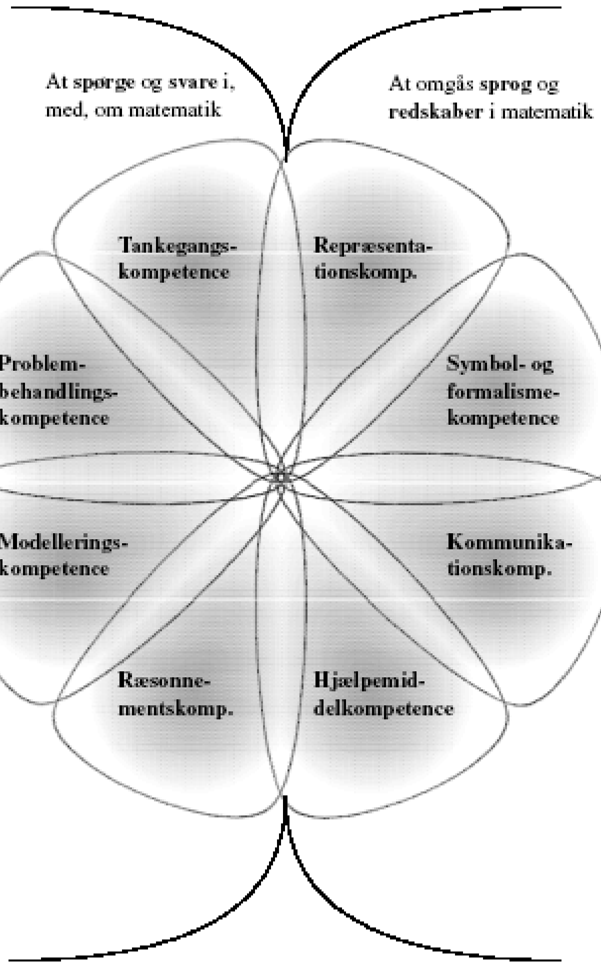
2.1 Faglige mål

Eleven skal:

- *kunne opstille formler og funktionsudtryk ud fra en ikke-matematisk beskrivelse af problemer med variabelsammenhænge samt løse disse matematiske problemer og fortolke resultaterne*
- *kunne opstille, løse og tolke geometriske problemer ved hjælp af såvel klassisk som analytisk geometri*
- *kunne anvende vektorer i plan og rum til løsning af problemer inden for matematik og de tekniske og naturvidenskabelige fag*
- *kunne beregne, fortolke og anvende udtryk for såvel den afledede funktion som stamfunktioner, herunder forskellige fortolkninger af bestemt og ubestemt integral*
- *være i stand til at undersøge og fortolke forløbet af vektorfunktioner i én variabel, bl.a. som en bevægelse i planen*
- *opnå fortrolighed med matematisk tankegang og ræsonnement*
- *kunne veksle mellem et matematisk begrebs forskellige repræsentationer*
- *kunne analysere konkrete teoretiske og praktiske problemstillinger primært inden for teknik og naturvidenskab, opstille en matematisk model for problemet, løse det matematiske problem, dokumentere samt tolke løsningen praktisk, herunder gøre rede for modellens evt. begrænsninger og dens validitet*
- *kunne anvende CAS-værktøjer og matematikprogrammer til såvel beregninger som dokumentation*
- *kunne formulere sig i og skifte mellem det matematiske symbolsprog og det daglige skrevne eller talte sprog.*

Det er slutmålene for de tre års undervisning i faget, der er angivet. Disse mål er formuleret med udgangspunkt i de faglige kompetencer, eleven skal besidde efter den samlede undervisning i matematik A. Alle målene skal nås, og rækkefølgen er ikke udtryk for en prioritering af målene. Det kan være en idé at opdele de endelige mål i nogle delmål, der gradvis opfyldes. Hvorvidt eleven har opfyldt fagets slutmål, undersøges ved de afsluttende prøver. Her bedømmes eleven i forhold til bedømmelseskriterierne, som kan betragtes som en operationalisering af fagets mål i forhold til evalueringen.

De matematiske kernekompetencer.
Fagets mål er beskrevet vha. kompetencer. I publikationen Kompetencer og Matematiklæring af Mogens Niss m.fl. findes en nøje beskrivelse af de 8 matematiske kernekompetencer. Nedenfor er disse kort skitseret:



Kilde: KOM-rapporten

Tankegangskompetence
Denne kompetence består i
- at være bevidst om, hvilke slags spørgsmål, der er karakteristiske for matematik og selv at kunne stille sådanne spørgsmål
- at have blik for hvilke typer af svar, som kan forventes.

Eksempel: Er det sandt, at man blandt rektanglerne med en bestemt omkreds kan opnå vilkårligt store arealer?

Problembehandlingskompetence
Denne kompetence består i
- at kunne opstille (opdage, formulere, afgrænse og præcisere) forskellige problemer, rene matematiske problemer såvel som problemstillinger fra matematik i anvendelse, åbne såvel som lukkede
- at kunne løse sådanne færdigformulerede matematiske problemer - egne såvel som andres (måske på forskellig måde).

Eksempel: Kan man få en trekant ud af tre vilkårlige sidelængder?

Modelleringskompetence
Denne kompetence består i
- at kunne analysere grundlaget for og egenskaberne ved foreliggende modeller
- at kunne bedømme deres rækkevidde og holdbarhed
- at kunne (af)matematisere
- at kunne udføre aktiv modelbygning og
- at bringe matematik i spil til behandling af anliggender udenfor matematikken selv.

Eksempel: Beskriv tilgængelige data for befolkning i perioden 1900 - 2000 ved hjælp af en vækstmodel.
Eksempel: En undersøgelse af, hvordan grundplanen for et hus kan se ud, hvis dets areal skal være 120 m^2

Ræsonnementskompetence
Denne kompetence består i
- at kunne følge og bedømme en kæde af matematiske argumenter fremsat af andre
- at kunne forstå, hvad et matematisk bevis er - skelne mellem hovedpunkter og detaljer.

Eksempel: Når man kvadrerer et tal, bliver resultatet altid større. Det gælder jo for alle de uendeligt mange hele tal, og så må det også gælde for alle andre tal.

Repræsentationskompetence
Denne kompetence består i:
- at kunne forstå og betjene sig af forskellige slags repræsentationer af matematiske objekter, fænomener, problemer eller situationer (symbolske, algebraiske, visuelle, geometriske, grafiske, diagrammer, tabelmæssige)
- at kunne forstå de indbyrdes forbindelser.

Eksempel: Sammenhængen mellem tidsangivelser på ure med visere og digitale ure.
Eksempel: Sammenhængen mellem en vektors koordinater og vektorens længde og retning.

Symbol- og formaliseringskompetence
Denne kompetence består i
- at kunne afkode symbol- og formelsprog
- at kunne oversætte frem og tilbage mellem symbolholdigt matematisk sprog og naturligt sprog
- at kunne behandle og betjene sig af symbolholdige udsagn og udtryk - herunder formler.

Eksempel: konkludere, for hvilke talsæt ligningen $x(y + z) = xy + z$ er opfyldt.

Kommunikationskompetence
Denne kompetence består i
- at kunne sætte sig ind i og fortolke andres matematikholdige udsagn og "tekster"
- at kunne udtrykke sig på forskellige måder og på forskellige niveauer af teoretisk eller teknisk præcision om matematikholdige anliggender
- at kunne udtrykke sig skriftligt, mundtligt eller visuelt over for forskellige kategorier af modtagere.

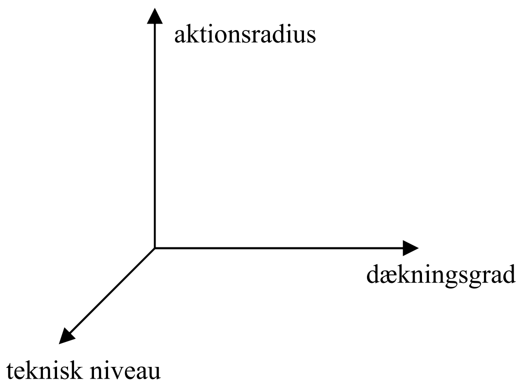
Hjælpemiddelkompetence
Denne kompetence består i

- at have kendskab til eksistensen og egenskaberne ved diverse former for relevante redskaber til brug for matematisk virksomhed
- at have indblik i redskabers muligheder og begrænsninger i forskellige situationer
- at være i stand til at betjene sig af hjælpemidlerne.

Eksempel: Konkrete materialer af forskellig art til begrebsdannelse og undersøgelse af sammenhænge. Lommeregner, computer, software som regneark, geometriprogrammer.

I planlægning og udførelse af undervisningen er det vigtigt at fokusere på kompetencerne. Eleverne opnår matematikkompetencer gennem arbejdet med kernestof og supplerende materiale. Det kan anbefales at man i begyndelsen fokuserer på en enkelt eller få kompetencer af gangen og gradvist øger antallet. Man kan med fordel delagtiggøre eleverne i kompetencebeskrivelsen og diskutere hvilke kompetencer, der skal fokuseres på inden for et givet forløb.
For at øge bevidstheden om kompetencebeskrivelsen kan man f.eks. oprette en studiekreds blandt fagkollegerne, hvor begreberne diskuteres og afklares og man kan kompetencebeskrive projektoplæg, opgaver og undervisningsforløb for at afdække i hvilket omfang, de alle kommer i spil.

Ved evaluering af elevens besiddelse af kompetencer, kan nedenstående 3-dimensionale beskrivelse benyttes:



Dækningsgraden fortæller i hvor høj grad de aspekter, som karakteriserer kompetencen, er dækket hos eleven, dvs. hvor mange af disse aspekter, han eller hun kan aktivere i forskellige situationer, og med hvor høj grad af selvstændighed aktiveringen kan ske.
Aktionsradius udgør det spektrum af sammenhænge og situationer eleven kan aktivere kompetencen i.
Det *tekniske niveau* bestemmes af, hvor begrebsligt og teknisk avancerede områder og værktøjer eleven kan aktivere den pågældende kompetence overfor.

2.2 Kernestof

Nedenstående rækkefølge af kernestoffet er ikke et udtryk for en anbefalet rækkefølge. Det er helt op til den enkelte underviser at vælge en rækkefølge, der giver mulighed for størst mulig sammenhæng med elevens øvrige fag.

Kernestoffet er:

– *regningsarternes hierarki, reduktion, ligningsløsning, både analytisk og grafisk, regler for regning med potenser, rødder og numerisk værdi.*

Denne del af kernestoffet er ikke tænkt som et afgrænset forløb, hvor eleverne udelukkende træner opgaver i "at regne". Derimod er det medtaget for at fastholde fokus på nævnte emner, der er en vigtig forudsætning for at kunne opnå mange af de matematiske kernekompetencer. Eksempler er manipulation med tal og bogstaver i bevisførelse, forståelse for grundmængdens størrelse ved modellering osv.

Der indgår brugen af parentesreglerne og udregning af flerleddede udtryk svarende til kvadratet på en toleddet størrelse og to tals sum gange to tals differens. Potensregneregler både med rationel og hel eksponent. Ligeledes indgår de grundlæggende regler for løsning af ligninger og uligheder, herunder bestemmelse af grundmængde og løsningsmængde og korrekt brug af matematisk notation. Begrebet numerisk værdi introduceres, og eleven løser ligninger, hvor numeriske størrelser og rodtegn indgår.

Man må vurdere, hvilke eksempler og beviser, der bedst kan bibringe eleven de ønskede kompetencer. Således er der intet krav om at man følger en bestemt lærebog slavisk og medtager alle beviser.

Det kan det anbefales, at den almindelige algebra og løsning af ligninger og uligheder integreres i arbejdet med funktioner.

– *Enhedscirkel med vinkelmål i radianer og grader, definition af cosinus, sinus og tangens.*
– *Grundlæggende klassisk geometri og trigonometri, herunder trekantsberegninger i retvinklede og vilkårlige trekanter; beregning af overfladeareal og volumen af rumlige figurer (prisme, cylinder, kegle, keglestub, pyramide, pyramidestub, kugle, kugleudsnit og kugleafsnit).*

Omregning mellem vinkel- og radianmål. Cosinus og sinus kan introduceres ud fra ligedannede trekanter eller ud fra koordinaterne til punkter på enhedscirklen. Tangens introduceres både som kvotienten mellem sinus og cosinus og ud fra tangenten til enhedscirklen i (1, 0). Begreberne tydeliggøres ved arbejdet med trekantberegninger. Trigonometriske grundligninger og simple trigonometriske formler indgår i undervisningen, og der lægges vægt på nødvendigheden af kontroltegninger.
Grundlæggende begreber som punkt, linje og vinkel (også vinkler ved cirkler). Linjer, cirkler og punkter i forbindelse med trekanten indgår i undervisningen.
Man arbejder med regulære polygoner, herunder eftervisning af vinkelsum i regulære polygoner. Ved udledning af formlerne for overfladeareal og rumfang af de nævnte figurer, kan eleverne inddrages i et induktivt forløb, hvor de med støtte, selv kan udlede mange af formlerne. F.eks. kan eleven lave udfoldninger af cylinder, kegle og keglestub og derigennem bestemme udtryk for overfladearealerne. I arbejdet med integralregning kan emnet tages op igen, og flere af areal- og volumenformlerne udledes.

– *Analytisk beskrivelse af geometriske figurer i et koordinatsystem og anvendelse af analytiske beregningsmetoder.*

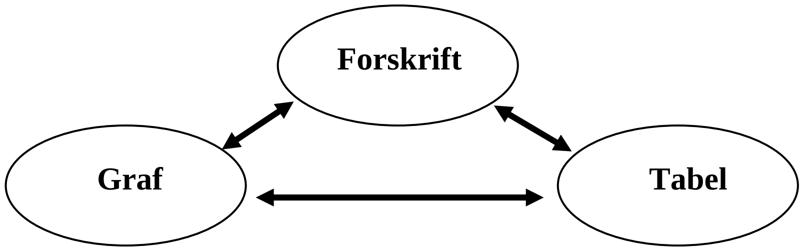
Undervisningen giver eleven kendskab til cirklen, parablen og hyperblen som geometriske steder. Analytisk beskrivelse af geometriske figurer i planen omfatter cirklens, parablens, hyperblens og linjens ligning. Som introduktion kan cirkler, parabler og hyperbler beskrives ved keglesnit.

– *Vektorregning i plan og rum, herunder vektorkoordinater, skalarprodukt, krydsprodukt, projektion af vektor på vektor, opløsning i komposanter, linjer, planer, afstande, vinkler, kugler, tangentplaner.*

Der arbejdes med grundlæggende begreber fra vektorregningen, herunder ligevægt, trekantens areal, ligninger og parameterfremstillinger. Bestemmelse af afstande, vinkler og skæringer mellem punkter, linjer og planer behandles i undervisningen.

– *Funktionsbegrebet, egenskaber ved funktioner af følgende typer: polynomier, eksponential- og logaritmefunktioner, potensfunktioner og trigonometriske funktioner, beskrivelse af en graf, bestemmelse af en forskrift, herunder benyttelse af regression, ligningsløsning og anvendelse af funktioner ved opstilling af modeller og løsning af tekniske eller naturvidenskabelige problemstillinger*

Med fokus på modelleringskompetencen kan man arbejde med opstilling af sammenhænge ud fra givne data f.eks. målepunkter og/eller hældninger. Disse sammenhænge kan beskrives ved grafer eller forskrifter. En del af undervisningen er bestemmelse af funktioners forskrifter ved opstilling og løsning af ligningssystemer eller ved regression. Her kan styrker og svagheder ved regressionskoefficienten diskuteres. Ved påvisning af eksponentiel- eller potenssammenhæng arbejdes med afbildning af funktioner i logaritmiske koordinatsystemer eller med transformation af data, så et almindeligt koordinatsystem kan benyttes. Dette er en mulighed for at tale om repræsentationer:



– *Beskrivelse af vektorfunktioner i planen, herunder definition af en vektorfunktion, tangentvektor, hastigheds- og accelerationsvektor, fart, anvendelse af vektorfunktioner i forbindelse med tekniske eller naturvidenskabelige problemstillinger*

Eleven skal opnå viden og forståelse af forskellige elementer i arbejdet med vektorfunktioner som f.eks. at kunne bestemme:
– skæringspunkter med x- og y-aksen
– punkter, hvor der er vandret eller lodret tangent
– koordinaterne til en tangentvektor og dens længde
– koordinaterne til x og y ud fra en given eller beregnet parameter
– skæringspunkter mellem kurver for vektorfunktioner.

Fra fysikken kan inddrages eksempler med bevægelser, som kan beskrives som vektorfunktioner. Som uddybning af emnet kan man som supplerende materiale vælge at arbejde videre med parameterkurver i rummet.

- *Grænseværdibegrebet, definition og tolkning af differentialkvotient generelt og specielt for ovennævnte funktioner samt regneregler for differentiation af sum, differens, produkt og kvotient af to funktioner, sammensætning af to funktioner samt omvendt funktion*
- *Monotoniforhold, lokale ekstrema og optimering og disses sammenhæng med differentialkvotienten*

Funktionstyperne omfatter de funktioner, der er nævnt under afsnittet om funktioner.
Vigtige begreber er bl.a. kontinuitet og differentiabilitet. Under kvotient af to funktioner er det relevant at inddrage asymptotebegrebet.
Med udgangspunkt i praktiske problemstillinger anvendes differentialkvotienten til at finde maksimums- og/eller minimumsværdier.

- *Integration (bestemt og ubestemt) af ovennævnte funktioner, herunder areal- og volumenberegning ved integration; regler for integration af sum og differens af to funktioner samt for funktion multipliceret med konstant*

Definition af integral ved indførelse af summer, arealfunktion og stamfunktion. I arbejdet med summer, kan CAS værktøjet bruges til visualisering og gentagne beregninger, så eleven får fornemmelsen af hvordan f.eks. en undersum nærmer sig arealet under kurven, når inddelingen bliver "fin nok".
Der kan arbejdes med brugen af og teorien bag partiel integration og integration ved substitution.
Volumenberegning omfatter rumfang af omdrejningslegemer både med hensyn til x- og y-aksen.

- *anvendelse af it og matematikprogrammer på pc eller lommeregner til såvel symbolsk som talmæssig matematikbehandling, simulering og fortolkning af resultater, benyttelse af it-værktøjer til opbygning af en besvarelse med korrekt matematisk notation.*

En uddybning af dette punkt findes under **3.2 arbejdsformer**/*skriftligt arbejde* og **3.3 It**

2.3 Supplerende stof

Det supplerende stof skal have et omfang svarende til 25 pct. af den samlede uddannelsestid i faget og skal udvælges således, at det:
- *medvirker sammen med kernestoffet til opnåelse af de faglige mål*
- *inddrager matematisk teori, der udgør en progression i forhold til kernestoffet*
- *understøtter udviklingen af elevens opfattelse af, at matematik kan anvendes i flerfaglige sammenhænge, gennem udvælgelse af områder, der medvirker til opfyldelse af mål i andre studieretningsfag eller andre obligatoriske fag, og hvor tværfagligt samarbejde med disse fag vil være naturligt, fx differentialligninger i samarbejde med biologi, kemi, fysik eller samfundsfag.*
- *er med til at styrke den faglige indlæring i teknikfaget; her kan nævnes komplekse tal i forbindelse med el-tekniske områder og statistik og sandsynlighedsregning i forbindelse med proces-områder*

– *perspektiverer områder fra kernestoffet og udbygger de faglige mål, der er erhvervet herfra.*

Som supplerende stof kan både vælges helt nye emner, eller uddybning/viderebearbejdning af områder fra kernestoffet. Dele af det supplerende stof vælges i samarbejde med klassens øvrige lærere, så samarbejde muliggøres. Der skal planlægges med progression både i forhold til emner og kompetencer.

Som eksempler på emner kan nævnes:
- Differentialligninger
- Komplekse tal
- Statistik, sandsynlighedsregning og test
- Inerti- og modstandsmomenter
- Lineære algebra og anvendelser inden for f.eks. robotstyring eller kvantemekanik
- Numeriske metoder
- Lineær programmering og kvadratisk optimering
- Taylorapproximationer
- Kurvers krumning
- Matematisk bevisførelse som begreb

Flere af disse emner knytter sig til elevens øvrige fag. F.eks. finder emnet differentialligninger anvendelse inden for fag, fysik, kemi, biologi, samfundsfag, erhvervsøkonomi. Det er derfor et emne, der i høj grad er relevant at introducere for eleverne, og der kan her fokuseres på f.eks. modellerings-, hjælpemiddel- og ræsonnementkompetencen.

Som eksempler på udbygning af kernestoffet kan nævnes:
- Udvidelse af analytisk plangeometri med keglesnit.
- Udvidelse af vektorfunktioner i planen til kurver i rummet
- Udledning af udtryk for kurvelængder og overfladearealer ved integralregning.
- Numeriske metoder.

3 Tilrettelæggelse

Planlægning af undervisningen på niveau A

Grundforløbet:
Før skoleårets start udarbejdes en undervisningsplan for grundforløbet med bl.a. rækkefølge og fordeling af valgte emner fra kernestoffet og det supplerende stof, en plan for aflevering af opgaver, herunder almindelige skriftlige afleveringer og projektopgaver.
I samarbejde med lærerne for de øvrige fag fastlægges rækkefølgen af emnerne.
I læreplanen er der ikke lagt op til en bestemt fordeling af emnerne på de tre år. Det kan anbefales, at emnerne geometri, trigonometri og indledende funktionsteori placeres på grundforløbet. Rækkefølgen af emner bør fastlægges under hensyn til de forløb, hvor flere fag spiller sammen, og hvor matematik skal indgå.

Det kan anbefales, at der i grundforløbet anvendes 10-15 % af den samlede elevtid, der er afsat til skriftligt arbejde i matematik. Aflevering af opgaver koordineres med de øvrige fag, således at elevens arbejdsbelastning bliver jævnt fordelt i undervisningsperioden.

Det anbefales, at eleven løser mindst en projektopgave i løbet af grundforløbet. Projektopgaverne i grundforløbet må gerne være med færre frihedsgrader end projektopgaver senere i uddannelsen. Eleven skal gradvis indføres i, hvordan en projektrapport opbygges. Til igangsætning og eventuelt afslutning af en projektopgave kan det anbefales, at der planlægges med ca. 3 timers uddannelsestid.

Matematik i studieretningsforløbet
Før starten af 2. semester udarbejdes en undervisningsplan for studieretningsforløbet med bl.a. rækkefølge og fordeling af emnerne fra kernestoffet og de valgte emner fra det supplerende stof og en plan for aflevering af opgaver, herunder almindelige skriftlige afleveringer og projektopgaver. Rækkefølgen af emnerne bør fastlægges under hensyn til de forløb, hvor flere studieretningsfag spiller sammen, og de øvrige fag, hvor matematik skal indgå. Denne plan skal samtidig synliggøre hvilke emner, der skal indgå i studieområdet.

3.1 Elevens faglige forudsætninger

De centrale kundskabs- og færdighedsområder i folkeskolen er:

- Arbejde med tal og algebra.
- Arbejde med geometri.
- Matematik i anvendelse.
- Kommunikation og problemløsning.

Matematik i htx-uddannelsen er bl.a. kendetegnet ved inddragelsen af praktiske anvendelser, hvilket stemmer godt overens med ovenstående kundskabs- og færdighedsområder.

Fagets praktiske dimension har stor vægt og består i, at man ved hjælp af matematiske teorier og modeller beskriver, analyserer og vurderer såvel tekniske, naturvidenskabelige og samfundsmæssige emner og relationer.

Overgangen fra folkeskole til teknisk gymnasium kan virke overvældende på mange elever. Derfor bør den indledende undervisning planlægges således, at den gradvis vænner eleven til fagets undervisnings- og arbejdsmetoder. I starten bør emnerne tilrettelægges således, at anvendelsesaspektet virker motiverende og har en mere central plads i undervisningen, end det er nødvendigt senere i forløbet.

3.2 Didaktiske principper

Arbejdet med matematik foregår som en vekselvirkning mellem teori og anvendelser, der har udgangspunkt i teknisk-naturvidenskabelige problemstillinger.

Under benyttelse af såvel deduktive som induktive undervisningsprincipper beskæftiger eleven sig med den teori, der anvendes til løsning af et givet problem. Matematikkens særkende er bevisførelse på grundlag af aksiomer, og det er derfor et væsentligt aspekt ved undervisningen, at eleven stifter bekendtskab med matematisk deduktion. Samtidig er det vigtigt, at eleven gennem matematikfaglig virksomhed oplever, at en eksperimenterende tilgang til faget styrker forståelsen af det teoretiske stof. Her spiller benyttelsen af CAS-værktøjer en væsentlig rolle.

Ved at graden af selvstændighed øges, og ved at der arbejdes med dele af stoffet på et højt abstraktionsniveau, øger eleven både sin almene og sin faglige studiekompetence.

Eleven skal også opfatte matematik som et fag, der kan bruges til løsning af problemer i andre fag. Her tænkes på praktiske problemer fra teknikfagene og mere teoretiske problemstillinger fra de naturvidenskabelige fag. Ved hjælp af induktive arbejdsmetoder og problemløsningsværktøjer hentet fra matematikken skal eleven arbejde med at analysere, opstille løsningsmodeller og vurdere de opnåede resultater inden for såvel matematik og de naturvidenskabelige fag som teknikfaget.

Undervisningen tilrettelægges med henblik på, at matematiklæring foregår på forskellige måder. I nogle sammenhænge er det nødvendigt at se matematikken opbygget aksiomatisk med definitioner, sætninger og beviser. I andre sammenhænge er det vigtigt, at eleven selv søger, bearbejder og anvender informationer og selv reflekterer således at læring opnås. Det vil være hensigtsmæssigt, at undervisningen i starten er meget præget af induktive metoder. Det er altså eleven, der i sit arbejde føler behov for ny viden. Dette berettiger introduktion af nyt stof. For at kunne løse et konkret problem er det behovet for denne nye viden, der motiverer indlæringen af det nye stof.
Senere i undervisningsforløbet vil der ske en udvidelse af den tid, der bruges til deduktiv undervisning. Viden opbygges og eleven afsøger derefter anvendelsesområderne for denne viden.
Undervisningsformen tilrettelægges med mulighed for kobling mellem teori og anvendelser og med hensyn til maksimal elevaktivitet.

3.3 Arbejdsformer

Der arbejdes med matematisk teori og bevisførelse samt med praktiske problemstillinger, hvor matematikken anvendes som redskab til at analysere og matematisere. Undervisningen er såvel emne- som projektorienteret, og eleven vil arbejde skiftevis selvstændigt og i grupper. Projektoplæggene og arbejdet med disse tilrettelægges med progression i kravene til løsning af opgaven.

Undervisningen tilrettelægges, så eleven får mulighed for mundtligt at fremlægge centrale dele af stoffet med vægten lagt på overblik, evne til generalisation og forståelse for bevisførelse.

Eleven arbejder ligeledes med den skriftlige dimension af faget, hvor fokus i stigende grad lægges på matematisering, dokumentation og en naturlig brug af diverse hjælpemidler.

Undervisningen kan foregå som en vekselvirkning mellem klasseundervisning med læreroplæg, individuelle træningsøvelser, individuelle opgaver, gruppeopgaver, arbejde i læsegrupper, projektarbejde og elevfremlæggelse. Så vidt det er muligt bør undervisningen tage udgangspunkt i den enkelte elevs faglige niveau og tilgang til faget. Generelt bør undervisningen bygges op, således at eksempler med udgangspunkt i praktiske problemstillinger har en central plads. Arbejdet i læsegrupper kan f.eks. foregå ved nedsættelse af 3-mandsgrupper, hvor hver gruppe skal gennemarbejde og efterfølgende præsentere et emne for klassen. Produktkravene til et gruppearbejde kan være en mundtlig fremstilling med tavlegennemgang, mundtlig fremstilling med en skærmpræsentation, udarbejdelse af skriftligt materiale eller kombinationer af disse.

Det er vigtigt, at man giver eleven mulighed for at udtrykke sig mundtligt, så det talte sprog udvikles og trænes. Det kan ske ved (tavle)fremlæggelse, klassediskussioner eller blot besvarelse af spørgsmål i undervisningen.

Skriftligt arbejde

Formålet med det skriftlige arbejde er at:

- *sikre en selvstændig bearbejdning af matematiske problemstillinger og hermed bidrage til elevens fordybelse i stoffet*
- *opøve skriftlig formidling, herunder korrekt matematisk sprog og symbolbrug*
- *give eleven mulighed for at dokumentere sine matematiske kompetencer*
- *give grundlag for lærerens evaluering af elevens standpunkt og elevens vurdering af eget standpunkt*
- *opøve systematik og give mulighed for overblik.*

Opgaverne kan formuleres som test, gruppeopgaver eller individuelle opgaver.

Ved formuleringen skal der tages højde for, at opgaverne kan afleveres i flere omgange med fokus på forskellige aspekter.

Endvidere udfærdiger eleven et antal projektrapporter, der tilsammen dækker både kernestoffet og det supplerende stof. Projektarbejderne er større åbne opgaver, hvor eleven selv skal tage stilling til dele af opgavens forudsætninger og evt. indhold.

Der skal gennem hele forløbet arbejdes med skriftligheden i matematik. Det skriftlige arbejde kan have mange former, som det også fremgår af det følgende. Det skal f.eks. bruges til at undersøge om eleven kan håndtere fagets metoder og hjælpemidler på en fornuftig måde i forhold til målene.

Skriftligt arbejde kan omfatte udarbejdelse af:

- journal/ logbog
- afleveringsopgaver
- træningsøvelser
- projektrapport
- it-præsentation
- tests/ prøver

I grundforløbet introduceres eleven til fagets skriftlige fremstillingsformer. Her kan man overveje at anvende en portfolio, der består af notater fra undervisningen, til læring af hensigtsmæssig notatteknik i faget. Læreren kan i perioder vælge at kommentere portfolioen i stedet for at rette en almindelig skriftlig opgave. Som dokumentation af mindre forløb og beregninger kan logbog eller journal anvendes.
Træningsøvelser kan anvendes i den daglige undervisning til indlæring af konkrete færdigheder. Der stilles obligatoriske opgaver med progression i sværhedsgrad. Hjemmeopgaver bør opbygges med et balanceret indhold mellem færdigheds- og anvendelsesorienterede opgaver og egentlige projektopgaver.
Det skriftlige arbejde kan evalueres på flere måder: eleverne kan rette egne eller hinandens opgaver. Ved at rette andres opgaver får eleven ofte øje på, hvor stor betydning dokumentation og korrekt

notation betyder. Læreren kan også vælge på forhånd at melde ud, hvilke dele eller med hvilket fokus afleveringen bliver rettet. F.eks. kan man ved en projektrapport i særlig grad kommentere løsningsmodellen eller teoriafsnittet og gøre mindre ud af elevens beregninger. Ved et hjemmeopgavesæt kan det være brug af hjælpemidler eller brug af matematiske ræsonnementer, der er i fokus.

Ved skriftlige besvarelser skal de løsninger, der bestemmes ved hjælp af CAS-værktøjer opfattes som ligeværdige med de løsninger, der fremkommer uden, når løsningen er dokumenteret og om nødvendigt vurderet. Eleven skal være opmærksom på, at når mellemregninger udelades, og det vil ofte ske, når CAS-værktøjer er i brug, bør disse erstattes af en forklarende tekst. Det skal altid fremgå af besvarelsen hvilken matematik, der har været i brug, for at nå frem til den angivne løsning. Her kan være tale om benyttede regneregler eller sætninger. De ligninger, der løses, skal altid opskrives.
Det er vanskeligt at give en nøjagtig beskrivelse af, hvad en tilstrækkelig dokumentation er. Her må man vurdere, om eleven har redegjort for den matematik, der er anvendt og i hvor høj grad eleven viser matematisk forståelse. Som et eksempel kan nævnes bestemmelse at en funktions maksimum. Her vil CAS-værktøjet nemt kunne beregne maksimummet, men da monotoniforhold og disses sammenhæng med differentialkvotienten er en del af kernestoffet, har eleven først redegjort for den anvendte matematik, hvis f.eks. differentialkvotienten opskrives og sættes lig med 0.

Der henvises til ministeriets udgivelse:
"Vejledning om besvarelse af skriftlige opgaver i matematik på htx.- med særlig henblik på anvendelse af it."
Vejledningen er efterhånden temmelig gammel, og er på mange måder overhalet at udviklingen. Alligevel er der nogle gode overvejelser, der stadig er relevante.

Der udarbejdes projektopgaver, der er dækkende for både kernestoffet og det supplerende stof. Projektopgaverne træner i særlig grad elevernes modelleringskompetence og deres kommunikationskompetence. Der bør lægges vægt på, at besvarelsen af en projektopgave fremstår som en helhed med en god kommunikationsværdi, hvilket vil sige, at besvarelsen kan læses og forstås, selv om læseren ikke kender opgaven på forhånd.

Det er vigtigt, at læreren udarbejder projektoplæggene på en sådan måde, at der i slutningen af forløbet lægges op til en besvarelse, hvor eleven kan demonstrere evnen til selvstændigt at analysere et givet problem og opstille en løsningsmodel. Oplæggene må derfor ikke ligne traditionelle matematikopgaver, hvor alle oplysninger er givet, og eleven ledes gennem besvarelsen med konkrete spørgsmål. Formålet med projektarbejdet er at uddybe elevens forståelse for teorien og træne eleven i at matematisere et praktisk problem. Der kan med fordel samarbejdes med de øvrige fag om projekter.
Ved udarbejdelsen af projektoplæggene kan der hentes inspiration i de oplæg, der blev lavet til forsøget med it-prøven på B-niveau i perioden 2001-06 og eksamensprojekterne fra 2007 og 2008.

Arbejdet med et projekt kan foregå i grupper eller selvstændigt og afsluttes med en skriftlig besvarelse. Man kan også vælge at lade arbejdet med en projektopgave danne ramme om undervisningen i et emne. Det er således gennem arbejdet med opgaven, at eleven introduceres for nyt stof og gennemarbejder det. Projektopgaverne løses i perioder jævnt fordelt over uddannelsestiden, således at læreren kan anvende disse som element til variation af undervisningen.
Gennem projektarbejdet forsøger eleven selvstændigt at finde en eller flere matematiske løsningsmodel(-ler), og læreren fungerer som vejleder. For nogle elever og grupper vil vejledningen foregå i

mange små trin, mens andre vil kunne arbejde selvstændigt og kun have behov for meget lidt vejledning. Det er en balanceakt, som læreren bør indstille sig på i alle projektforløb.
Som nævnt bør der i de første projekter lægges op til den struktur, som eleven skal arbejde efter ved senere projektarbejder. Dermed introduceres eleven til at analysere, matematisere, opstille løsningsmodeller, dokumentere og konkludere så tidligt som muligt i undervisningsforløbet.

Besvarelsen af en projektopgave bør indeholde følgende hovedafsnit:

Opgaveanalyse:
En **kort** beskrivelse af, hvad opgaven går ud på, samt hvilke oplysninger der er givet.
Hvis der f.eks. mangler oplysninger, for at opgaven kan besvares, kan det være nødvendigt, at eleven drager nogle konklusioner og formulerer egne antagelser eller indhenter relevante oplysninger.

Løsningsmodel(ler):
En handlingsplan for, hvordan eleven tænker opgaven løst, og herunder hvilken matematisk teori, der skal anvendes i den relevante situation og om muligt også en begrundelse hvorfor. Dette afsnit træner eleven i at bevæge sig op på et højere abstraktionsniveau end blot at kunne løse en konkret opgave.

Dokumentation:
Her skal selve opgaven løses, og alle udregninger dokumenteres, beskrives og evt. illustreres.
Det kan anbefales at eleven medtager et **teoriafsnit**, hvor den benyttede teori opsummeres og udvalgte dele uddybes. Relevante beviser medtages. Denne del er et godt afsæt for den mundtlige prøve.

Vurdering:
En diskussion af den fundne løsning i relation til opgaven, f.eks. de opstillede forudsætninger og antagelser.

Ifølge bekendtgørelsen er der afsat 160 elevtimer til det skriftlige arbejde på matematik A.
Elevtiden til opgaver, hvor flere fag spiller sammen, aftales i lærerteamet.
Timerne fordeles mellem de ovennævnte former for skriftligt arbejde.
En stor del af elevtiden skal eleven bruge på udarbejdelse af projektarbejder. Eleven løser normalt mellem 8 og 11 projektopgaver. Besvarelserne danner udgangspunkt for en del af den mundtlige prøve i faget. Oplæggene skal være udformet således, at de dækker pensum bredt.

3.4 It

Eleven arbejder med CAS-værktøjer og andre matematikprogrammer, således at eleven kan blive fortrolig med syntaks og terminologi i og anvendelse af mindst ét matematikprogram.
I løbet af uddannelsen kan it-værktøjer benyttes til i voksende omfang at foretage:

- *visualiseringer*
- *gentagne udregninger*
- *symbolske beregninger*
- *numeriske beregninger*
- *dokumentation og formidling af resultater*

It integreres løbende i undervisningen. Som eksempler på anvendelsen af it kan nævnes:

- illustration af matematiske forhold f.eks. animationer, der viser overgang fra differenskvotient til differentialkvotient eller fremkomsten af forskellige typer keglesnit
- som redskab, når eleven selv eksperimenterer f.eks. med forhold ved indskreven eller omskreven cirkel, trekantens areal eller betydningen af konstanterne a, b, og c for forløbet af grafen for en 2.gradsfunktion
- ved gentagne udregninger som f.eks. beregninger af arealsummer ved forskellige inddelinger samt tabelgenerering
- til analytiske beregninger, f.eks. bestemmelse af afledet funktion og stamfunktion, løsning af differentialligninger samt til symbolmanipulation
- numeriske beregninger ved bestemmelse af bestemte integraler, differentialkvotienter samt løsning af ligningssystemer og regression.
- som dokumentationsredskab ved skriftlige besvarelser, f.eks. beregninger, graftegning og tekstbehandling

Der findes et utal af matematikprogrammer af forskellige typer og med forskellige formål. Her skal blot nævnes nogle få.
Geometriprogrammer som *Geogebra*, *Sketchpad* og *Geometer*.Geometri er et emne, der giver mulighed for en eksperimenterende og undersøgende tilgang. Med disse programmer kan opbygges dynamisk visualisering af f.eks. størrelsen af en periferivinkel og en centervinkel, som kan danne grundlag for nogle antagelser, og som efterfølgende kan bruges ved opbygning af beviser.
I arbejdet med funktioner kan programmer som *Graphmathica* og *Graph* bruges til graftegning, herunder undersøgelse af en funktions egenskaber samt ligningsløsning. Af mere komplekse programmer kan nævnes *Mathcad*, *Maple* og *TI-Nspire*. Ved brug af programmer som disse kræves det, at brugeren benytter programmerne jævnligt, og dermed får indarbejdet det nødvendige kendskab til terminologi og matematikfunktioner.
Et *regneark* kan være et godt værktøj, når der skal arbejdes med forskellige matematiske funktioner og de tilhørende grafer. I modsætning til brug af de mere "automatiske" matematikprogrammer, skal eleven selv kunne opstille og anvende de nødvendige regneudtryk. Regneark kan således støtte arbejdet med algebra. Man skal dog være opmærksom på regnearkets notation, der ofte ikke vil være matematisk korrekt samt problemer med akseinddelinger etc. ved grafisk fremstilling.
Med *spørgeskemaprogrammer* kan opbygges elektroniske test både med åbne og lukkede spørgsmål, der er et godt redskab ved evalueringen. Nogle opgaver/test kan rettes af eleven selv ud fra nogle selvinstruerende rettevejledninger.

Mængden af *internetsider* med matematikindhold vokser med stor hast, og dette giver mulighed for at hente inspiration til undervisningsmateriale. Der findes særlige Sites, hvor eleven på egen hånd kan arbejde med matematiske emner og øve specifikke færdigheder. Det er tilrådeligt at holde sig ajour ved at studere fagblade og foretage kvalificerede søgninger på nettet. Et udgangspunkt for en søgning kan være adressen: http://www.download.com. Søger man på "Interaktive matematikopgaver" finder man links til mange udmærkede sider.
I forbindelse med at 25 % af undervisningen i studieretningsforløbet kan foregå virtuelt kan det anbefales, at man på den enkelte skole sikrer en vidensdeling m.h.t. it-baserede forløb, der kan støtte/supplere den traditionelle matematikundervisning.

3.5 Samspil med andre fag

Faget optræder som et selvstændigt fag i grundforløbet, men kan indgå i et samarbejde med fagene inden for studieområdet med fokus på fx geometri og trigonometri.

Hvor faget indgår som studieretningsfag, skal det supplerende stof udvælges således, at det faglige indhold samt de faglige kompetencer, der udvikles ved arbejde med indholdet, supplerer målene fra de øvrige studieretningsfag samt de obligatoriske fag. Faget indgår i et samarbejde med teknisk-naturvidenskabelige fag eller med fagområder, der enten indgår i uddannelsen eller har elevens særlige interesse. Hvis matematik indgår i en studieretning med et naturvidenskabeligt fag, skal der planlægges et fælles forløb, hvor modelbegrebet får en central plads.

Hvor faget indgår som valgfag, kan det supplerende stof udvælges således, at det faglige indhold samt de faglige kompetencer, der udvikles ved arbejde med indholdet, supplerer målene fra både studieretningsfag og obligatoriske fag.

Samspillet med andre fag skal dokumenteres i studieplanen for henholdsvis grundforløbet og studieretningsforløbet.

Grundforløbet:
I forbindelse med planlægningen af undervisningen i studieområdet inden for det tekniske og naturvidenskabelige område er det vigtigt at koordinere opbygningen af de fælles kompetencer for fagene matematik, fysik, kemi, biologi. Her kan nævnes: brug af lommeregner/hjælpemiddel, forståelse af formeludtryk, rapportering, notatteknik og informationssøgning. Det aktuelle valg af emner i fagene vil afspejle behovet for yderligere koordinering på tværs.
Generelt er det vigtigt, at eleven oplever matematik i samspil med andre fag, og det anbefales derfor, at matematik bidrager til temaforløbene.

Studieretningsforløbet:
I forbindelse med planlægningen af undervisningen i de tre studieretningsfag anbefales det, at man først fastlægger temaerne for de forløb, hvor fagene skal indgå i naturligt samspil. Her ud fra udarbejdes en foreløbig studieplan for de tre fag. Indgår matematik A i en studieretning med et naturvidenskabeligt fag skal et af forløbene omfatte opstilling, anvendelse og vurdering af matematiske modeller. Den foreløbige studieplan for studieretningsfagene præsenteres for lærergruppen, der underviser i de øvrige fag i studieretningen. De øvrige lærere opgør deres behov for matematikkompetencer i en tidsramme og her ud fra udarbejdes den endelige plan for undervisningen i matematik.

Som eksempel på tværgående emner med fysik, kemi og biologi kan nævnes: graftegning, regression, omvendt funktion og 2. gradsligningen, eksponentielle udviklinger, logaritmefunktioner, bestemmelse af differentialkvotienter og differentialligninger.

Valgfag:
Ved matematik A som valgfag, anbefales det at illustrere samspillet med andre fag ud fra eksempler fra de forskellige teknikfag. Samtidig er det vigtigt at planlægge nogle undervisningsperioder, hvor forskellige elever kan arbejde med forskelligt stof, således at forskelligheden i forudsætningerne fra det supplerende stof på B-niveauet kan udlignes. På B-niveau hører radianbegrebet, trigonometriske funktioner, eksponentialfunktioner, eksponentielle udviklinger og logaritmefunktioner til under det supplerende stof, hvorimod dette er kernestof på A niveauet.

En særlig problemstilling ved faget som valgfag knytter sig til benyttelsen af projektrapporter som udgangspunkt for den mundtlige prøve. Det kan være uoverskueligt at skulle bruge alle projekter fra

B-niveauet, da elever fra forskellige klasser ofte har lavet forskellige projekter. Man kan derfor vælge at lave projektoplæg, der udover emnerne, der kun findes på A-niveau også berører emner fra B-niveau. Projekterne, der danner udgangspunkt for den mundtlige prøve skal bredt dække såvel kernestof som supplerende materiale for hele forløbet 0→A og man derfor fravælge nogle af de projekter, der er lavet på 1. og 2. år.

3.6 Undervisningsmaterialer

Materialet til undervisningen vælges således, at elevernes forskellige forudsætninger kan tilgodeses. Samtidig er det vigtigt at stoffet udtrykker en tydelig forbindelse mellem teori og praktisk anvendelse, og at en del af undervisningen foregår som træning og afprøvning af praktiske sammenhænge. Man skal være opmærksom på at det er samspillet med andre fag og de didaktiske overvejelser om undervisningens forløb og progression frem for den benyttede lærebog, der bestemmer den rækkefølge, man tager. Da matematik A er et fag, som giver studiekompetence på de videregående uddannelser, er det vigtigt at eleven undervejs får mulighed for at arbejde med matematiske tekster af samme type, men naturligvis en anden sværhedsgrad, som de tekster eleven vil møde siden hen. Som supplement til undervisningen er det naturligt at afprøve Internettets muligheder med f.eks. anvendelse af matematiske (trænings)programmer.

3.7 Progression

Det bør tilstræbes, at eleven får en stadig dybere og mere kompleks forståelse for teori og praktiske anvendelsesmuligheder. Dette kan ske ved gradvist at inddrage flere faktorer i vurderingen af praktiske teknisk-naturvidenskabelige problemstillinger. Samtidig bør bevisførelse og en diskussion af modelanvendelse gradvis få en meget central plads i undervisningen.
Ved udformningen af opgaver kan disse i mindre omfang bruges til træning af konkrete færdigheder. Det centrale ved opgavestillelsen er, at opgaverne gradvis skal have karakter af oplæg til bearbejdning af naturvidenskabelige, tekniske og samfundsmæssige problemstillinger. Eksamensformen, med den længere forberedelse, lægger op til, at der skal foregå en prioritering af matematisering og analyse af matematiske problemstillinger. De mindre opgaver afløses således af mere projektlignende opgaver. Disse opgavetyper giver endvidere muligheder for at lade eleven aflevere samme opgave flere gange, hvor læreren kan definere forskellige niveauer af opgaveløsning. Af niveauer kan nævnes:

- Beskrivelse af valg af modeller og løsningsstrategi
- Viderebearbejdning af ovennævnte med skitser og valg af it-redskaber
- Opgaveløsning med detailbehandling af en problemstilling
- Opgaveløsning med vurdering af valgte modeller
- Opgaveløsning med en gennemarbejdet dokumentation

I løbet af uddannelsesforløbet stiger kravet til elevens selvstændighed og studieegnethed. Man bør således indlægge perioder, hvor eleven selvstændigt arbejder med materiale af stigende sværhedsgrad og kompleksitet. Dette kan eventuelt planlægges som virtuel undervisning.

4 Evaluering

4.1 Løbende evaluering

Som det fremgår af læreplanen skal eleven løbende have en tilbagemelding om det faglige niveau for skriftlige og mundtlige præstationer. Vurderingen fastsættes i forhold til elevens forventede kompetenceudvikling og på basis af de skriftlige afleveringer, de afholdte prøver samt elevens deltagelse i undervisningen, herunder de mundtlige fremlæggelser af teori og opgaveløsninger.
Til udvikling af bl.a. studiekompetencen kan det anbefales at afholde individuelle evaluerings-samtaler, hvor det faglige niveau og undervisningen diskuteres, og en handlingsplan for faglig ud-vikling fastlægges. Undervisningen kan efterfølgende justeres, så der tage størst mulig højde for elevernes forskellige måder at lære på. Hvor der er tale om en progression i kravene til præstatio-nerne, bør evalueringen af det forrige forløb afsluttes med en præcisering af på hvilke områder, der stilles større forventninger til eleven i den kommende periode. Til registrering af aftaler m.m. med eleven/holdet kan læreren anvende en portfolie.

4.2 Prøveformer

Der afholdes en centralt stillet skriftlig prøve og en mundtlig prøve.

Den skriftlige prøve

Skriftlig prøve på grundlag af bilagsmateriale, som udleveres ved starten af forberedelsesperio-den, og et opgavesæt, som udleveres ved prøvens begyndelse. Opgavesættet består af opgaver stillet med udgangspunkt i kernestoffet i punkt 2.2 samt i bilagsmaterialet.

Prøvens varighed er 5 timer. Der gives 10 timers uddannelsestid fordelt på to døgn til forberedel-se, herunder vejledning. Ved prøven har eksaminanden adgang til alle hjælpemidler og it-værktøjer, bortset fra kommunikation med omverdenen.

Som det fremgår af læreplanen, afholdes en 5 timers skriftlig prøve, efter at eleven har haft 10 ti-mers forberedelse med vejledning fordelt på to døgn til arbejdet med det materiale, som udleveres ved starten af forberedelsesperioden. Både forberedelsesmaterialet og opgavesættet er udarbejdet af Undervisningsministeriet. Forberedelsesmaterialet omhandler et matematisk emne, der ligger i for-længelse af kernestoffet og kan bestå af såvel teori, anvendelser som øvelsesopgaver.
5-timersprøven indeholder både opgaver, der tager afsæt i forberedelsesmaterialet og standardopga-ver i kernestoffet.
Der kan forekomme opgaver, hvor eleverne i et delspørgsmål skal anvende resultatet af et tidligere delspørgsmål. I den forbindelse er det vigtigt at fortælle eleverne, at hvis de mangler et sådan resul-tat, kan der stadig opnås delvis eller fuld besvarelse for senere delspørgsmål ved at komme med et fornuftigt og velargumenteret forslag til et svar, der kan arbejdes videre med.
Sigtet med denne prøveform er at teste elevens matematikkompetencer, jf. punkt 2.l. Ved prøven har eksaminanden adgang til alle hjælpemidler og it-værktøjer, bortset fra kommunikation med om-verdenen. Der henvises i øvrigt til bestemmelserne i eksamensbekendtgørelsen.

Den mundtlige prøve

Mundtlig prøve på grundlag af projektrapporterne fra undervisningen, jf. punkt 3.2.

Eksaminationstiden er 30 minutter. Der gives 30 minutters forberedelsestid, hvor alle hjælpemidler må benyttes, dog ikke kommunikation med omverdenen.

Eksaminanden får en opgave ved lodtrækning. Hver opgave består af 2-3 delspørgsmål, hvoraf det ene tager udgangspunkt i en af projektrapporterne fra undervisningen. Af de øvrige delspørgsmål kan det ene omhandle et stofområde, der ikke nødvendigvis er anvendt i det udtrukne projekt.

Oplæggene til projektrapporter fremsendes sammen med de mundtlige spørgsmål til censor forud for prøvens afholdelse

Under forberedelsen må eleven benytte alle hjælpemidler. I forbindelse med den stadig mere udbredte brug af computeren til at tage noter på, vælger nogle elever at lave noterne i forberedelsen på computeren ofte som klippe-klistre fra undervisningsnoterne. Det er vigtigt at eleven er klar over hvad formålet med forberedelsestiden er, og hvordan tiden udnyttes bedst muligt. Det vil næppe forbedre elevens præstation, at vedkommende ved prøven medbringer lange detaljerede noter, der er hentet direkte ind fra tidligere notater.
Eleven har mulighed for at medbringe såvel noter, bøger computer/lommeregner etc. under eksaminationen, men igen er det vigtigt, at man i forvejen har drøftet eksaminationens forløb med eleverne. En forud forberedt PowerPoint-præsentation, der læses op, fortæller ikke meget om elevens matematikkundskaber. Der i mod har eleven naturligvis lov til at støtte sig til sin disposition/noter i mindre omfang. Hvis eleven finder det relevant at anvende f.eks. en computer til visualisering af en given problemstilling er dette også muligt.
Censor og eksaminator skal være opmærksom på formålet med den mundtlige eksamen, nemlig at eleven skal vise i hvor høj grad vedkommende har tilegnet sig de matematiske kernekompetencer – se bedømmelseskriterierne i afsnit 4.3.

Udformning af eksamensspørgsmål
Det anbefales, at et eksamensspørgsmål består af tre delspørgsmål, hvor det første kunne formuleres således:

1. Gør kort rede for problemstillingen i projektopgave nr…….

   Man kan eventuelt bede eleven uddybe en konkret problemstilling f.eks. opstillingen af en bestemt funktionsforskrift e. a.

Forløbet af den mundtlige prøve vil være, at eleven kort fortæller om 'ideen' i projektrapporten og, hvis der er bedt om det, derefter redegør for den øvrige del af spørgsmål 1. Spørgsmålet skal dels afdække elevens ejerskab af projektrapporten og dels vise, på hvilket abstraktionsniveau eleven befinder sig, når det drejer som at gennemgå hovedtrækkene i en række konkrete opgavebesvarelser.
Denne del af den mundtlige prøve bør ikke tage mere end 1/3 af eksaminationstiden.

De øvrige delspørgsmål bør udformes således, at eleven ved besvarelsen af spørgsmålene får mulighed for at demonstrere matematiske kompetencer. Man kan vælge at lade 2. delspørgsmål knytte sig til den teori, der er arbejdet med i rapporten og 3. delspørgsmål handle om et helt andet emneområde, eller man kan i begge de øvrige delspørgsmål inddrage emner, der ikke specielt er knyttet til projektrapporten.

Den samlede mængde af eksamensspørgsmål med tilhørende delspørgsmål skal dække alle emneområder, således at væsentlige områder ikke er udeladt.

Det er vigtigt at delspørgsmålene formuleres bredt, så eleven selv kan vælge niveauet for fremlæggelsen. De skal på den ene side give den sikre elev muligheder for at demonstrere en beherskelse af den matematiske teori, medens de på den anden side kan give den usikre elev muligheder for at demonstrere en "håndværksmæssig" viden om matematiske emner.

De to sidste spørgsmål kan f.eks. formuleres:

2. Beskriv begreberne tangentvektor, hastigheds- og accelerationsvektoren.

3. Belys, hvordan integralregning kan bruges til bestemmelse af volumen af omdrejningslegemer.

I spørgsmål 2 kan eleven vælge at redegøre for differentialkvotienter ved vektorfunktioner ved at gå fra sekanter til tangent, eller der kan tages udgangspunkt i en konkret vektorfunktion og eleven kan indtegne og beregne de angivne begreber.
I spørgsmål 3 kan eleven vælge at bevise sætningerne om volumen af omdrejningslegemer om enten x- eller y-akse (eller begge). En anden elev vil måske bestemme volumen for en generel kegle eller kugle vha. formlerne for omdrejningslegemer, og en tredje elev vil tage udgangspunkt i en konkret funktion.
Man kan vælge at tilføje en række stikord med begreber, som eleven kan tage udgangspunkt i.

4.3 Bedømmelseskriterier

Ved bedømmelsen lægges der vægt på, i hvor høj grad eksaminanden har opnået de i 2.1 beskrevne faglige mål. Der lægges vægt på, at eksaminanden:

- *udviser fortrolighed med matematisk tankegang og ræsonnement*
- *kan veksle mellem et matematisk begrebs forskellige repræsentationer*
- *selvstændigt kan anvende matematiske teorier og metoder til at løse teoretiske og praktiske problemer samt kan dokumentere deres løsninger*
- *har opnået tilstrækkelig matematisk indsigt til at kunne anvende matematiske teorier og metoder i tekniske og naturvidenskabelige fag*
- *kan opstille og behandle matematiske modeller samt vurdere resultater, herunder vurdere modellernes rækkevidde*
- *kan anvende it-hjælpemidler og matematikprogrammer til såvel beregninger som dokumentation*
- *kan formulere sig i og skifte sikkert mellem det matematiske symbolsprog og det daglige skrevne eller talte sprog*
- *udviser overblik, evne til at generalisere og forståelse for bevisførelse*
- *Der gives ved både den skriftlige og den mundtlige prøve én karakter ud fra en helhedsbedømmelse.*

Den skriftlige karakter gives alene for præstationen ved den skriftlige 5 timers prøve.

Den mundtlige karakter gives alene for elevens mundtlige præstation.

4.4 Anvendelse af 7-trinsskalaen

Fra 1. august 2006 gives karaktererne i de gymnasiale uddannelser efter 7-trinsskalaen. Se også 7-trinsskalaen.

Karakterskalaen er karakteriseret ved at operere med et fejl- og mangelbegreb. Man skal altså bedømme i hvor høj grad en elev har opnået slutmålene for faget.

Nedenfor er angivet retningslinier for opnåelse af karaktererne 12, 7 og 02 i matematik A

Beskrivelsen er naturligvis ikke udtømmende, og man skal derfor ved bedømmelsen fokusere på i hvor høj grad eleven har opnået de kompetencer, der er beskrevet i afsnit 2.1 Faglige mål.

Den skriftlige prøve på niveau A

Karakteren 12
I besvarelsen er matematiske teorier og metoder – herunder relevante IT-værktøjer – benyttet korrekt og hensigtsmæssigt. Hvor det er relevant er løsninger og modeller vurderet. Besvarelsen er veldokumenteret med sikker brug af figurer og symbolsprog.
Der demonstreres stort fagligt overblik på alle felter og ud fra matematiske ræsonnementer argumenteres sagligt for de anvendte løsningsmetoder.
Eksaminanden behersker fagets terminologi og kan skifte mellem forskellige repræsentationsformer. Kommunikationsværdien er meget høj, idet der på en naturlig måde skiftes mellem det matematiske symbolsprog og almindeligt skriftsprog.
I besvarelsen forekommer ingen eller kun få uvæsentlige fejl og mangler.

Karakteren 7
I besvarelsen benyttes matematiske teorier og metoder – herunder relevante IT-værktøjer – på en fornuftig måde. Der demonstreres et solidt og bredt fagligt overblik, og ud fra matematiske ræsonnementer argumenteres i et vist omfang for de anvendte løsningsmetoder. Løsningen er dokumenteret med en god brug af figurer og symbolsprog.
Eksaminanden er delvist i stand til at opstille og behandle matematiske modeller og vurdere løsningerne.
Kommunikationsværdien er god, idet eksaminanden kan skifte mellem det matematiske symbolsprog og almindeligt skriftsprog. Eksaminanden behersker fagets terminologi og har et godt kendskab til sammenhængen mellem forskellige repræsentationsformer.
I besvarelsen forekommer adskillige fejl og mangler.

Karakteren 02
I besvarelsen er matematiske teorier og metoder – herunder relevante IT-værktøjer – benyttet på et meget elementært niveau. Matematiske ræsonnementer anvendes usikkert og usammenhængende. Dokumentationen er mangelfuld med ringe brug af figurer og symbolsprog.
Der demonstreres et beskedent fagligt overblik og eksaminanden har kun kendskab til en begrænset del af stoffet.

Eksaminanden er i ringe grad i stand til at opstille og behandle simple matematisk modeller, men kan løse elementære opgavetyper. Anvendelsen af fagets terminologi er usikker. Kommunikationsværdien er beskeden, idet eksaminanden kun i mindre udstrækning kan skifte mellem det matematiske symbolsprog og almindeligt skriftsprog.

Den mundtlige prøve på niveau A

Karakteren 12
Fremstillingen er velstruktureret og fagets terminologi anvendes sikkert. Der veksles problemfrit mellem det matematiske symbolsprog og det daglige talte sprog. Eksaminanden demonstrerer meget stor fortrolighed med matematisk tankegang og ræsonnement – herunder matematisk bevisførelse. Eksaminanden viser et stort overblik på alle felter samt evne til at generalisere. Hvor det er relevant veksles mellem begrebernes forskellige repræsentationsformer.
Ved fremlæggelsen forekommer ingen eller kun få uvæsentlige fejl og mangler.

Karakteren 7
Fremstillingen er godt struktureret, og fagets terminologi benyttes. Der veksles på tilfredsstillende måde mellem det matematiske symbolsprog og det daglige talte sprog.
Eksaminanden demonstrerer en vis fortrolighed med matematisk tankegang og ræsonnement – herunder matematisk bevisførelse. Eksaminanden har et godt overblik på mange områder og kan i nogen grad generalisere. Der veksles mellem begrebernes forskellige repræsentationsformer.
Ved fremlæggelsen forekommer adskillige fejl og mangler.

Karakteren 02
Fremstillingen er ustruktureret. Eksaminanden behersker kun mangelfuldt fagets terminologi og skifter usikkert mellem det matematiske symbolsprog og det daglige talte sprog, samt mellem forskellige repræsentationsformer. Eksaminanden demonstrerer en beskeden fortrolighed med matematisk tankegang og ræsonnement – herunder matematisk bevisførelse – hvor væsentlige argumenter udelades. I stedet vises eksempler på konkrete anvendelser. Eksaminanden har et mangelfuldt overblik og har kun kendskab til en begrænset del af stoffet.

5 Paradigmatiske eksempler

I de følgende afsnit er der givet **eksempler** på og **ideer** til, hvorledes undervisningen kan planlægges og gennemføres. Afsnittene er ikke detaljerede beskrivelser af de enkelte emner, og man skal derfor være opmærksom på ved sin planlægning af undervisningen, at de overordnede faglige mål under kernestof og supplerende stof dækkes.
Afsnittet flyttes ved den næste revision af vejledningen til fagets hjemmeside på EMUen.

5.1 Algebra

Mål: At styrke elevens kendskab til algebra og herigennem udvikle elevens symbol- og formalismekompetence.

Pædagogiske overvejelser:
Der kan undervises særskilt i algebra, men ofte vil det være mest hensigtsmæssigt at arbejde med de enkelte regler, når behovet opstår. Såfremt man vælger at undervise særskilt i algebra, er det vigtigt, at det sker som en form for træning af elevens evne til at genkende og anvende reglerne.
Elevens problemer i forbindelse med ligningsløsning opstår typisk, fordi vedkommende ikke kan huske regnereglerne. Det anbefales derfor, at man reducerer antallet af regne-/huskeregler til et minimum, og i stedet gør eleverne opmærksomme på, hver gang disse regler bruges.
Et eksempel er reglen om "at gange over kors". Her er det i virkeligheden den fundamentale regel om, at hvis man gør noget på den ene side af lighedstegnet i en ligning, skal man også gøre det på den anden side. Når man "ganger over kors" ganger man med begge nævnere på begge sider af lighedstegnet og forkorter. Samme regel kan også erstatte reglen om at "hvis man flytter et tal over på den anden side af lighedstegnet skifter det fortegn". I virkeligheden trækker man tallet fra på begge sider (eller lægger det til).

Undervisningseksempel:
Man kan vælge at gennemføre et forløb, hvor eleven sidder med et interaktiv program, der løbende tester elevens færdigheder. Træningen behøver ikke nødvendigvis at foregå på klassen. Det kan f.eks. være en del af de to første ugers hjemmearbejde at lære at anvende nogle af regnereglerne vha. et program af ovennævnte type.

Der findes forskellige teorisider og tests i algebra på Internettet. Hent f.eks. inspiration på EMUen hvor matematik har fået sin egen hjemmeside.

Evaluering: Eleven kan testes ved en prøve i algebra. Prøven kan udformes som en konkurrence mellem 2 hold. Man kan opdele eleverne i hold i forhold til deres faglige formåen og lade hold, der ligger på samme niveau, dyste mod hinanden.

5.2 Geometri, trigonometri og rumlige figurer

Mål: Målet er at opøve elevens evnen til at konstruere geometriske elementer såsom plane og rumlige figurer. Eleven skal på baggrund af en analyse af geometriske figurer/konstruktioner kunne anvende trigonometriske definitioner og formler til at beregne længder, vinkler, arealer og rumfang. Emnet giver mulighed for at arbejde med flere kompetencer: hjælpemiddelkompetencen ved konstruktion af figurer og benyttelse at beregnings- og visualiseringsredskaber, repræsentationskompetencen hvis der arbejdes med udfoldninger af rumlige figurer, ræsonnementskompetencen ved udledning af forskellige sætninger og problembehandlingskompetencen, hvor der opstilles og løses (anvendelsesorienterede) opgaver.

Pædagogiske overvejelser:
I forbindelse med introduktion af de geometriske begreber og sammenhænge finder den induktive undervisningsform god anvendelse, specielt hvis man udnytter it-værktøjer. Via dynamiske figurer kan eleverne f.eks. undersøge geometriske sammenhænge og herefter arbejde med bevisførelse evt. ved hjælp af spørgsmål, der kan lede dem på vej. Disse spørgsmål kan differentieres, så ikke alle elever skal igennem alle spørgsmål.
Da eleven udover kendskab til betydningen af forskellige geometriske udtryk også skal kunne bruge dem i forbindelse med mere komplicerede problemstillinger, er det vigtigt at eleven ikke kun oplever arbejdet med geometri i forbindelse med teoretiske eksempler.

Det anbefales at have et tværgående samarbejde med de øvrige fag i f.eks. i grundforløbet.

Undervisningseksempler:
Ved hjælp af geometriprogrammer kan eleven lave dynamiske figurer, der giver en mere eksperimenterende og undersøgende elevaktivitet. For eksempel kan eleven ved hjælp af dynamiske figurer finde frem til sætningen om, at korde-tangentvinklen har det halve gradtal af den cirkelbue, korden spænder over.

Eksempel på online program, der visualiserer geometri:
http://www.mathsnet.net/dynamic/javasketchpad.html

Anvendelse af it giver i forbindelse med trekanten muligheder for, at eleven selv finder sammenhænge og beviser dem. Man kan anvende dynamiske figurer til at indføre begreber som trekantens medianer, højder, vinkelhalveringslinjer, tyngdepunkt samt indskreven og omskreven cirkel og undersøge deres egenskaber.
En række beviser medtages f.eks. Pythagoras' læresætning og sætningerne om skæring mellem hhv. højder, medianer, vinkelhalveringslinjer i trekanter.

Der arbejdes der med trigonometri i forbindelse med retvinklede trekanter. Sinus, cosinus og tangens behandles på dette tidspunkt udelukkende som talstørrelser og uden reference til funktionsbegrebet. Eleven skal arbejde med simple trigonometriske grundligninger som følgende typer:

$$\sin(x) = a \text{ og } \tan(2x) = a$$

Ved løsningen af trigonometriske ligninger lægges der vægt på, at eleven laver en **kontroltegning** med udgangspunkt i enhedscirklen, så samtlige løsninger angives. Til udbygning af forståelsesniveauet kan de trigonometriske funktioner indføres.

Herefter kan der arbejdes med vilkårlige trekanter. Sinus- og cosinusrelationen bevises, eller man kan lade eleverne selv vise relationerne med støtte fra lærebog eller andet materiale. Som en forbindelse mellem klassisk geometri og trigonometri kan det være en nyttig øvelse at lade eleverne bestemme de eksakte værdier i nedenstående skema vha. trekanter og enhedscirkel.

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\sin(v)$						
$\cos(v)$						
$\tan(v)$						

Til gentagne beregninger vil det være oplagt, at eleven lærer at bruge programmeringsfaciliteter i regneark eller lign. til at lave et lille program. De kan f.eks. lave et lille program, der for en trekant udregner en ukendt vinkel eller side, når alt andet er kendt. Eleverne skal i denne sammenhæng gøres opmærksomme på, at der er et dokumentationskrav ved skriftlige opgaver, og at det er vigtigt at kunne beskrive, hvilken matematik, der benyttes og hvordan.
Der lægges vægt på, at opgaveløsningen så vidt muligt altid indeholder en konstruktionstegning til forståelse af problemstillingen og kontrol af resultaterne. I denne forbindelse er det vigtigt, at eleven bliver i stand til at gennemskue tilfælde med flere løsninger og kunne vælge en af de mindre tidskrævende løsningsmetoder

Eleven skal kunne udføre arealberegninger af forskellige plane figurer. Vilkårlige polygoner inddeles i trekanter, hvorefter arealet beregnes. Eleven kan selv udlede formlerne for areal af cirkelafsnit og -udsnit.

Efter at have arbejdet med trigonometri i planen kan man gå videre med de rumlige figurer. Her arbejdes med både overfladeareal og rumfang for forskellige rumlige figurer.
For keglen og keglestubbens vedkommende kan indgå udfoldningsfigurer af den krumme overflade, herunder bestemmelse af radier, centervinkel og kordemål.
Man kan arbejde med at indlægge snit (flader/trekanter) i rumlige figurer for at bestemme afstande og vinkler mellem flader. I forbindelse med rumfang af retvinklede prismer arbejdes man med forskellige polygoner som grundflade.

Evaluering: Eleven bør løbende evalueres med mindre testopgaver. Emnet er velegnet som et projektarbejde. Man kan også vælge at lade klassen i grupper lave plancher, der tilsammen dækker emnet og som fremlægges mundtligt for resten af klassen.

Et eksempel på projektarbejder/opgaver i forbindelse med emnet fra inspirationsmaterialet, afsnit 6: Kheopspyramiden

5.2 Funktioner, ligninger og uligheder

Mål: Målet er, at eleven opnår en forståelse af funktionsbegrebet samt viden om karakteristiske egenskaber for udvalgte funktioner, så eleven kan beskrive sammenhængen mellem variable størrelser og løse problemer der er givet ved en ikke-matematisk beskrivelse.

Pædagogiske overvejelser:
Emnet giver gode muligheder for flerfagligt samarbejde f.eks. med fag som fysik, kemi og biologi samt samfundsfag. De funktionstyper der arbejdes med i matematik, møder eleven også de nævnte fag, f.eks. i forbindelse med analyse af opsamlede data herunder bestemmelse af forskrifter ved regression.
I arbejdet med ligninger og uligheder kan anbefales at eleven både oplever at skulle redegøre for, hvorledes forskellige ligningstyper løses ”håndværksmæssigt”, og hvorledes de kan løses ved hjælp af lommeregner/matematikprogram, ligesom det er vigtigt at både numeriske og analytiske løsninger sammenholdes med grafiske løsninger, så eleverne metodernes styrker og svagheder.
Man kan vælge at arbejde med kompetencer som tankegangskompetencen, modelleringskompetencen, repræsentationskompetencen og hjælpemiddelkompetencen.

Undervisningseksempler:
Eleven skal lære de grundlæggende regler for løsning af ligninger og uligheder, herunder at kunne bestemme grundmængde og løsningsmængde samt bruge korrekt matematisk notation.
Disse regler kan trænes ved interaktive programmer som findes på Internettet.
Som nævnt ovenfor arbejdes med både analytisk og grafisk løsning af ligninger og uligheder. Forskellige typer af dokumentation diskuteres. Eleven skal være opmærksom på, at de mellemregninger, der udelades når man benytter et CAS-værktøjer skal erstattes af en forklarende tekst. Det skal altid fremgå af besvarelsen hvilken matematik, der har været i brug, for at nå frem til den angivne løsning.

Den rette linje og parablen kan introduceres som graferne for 1. og 2.gradsfunktioner. Man kan arbejde med forskellige ligninger og uligheder: en ligning med en ubekendt og 2 ligninger med 2 ubekendte, 2.gradsligningen samt diverse uligheder.
Funktioner af højere orden kan fås som produkt at lineære funktioner, hvilket giver et godt argument for omskrivning af en funktion til den tilsvarende produktform, hvor løsningerne til den tilsvarende ligning straks kan aflæses:
F. eks. omskrives $f(x) = ax^2 + bx + c$ til produktform $f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$ hvor α og β er rødderne i ligningen $0 = ax^2 + bx + c$.

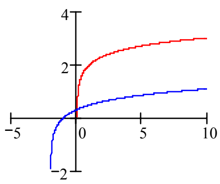
På tilsvarende måde kan man introducere alle de øvrige funktionstyper, der er kernestof: potensfunktioner, logaritmefunktioner, eksponentialfunktioner og -udviklinger samt trigonometriske funktioner.

Fælles for alle disse funktioner er, at de afhænger af et antal konstanter. Disse konstanters betydning, kan man arbejde eksperimenterende med vha. et matematikprogram.
Løsning af ligningssystemer til bestemmelse af konstanterne. F.eks. kan parablens forskrift bestemmes vha. 3 ligninger, en eksponentiel udvikling kan fastlægges ved løsning af 2 ligninger, når 2 punkter på grafen er kendt.

I forbindelse med eksponential- og potensfunktioner arbejdes med logaritmepapir. Disse funktioner vil med fordel kunne introduceres i et samarbejde med fysik. Her kan man hente måledata, som bearbejdes i matematikundervisningen. Regression indføres ved bestemmelse af funktionsforskrifter.
Arbejder man i denne forbindelse med modelleringskompetencen, vil målet ofte være at beskrive givne data vha. en funktion. Her er indtegning af måledata på forskellige typer papir (i hånden eller i et program) en god måde at give eleverne en idé om funktionens forløb. Forskriften kan findes ved bestemmelse af "bedste rette linje" eller ved regression, og regressionskoefficient kan diskuteres. Eleven skal være opmærksom på at en regressionskoefficient tæt på 1 ikke alene er nok til at afgøre en bestemt funktions type. Men sammenholdes med en graf, kan man udtale sig langt mere sikkert.

Eleven skal kunne bestemme funktionernes definitionsmængde og værdimængde. Dette er bl.a. væsentligt i forbindelse med sammensatte funktioner, hvor eleven skal kunne finde regneforskriften for $g \circ f$, når regneforskrifterne for f og g er kendte.
I forbindelse med sammensat funktion kan man arbejde forskydning af grafer

$$f(x) = \log x + 2$$
$$g(x) = \log(x+2)$$



samt med analytisk og numerisk eller grafisk løsning af ligninger og uligheder som f.eks.

$$\log(2x+3) = 2$$

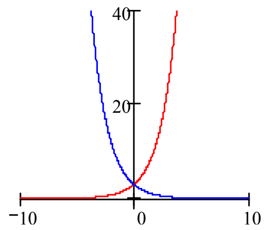
Der arbejdes med omvendte funktioner. F.eks. kan logaritme- og eksponentialfunktioner introduceres som hinandens omvendte funktioner. Eleven skal redegøre for, om en given funktion g har en omvendt funktion ved at vise, at funktionen er injektiv og finde forskriften for den omvendte funktion g^{-1}, når forskriften for funktion g er givet. Sammenhængen mellem graf og omvendt funktion er væsentlig.

10-talslogaritmen og den naturlige logaritme kan indføres i samarbejde med kemi, fysik og biologi. Der arbejdes med regneregler for logaritmer og potenser.

For eksponentielle udviklinger $f(x) = b \cdot a^x$ indføres begreberne halverings- og fordoblingskonstant og vækstrate.

Eksempel:

$f(x) = 3 \cdot 2^x$ og
$g(x) = 3 \cdot 0{,}5^x$



I forbindelse med de trigonometriske funktioner ses der på sammenhængen mellem vinkelmål i grader og vinkelmål i radianer. Derudover gennemgås egenskaberne for funktionerne sinus, cosinus og tangens, herunder definitionsmængde, periode, tegning af graf samt værdimængde.

Den harmoniske svingning beskrevet ved
$f(t) = a \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) + k$
indføres og som nævnt tidligere kan eleven via arbejde med et grafisk værktøj få en geometrisk opfattelse af hvilken betydning konstanterne a (amplitude), ω (vinkelhastighed), φ (faseforskydning) og k har for nulpunkterne, perioden og udseendet af grafen for funktionen.

Der kan i denne forbindelse arbejdes med såvel analytisk som numerisk løsning af forskellige trigonometriske ligninger/uligheder som f.eks.

$\sin(2x + \pi) = 0{,}7$ $\quad$ $2\cos(x)\cdot\sin(x) + 0{,}5\cdot\cos(x) = 0{,}2$ $\quad$ $0{,}2 < \sin(x) < 0{,}9$

Enhedscirklen anvendes normalt som udgangspunkt ved løsning af trigonometriske uligheder, men når de forskellige størrelser opfattes som funktioner, vil en illustration af de tilhørende grafer, være en anden måde at visualisere løsningerne på.

Til slut kommer et eksempel på, hvordan man kan undersøge modellers holdbarhed:
- Betragt sinuskurven $f(x) = \sin(x)$
- Find forskriften for det 3., 4. eller 5. grads polynomium der bedst tilnærmer $f(x)$ i intervallet $[0; 2\pi]$.
- Tegn graferne og sammenlign.
- Prøv at gå udenfor definitionsintervallet og forklar hvad der sker.

Evaluering:
Eleven kan løbende evalueres med små tests. Den afsluttende evaluering kan være et projektarbejde inden for emnet. Som eksempler fra afsnit 6 på projektarbejder i forbindelse med emnet kan nævnes:

Modellering
Reaktionshastighed

5.3 Vektorer i plan og rum

Mål: Målet er at give eleven indsigt i geometrisk og analytisk vektorregning i plan og rum, så eleven kan opstille og løse problemer indenfor matematik og de tekniske og naturvidenskabelige fag.

Pædagogiske overvejelser:
For de fleste elever er vektorbegrebet helt nyt, og det er derfor vigtigt at introducere begreberne med nogle eksempler fra virkeligheden som f.eks. kræfter eller elektriske strømme. Eleven vil under alle omstændigheder komme til at arbejde med vektorer i fysik - ikke nødvendigvis med koordinater, men vektorernes længder og retning. En del elever vil også beskæftige sig med begrebet i teknikfaget og i valgfaget Statisk og styrkelære.
Man kan vælge at arbejde med vektorer i plan og rum enten afbrudt af andre emner eller lige efter hinanden, hvorved der kan komme en større kontinuitet i undervisningen.
For at eleven skal opnå fortrolighed med opstilling af modeller, hvis løsning er baseret på vektorregning, må man udover gennemgang af teorien og teoretiske opgaver også arbejde med praktiske anvendelser. Disse kan ofte bearbejdes i forløb med andre fag, hvilket inden for vektorregningen kan være begreber i fysik, såsom kræfter, arbejde, hastighed og acceleration. Vektorregningen kan evt. også inddrages i forbindelse med konstruktioner som f.eks. størrelse og retning af kræfter i gitterkonstruktioner.
Der bør lægges vægt på sammenhængen mellem vektorregning og analytisk plangeometri.
Vektorregning kan bruges som et afsæt til en introduktion af metriske rum i flere dimensioner.

Undervisningseksempler:
Vektorer i planen repræsenteres såvel ved koordinater som vha. retningsvinkel og længde.

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |b_1| \cos v \\ |b_2| \sin v \end{pmatrix}$$

Sammenhængen mellem de to repræsentationer, og hvornår de bruges, kan tydeliggøres med eksempler. Dette generaliseres til rummet

Motiveret af dagligdags eksempler kan definitioner og regneregler for vektorer indføres og vises. Eleven bør selv kunne komme frem til beviserne for flere af sætningerne i vektorregningen. Dette gælder f.eks. sætningerne om addition og subtraktion af vektorer samt multiplikation af tal med vektor. Igen er sammenhængen mellem den analytiske vektorregning (med koordinater) og den geometriske fortolkning (tegning af "pile") væsentlig. Sammenhængen med den analytiske plangeometri kan illustreres ved udledning af formlen for bestemmelse af afstand fra punkt til linje og sammenligning med beviset fra analytisk plangeometri. Tilsvarende kan ligninger og parameterfremstillinger fremkommet ved hhv. vektorregning og analytisk plangeometri sammenlignes.

Man kan vise determinantformlen til bestemmelse af trekantens areal:

$$A_T = ½\left|\det(\vec{a}, \vec{b})\right|$$

i plan og/eller rum og sammenholdes dette udtryk med den geometriske betydning af vektorproduktet. I det hele taget kan det være hensigtsmæssigt at vise nogle af formlerne i planen og generalisere

til rummet, mens andre formler blot kan vises i rummet, og dermed naturligvis også gælder i planen.
Dele af vektorregningen er meget intuitiv og egner sig godt til selvstudium, hvorved eleven trænes i selvstændigt at sætte sig ind i nyt materiale.

Som en del af vektorregningen i rummet kan anvendes forskellige visuelle hjælpemidler Som et eksempel kan nævnes Visual Python, se http://vpython.org/ samt programmet Geogebra, der kan hentes gratis på Internettet.
Man bør være opmærksom på at vektorer i rummet kan ende som 'formelgymnastik'. Det kan derfor anbefales at lade eleven selv foretage generaliseringer og udledning af diverse udtryk, ligesom brug af grafregner/matematikprogrammer kan lette udregningsbyrden.
Emnerne bør i vid udstrækning indføres i forbindelse med praktiske anvendelser, f.eks. konstruktion af rumlige figurer, og det vil være ønskeligt, at elevens dokumentation indeholder en grafisk illustration.

Evaluering:
Eleven kan løbende evalueres ved små prøver, og emnet bør afsluttes med et projektarbejde.
Eksempler på projekter med vektorer.

IT-B Eksamen 2001	Vægdrejekran.
IT-B Eksamen 2004	Design af bænk (dele af oplægget)
IT-B Eksamen 2006	Betonkonstruktion

Man kan vælge at tage projektoplægget fra emnet *Rumlige figurer* om Kheopspyramiden op igen, og lade det danne udgangspunkt for udledningen af teorien. Opgaven kan suppleres med andre problemer, såsom at bestemme om et givet punkt ligger inden i eller uden for pyramiden.

5.4 Differentialregning og grænseværdibegrebet

Mål: Målet er at give eleven indsigt i differentialregningens teori, for derved at kunne beregne, fortolke og anvende udtryk for den afledede funktion i forbindelse med modellering og løsning af konkrete teoretiske og praktiske problemstillinger. Endvidere inddrages funktioners opførsel i singulariteter og i grænsen $x \to \pm\infty$.

Pædagogiske overvejelser:
Emnet præsenteres ud fra elevernes forståelse af og erfaringer med f.eks. vækst eller grafers hældning.
For at eleven mundtligt skal kunne redegøre for og benytte idéerne bag differentialregningen, bør man også øve bestemmelsen af differentialkvotienten ud fra sekant- og tangenthældninger samt ved benyttelsen af de derved fremkomne regneregler. I større opgaver, f.eks. ved problembehandling og modellering vil det være naturligt at bruge et matematikprogram til bestemmelsen af f.eks. ekstremumspunkter.
Man vil i høj grad komme til at fokusere på hjælpemiddelkompetencen, når it-værktøjer bruges til såvel visualisering, beregning som dokumentation, men også ræsonnementkompetencen og symbol- og formalismekompetencen er oplagte fokuspunkter.

Undervisningseksempler:

Begrebet differentialkvotient kan indføres som et udtryk for vækst. Fysikkens kinematik er et område, hvor eleven kan arbejde med bestemmelse af hældning, både analytisk og geometrisk, i forbindelse med f.eks. (s, t)-grafer.

Begreber som kontinuitet, grænseværdi og differenskvotient introduceres som grundlaget for bestemmelse af differentialkvotienter og afledet funktion. Der kan eksperimenteres med grænseværdier vha. et matematikprogram, der også er et godt værktøj til at illustrere differentialkvotienten.

Eleven skal kunne anvende og redegøre for begreberne differenskvotient og differentialkvotient, som udtryk for henholdsvis sekant- og tangenthældning. Regneregler for differentiation udledes ved opstilling af differenskvotienten. Elverne kan selv udlede simple regneregler som for sum eller differens eller for en funktion ganget med en konstant. Nogle elever vil måske være i stand til selv at vise regnereglerne for produkt eller kvotient af funktioner. I praktiske eksempler benyttes også differentiation af sammensatte og omvendte funktioner.
Herefter kan man udlede formlen
$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ hvor $n \in N$
ved hjælp af et induktionsbevis.

I funktionerne, der arbejdes med, må der indgå polynomier, polynomiumsbrøker, rodtegn, trigonometriske funktioner osv.

Eksempler:

$f(x) = 3x^3 + 4x^2 + 7$ $\quad f(x) = x \cdot \sqrt{x}$ $\quad f(x) = \dfrac{2x^2 + 7}{x - 3}$ $\quad f(x) = \sqrt[5]{\sin(2x + 3)}$

Eleven skal se udledningen af de analytiske udtryk for differentialkvotienter for eksponentielle udviklinger, eksponential- og logaritmefunktioner. Herudover kan udledningen af differentialkvotienter for de trigonometriske funktioner medtages.

Formålet med den traditionelle funktionsundersøgelse var at finde frem til forløbet af grafen. Det klarer CAS-værktøjet i dag, men eleven skal kunne bestemme definitionsmængde, skæring med koordinatsystemets akser, monotoniintervaller, ekstremer og vendetangenter, asymptoter (vandrette, lodrette og skrå) og værdimængde. Mange af disse begreber er væsentlige at finde, før man kan afgøre inden for hvilket interval funktionens graf er relevant at se på.
Det er ikke tanken, at man skal bruge tid på at tegne grafer på baggrund af funktionsundersøgelser, men eleven skal forstå teorien og metoderne bag de forskellige beregninger.
I stedet for at lade eleven undersøge en funktions forløb som beskrevet ovenfor, kan man vælge at give eleven resultatet af en sådan undersøgelse. Opgaven består da i at komme med et kvalificeret bud på funktionens forskrift. Eller man giver det grafiske billede af en funktion og lader eleven lave en funktionsanalysen på baggrund af denne.

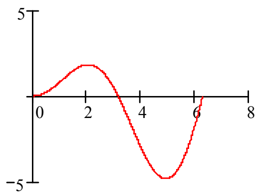
Ved bestemmelse af nulpunkter for funktioner kan eleven introduceres for numeriske metoder. Nulpunkter, der bestemmes ved hjælp CAS-værktøjets faciliteter, skal eftervises ved indsættelse.
Bestemmelse af f.eks. ekstrema kan dokumenteres på mange måder. Igen er det vigtigt at eleven viser indsigt i den matematiske tankegang, og derfor vil bestemmelse af nulpunkter for den afledede funktion med tilhørende graf eller monotonilinje (fortegnsbestemmelse for f') være en mulig dokumentation.

Når man introducerer CAS-værktøjet til numerisk løsning af ligninger, er det vigtigt at eleven også får en introduktion i hvorledes værktøjet arbejder, så de ikke undrer sig over at $1{,}7 \cdot 10^{-17}$ faktisk er 0 i nogen sammenhænge og ikke i andre.
I denne forbindelse kan man eventuelt omtale numeriske metoder til bestemmelse af nulpunkter som en del af det supplerende stof.

I forbindelse med praktiske opgaver og projekter vil man ofte støde på funktionstyper, der ligger udenfor kernestoffet. Ved hjælp af matematikprogrammer kan man også i disse tilfælde bestemme ekstremer og nulpunkter, som benyttes i f.eks. forbindelse med optimeringsopgaver.

Eksempel:
$f(x) = x \cdot \sin(x) \qquad x \in [0;2\pi]$

Eleven kan både bestemme differentialkvotienten og løse ligningen $f`(x) = 0$ ved hjælp af CAS-værktøjet, der desuden kan give eleven et overblik over grafen samt bestemme ekstremumsværdierne i det givne interval.



$\frac{d}{dx} f(x) \rightarrow \sin(x) + x \cdot \cos(x)$

$0 = \sin(x) + x \cdot \cos(x)$

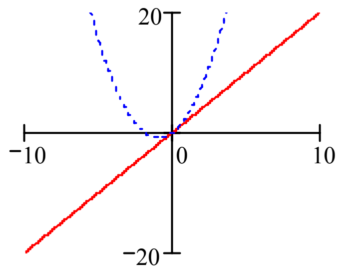
x = 0 eller x = 2.029 eller x= 4.913

Ved bestemmelse af tangentligninger kan eleven bruge CAS-værktøjet til at kontrollere, at det er en korrekt ligning, der er fundet.

Eksempel:
Find en tangentligning i punktet (0,2) for $f(x) = x^2 + 2x$

Først bestemmes den afledede funktion og $x = 2$ indsættes:
$y - 2 = f`(0)(x - 0) \Leftrightarrow \qquad y = 2x$

Dernæst tegnes grafen med tangenten og man sammenligner de to udtryk for tangentligningen.

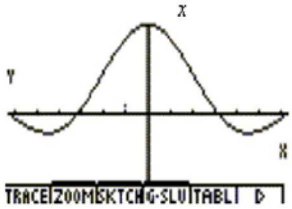


Ved bestemmelse af de skrå-, vandrette og lodrette asymptoter kan man bruge CAS-værtøjet til kvalitative overvejelser/visualisering af grafens forløb.

I arbejdet med grænseværdier, er det relevant at lade eleverne se på grænseværdier for kvotienter hvor tæller og nævner går mod ubestemte værdier som $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$. Eventuelt kan L'Hospitals regel benyttes eller vises.

Eksempel:

Betragt funktionen $h(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, x $\neq 0$ hvor både tæller og nævner går mod 0 for $x \to 0$



Lad $f(x) = \sin(x)$ og $g(x) = x$.

Ved hjælp af L'Hospitals regel fås da, at

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\cos(0)}{1} = 1$$

Evaluering:
Eleven kan løbende evalueres ved mundtlige fremlæggelser, test af skriftlige færdigheder og endeligt ved evaluering af et gennemført projektarbejde.
Eksempler på projekter, der kan anvendes i forbindelse med emnet:

Opgaverne fra de gennemførte Matematik B IT forsøg
Hæmmet vækst

5.5 Integralregning

Mål: Målet er at give eleven indsigt i integralregningens anvendelser og teori, så eleven kan bestemme, benytte og fortolke udtryk for en række stamfunktioner herunder fortolkninger af bestemt og ubestemt integral. Målet er endvidere, at eleven skal kunne bestemme rumfang af omdrejningslegemer omkring x- og y-aksen.

Pædagogiske overvejelser:
Der bør i undervisningen generelt lægges vægt på anvendelse af integration til bestemmelse af arealer under kurver. Dette areal kan være et udtryk for andre ting f.eks. en tilbagelagt strækning eller en livsløn afhængigt af, hvad funktionen udtrykker og kan være et eksempel på arbejdet med modelleringskompetencen. I forbindelse med opgaver skal der være en naturlig progression, så man starter med egentlige træningsopgaver, hvorefter man gradvist indfører opgaver, hvor eleven skal udføre matematiske overvejelser, inden opgaven kan løses. Der skal lægges mest vægt på den sidste type.

Undervisningseksempler:
Integralregningens grundbegreber og definitioner introduceres som "det modsatte af" at differentiere. Hvor man ved bestemmelse af den afledede funktion bestemmer hældningen til grafen i ethvert punkt, går man ved integration den modsatte vej. Her kan man finde et udtryk for funktionen, hvis man kender hældningen overalt.
Eleven skal kunne benytte integrationsprøven og kunne redegøre for teorien bag det bestemte integral herunder kan arealfunktionen indføres. Der arbejdes med at bestemme stamfunktioner til de i

kernestoffet nævnte funktioner. Nogle af disse kan eleven selv udlede fra kendskabet til den afledede funktion.

Eleven skal kunne bestemme stamfunktionen, hvis graf går gennem et bestemt punkt. Der arbejdes med arealer under og mellem kurver.

I samarbejde med fysik kan man på baggrund af udtrykkene

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \text{og} \quad v = \frac{ds}{dt}$$

lade eleverne selv bestemme nogle af formlerne fra kinematikken, f.eks. for bevægelse med konstant acceleration og eller bevægelse med konstant hastighed.

Regnereglerne for integration af sum og differens af to funktioner samt for funktion multipliceret med konstant udledes. Man kan vælge som supplerende materiale at arbejde videre med integrationsteknikker, såsom integration ved substitution og partiel integration. Disse teknikker kan indøves ved at arbejde med et bredt udvalg af funktioner eller ved hjælp af programmer på Internettet.

Eksempler på funktioner:

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin^3 x} \qquad f(x) = \frac{(\ln x)^3}{x} \qquad f(x) = \frac{x}{x^2+3} \qquad f(x) = x^2 \cdot \sin x$$

For at give en forståelse af, hvorledes CAS-værktøjet fungerer i forbindelse med numeriske løsninger, er det en god idé i forbindelse arealbestemmelse at arbejde med forskellige typer summer (højresummer, venstresummer, midtpunktssummer eller trapezsummer) i f.eks. regneark eller på lommeregner. Ved at forbedre inddelingens finhed kommer man tættere og tættere på det analytisk bestemte areal.
Rumfangsformler for omdrejningslegemer udledes, dette gælder både ved drejning om x- og y-akse. For at træne brugen af formlerne kan man vælge at udlede nogle af rumfangsformlerne fra tidligere f.eks. kegle, keglestub eller kugle.
Som i differentialregningen skal arbejdet med beviser for udvalgte analytiske formler og sætninger prioriteres højt.

Evaluering:
Der kan evalueres ved hjælp af tests, mundtlig fremlæggelse og ved udarbejdelse af et projektarbejde inden for emnet.

Eksempler på projekter der kan anvendes i forbindelse med emnet:
Volumen af æg

5.6 Vektorfunktioner

Mål: At være i stand til at undersøge og fortolke forløbet af vektorfunktioner i én variabel, bl.a. som en bevægelse i planen.

Pædagogiske overvejelser:
Vektorfunktioner kan enten introduceres som en matematisk beskrivelse af et fysisk fænomen, f.eks. partikelbevægelse, eller som et rent matematisk begreb. Mængden af vektorfunktioner fremkommer som en udvidelse af de reelle funktioner, og en diskussion af denne beskrivelse kan give eleverne en god forståelse af fordelene ved indførelsen af vektorfunktioner og brugen af dem. Endvidere kombinerer vektorfunktioner vektorregningen og funktionsteorien. Ved at beskæftige sig med disse elementer udvikles elevens tankegangskompetence: hvordan kan de kendte begreber arbejde sammen? og hvordan kan de generaliseres?

Undervisningseksempel:

Der arbejdes med vektorfunktioner, hvor koordinatfunktionerne er af de typer, der er kendt fra kernestof og evt. det supplerende materiale f.eks.

$$\overrightarrow{r(t)} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ e^{t+1} \end{pmatrix}$$

Man kan arbejde med kurvetyper som f.eks. linjen, cirklen, ellipsen, cykloiden, kardioiden eller den logaritmiske spiral. I den forbindelse kan man inddrage bestemmelse af arealområder og kurvelængder.

Som motivation for en ”kurveundersøgelse” lader man eleverne beskrive en given graf (hvor koordinatfunktionerne i første omgang ikke er kendt).

- hvilke punkter på kurven er særlig karakteristiske?
- hvordan kan man bestemme disse punkter?
- hvilke andre ting vil det være interessant at kigge på i forbindelse med beskrivelsen?

Den omvendte opgave er også relevant. Eleverne får forskriften for en vektorfunktion, og de skal herefter bestemme det vindue grafen skal tegnes i for at anskueliggøre funktionens karakteristika.

På denne måde kommer man frem til en liste, der kunne hedde:
Bestemmelse af

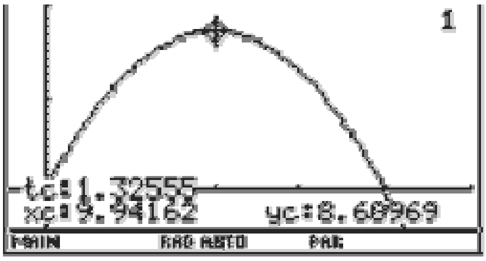
- skæringspunkter med x- og y-aksen
- punkter, hvor der er vandret eller lodret tangent
- koordinaterne til en tangentvektor og dens længde
- koordinaterne til x og y ud fra en given eller beregnet parameter t
- skæringspunkter mellem kurver for vektorfunktioner
- dobbeltpunkter.

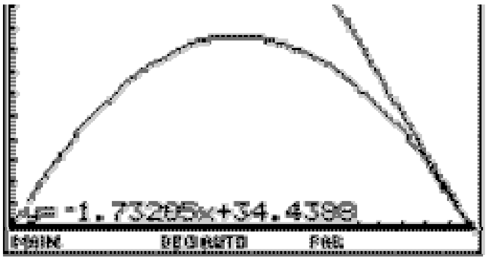
Herudover kan man beskæftige sig med kontinuitet og differentiabilitet for vektorfunktioner.

Fra fysikken inddrager man eksempler på bevægelser, som kan beskrives som vektorfunktioner. Her arbejdes med hastighedsvektor, fart og accelerationsvektor.
Et eksempel er det skrå kast, som eleven kender fra boldspil, raketaffyring etc.

$$r(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha \\ v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \end{pmatrix}$$

Efter indsættelse af værdier for konstanterne kan kurven tegnes, og man kan bestemme den maksimale højde, kastelængden, tiden før nedslag, nedslagshastighed og vinkel.





Der arbejdes også med opstilling af enkle vektorfunktioner, og her vil det være oplagt at inddrage eksempler med sammensatte bevægelser. Endelig kan man vælge at udvide emnet ved at generalisere til vektorfunktioner i rummet: hvad kan disse funktioner beskrive? Hvilke dele at vektorregningen kan overføres til praktiske anvendelser? Hvordan tolkes krydsproduktet? osv.

Evaluering:
Undervejs eller som afslutning laves et projekt.

Inspiration til en projektopgave med vektorfunktioner.

En anden udgave af samme Karrusel findes i inspirationsmaterialet nedenfor.

5.7 Supplerende stof

Mål: at støtte udviklingen af de matematiske kernekompetencer i arbejdet med at opnå de faglige mål samt at udvikle kompetencer, der knytter sig til den valgte studieretning.

Pædagogiske overvejelser:
Udvælgelsen af det supplerende stof sker i samarbejde med øvrige fag og afhænger bl.a. af den valgte studieretning. Progressionen i det supplerende stof skal afstemmes med, hvor eleverne i øvrigt befinder sig i deres faglige udvikling.

Det supplerende stof kan medtænkes i forberedelserne til studieretningsprojektet. Modelbygning er et område, der naturligt vil indgå i mange studieretningsprojekter, og derfor vil det være hensigtsmæssigt at introducere eleverne til dele af teorien om differentialligninger. I selve projektperioden kan eleverne arbejde videre med mere konkrete eller komplicerede dele af emnet, som de sætter sig ind i på egen hånd.

Undervisningseksempler:
Differentialligninger.
Ved en matematisk modellering af et dagligdags problem vil resultatet ofte være en differentialligning. Man kan derfor med fordel påbegynde dette emne ved at præsentere et talmateriale, og lade

eleven udvikle en simpel model (ligning), som kan forudsige de givne data. Som eksempler kan nævnes radioaktivt henfald, bakterievækst etc.
Med udgangspunkt i konkrete eksempler kan der f.eks. arbejdes med nogle af følgende differentialligningstyper:

$$\frac{dy}{dx} = h(x) \qquad \frac{dy}{dx} = k \cdot g(y) \qquad \frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y) \qquad \frac{dy}{dx} = y(b - a \cdot y) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = h(x)$$

En simpel model kan udvides i flere omgange ved at medtage yderligere faktorer, der gør modellen mere realistisk.
Løsningsformler udledes for nogle af ovennævnte typer, og matematikprogrammer kan inddrages til at undersøge konstanters og randbetingelsers betydning og til løsning af differentialligningerne.

Udover en analytisk løsning introduceres begrebet integralkurver samt numeriske metoder, f.eks. Eulers metode og Runge-Kutta af forskellig orden. Metodernes præcision sammenlignes.

Evaluering:
Man vil sædvanligvis arbejde med differentialligninger sammen med et andet fag, og det vil derfor være naturligt at evaluere emnet i samarbejde med dette fag. Det kan dreje sig om et flerfagligt projekt eller en mundtlig fremlæggelse af resultaterne af en modellering måske i kombination med en præsentation af den benyttede teori. Hvis eleverne har arbejdet i grupper, kan klassen på denne måde dække en større del af emnet.

Newtons afkølingslov

6 Inspirationsmateriale

Ved næste revision af vejledningen bliver dette afsnit flyttet til fagets hjemmeside på EMUen.

6.1 Rumlige figurer og vektorregning: Kheopspyramiden

Kheops pyramiden er både det ældste af de syv underværker og det eneste af dem, der eksisterer i dag. Da pyramiden blev bygget, var den det højeste bygningsværk i verden. Den stod færdig ca. 2580 f.Kr.

Den matematiske præcision er uhyre stor. Siden på pyramiden er 230,4 meter, og selvom afstandene er så store, er det lykkedes ægypterne med deres „primitive" værktøj at måle med ½ decimeters præcision, hvilket er enestående.

Diagonalen i grundfladen er 288 meter. Det svarer til at siderne på 230,4 meter.

Den har et grundareal på 5,3 ha, det svarer til 5 120x90m fodboldbaner.

Pyramiden var 146 meter høj, da den stod færdig. Men da Cairo skulle bygges manglede man sten, så pyramiderne ved Giza blev ribbet for deres flotte, blanke beklædning. Der er stadig lidt beklædning tilbage på toppen af den mindre Kefrenspyramide, mens Keopspyramiden har mistet 9 meter af sin højde.

– Bestem pyramidens totale overfladeareal.

– Bestem pyramidens rumfang.
– Bestem vinklen mellem pyramidens grundflade og en sideflade.
– Bestem vinklen mellem pyramidens grundflade og sidekant.
– Bestem vinklen mellem to sideflader.
– Etc.

Opgaven kan påbegyndes ved at lade eleven selv lave en webquest for at finde informationer om pyramiderne.
Beregn f.eks. forholdet mellem grundfladens perimeter og den dobbelte højde. Kommenter det overraskende resultat!
Endvidere kan opgaven bruges når man arbejder med vektorer i rummet. Der kan opstilles ligninger for planen (sidefladerne) og parameterfremstillinger for sidekanter. Ovennævnte vinkler og arealer findes ved hjælp af vektorregning.
Parameterfremstillingen for den nordlige ”sjæle undslippe skakt”, som fører ud af kongekammeret ca. 80 meter over jorden, bestemmes under antagelse af, at skakten ligger parallelt med højden i den sydlige sideflade.

6.2 Modellering: Bestemmelse af funktionsforskrifter.

Målet med dette projekt er todelt: opstilling af ligninger og løsning af dem samt anvendelse af CAS-værktøj til regression.

Matematisk modellering.
Du skal arbejde med følgende matematiske modeller:
Type 1: $y = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$,
Type 2: $y = \mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}$
Type 3: $y = \mathrm{a}x^\mathrm{n}$
Type 4: $y = \mathrm{ba}^x$
Type 5: $y = \mathrm{A}\sin(\omega t + \varphi)$

I det følgende præsenteres du for 6 forskellige forsøg/eksperimenter:
Forsøg 1: Matematisk pendul
Forsøg 2: Afkøling
Forsøg 3: Fjeder
Forsøg 4: Opladning og afladning af kondensator
Forsøg 5: Harmonisk svingning
Forsøg 6: Det frie fald

Du skal udføre de 6 forsøg, hvor du skal opsamle data.
Efter dataopsamlingen skal du undersøge hvilke matematiske modeller, der kan beskrive de enkelte datasæt.
Når du har fastlagt hvilken model dine data tilhører, skal du bestemme forskriften på to forskellige måder, nemlig ved opstilling af og løsning af ligninger og ved regression.
Kommenter resultaterne, matematisk og fysisk.

Forsøg 1: Matematisk pendul

På nedenstående adresse skal du finde de simulerede data til forsøgene og indføre forsøgsresultaterne i skema 1 og 2

http://monet.physik.unibas.ch/~elmer/pendulum/upend.htm

http://www.explorescience.com/activities/Activity_page.cfm?ActivityID=22

Svingningstidens afhængighed af snorlængden
Der måles hver gang på 10 svingninger (10T), og snorlængden, (L), ændres med 0.25 m pr. forsøg.

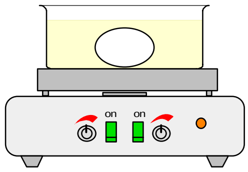
Skema 1

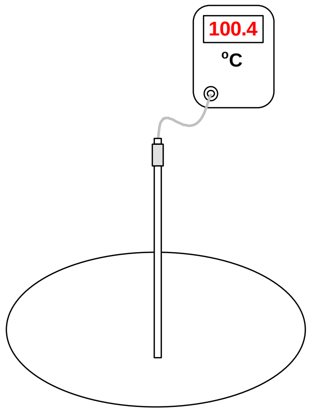
L [m]	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50
$10T$ [sek]							
T [sek]							

Svingningstidens afhængighed af loddets masse
Loddets masse varieres. Der måles på 10 svingninger i hvert forsøg med samme snorlængde (ca. 1 m)
Skema 2

Masse [kg]	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$10T$ / s						
T / s						

Forsøg 2: Afkøling
Medbring et kogt æg med skal på. Ægget bringes i en gryde med vand og der koges i ca. 10 min, så temperaturen er ens overalt i ægget. Anbring dernæst ægget på bordet og anbring en termoføler i det. Mål temperaturen T i °C for hvert minut i ca. 30 min. Noter desuden temperaturen T_{stue} i lokalet hvor forsøget udføres i.
Indfør data i skema 3.
Undersøg sammenhængen mellem $T-T_{stue}$ og tiden t





T_{stue} = ____°C

Skema 3

Tid [min]	x-akse	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
T[°C]																																
T-T_{stue}	y-akse																															

Forsøg 3: Fjeder

Fjederen ophænges i en krog. Med forskellige lodkombinationer ophængt i fjederen måles fjederens forlængelse, x . Alternativt kan man bruge newtonmetre og trække i fjederen, så kraften aflæses direkte. Ellers gælder at $F = m \cdot g$, hvor m er massen af loddet og g er tyngdeaccelerationen. Opsamlede data indføres i skema 4. (du kan også vælge at udføre det på nettet på nedenstående adresse
http://www.toender-gym.dk/mbs/fysik/ntnujava/springForce/springForce.html

Skema 4

Belastende masse, m, i kg	Tyngdens træk i m: F = m g i Newton	Fjerderkraften, F, (negativ) i Newton	Forlængelsen, x, Målt i meter

Forsøg 4: opladning og afladning af RC-kreds.

Du skal på nedenstående adresse undersøge kurven for afladning af en kondensator.

Først skal du lade appletten tegne kurven for opladning. Så flytter du den sorte kobling så den ikke oplades mere, derefter vil kondensatoren aflades gennem modstanden.
http://www.toender-gym.dk/mbs/fysik/ntnujava/rc/rc.html

Du skal indføre måldata i skema 5
Skema 5

Tid [sek]	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85
Spænding [Volt]																		

Forsøg 5: Harmonisk svingning
På nedenstående adresse undersøges den harmoniske svingning

http://www1999215.thinkquest.dk/teori/bev/harmonisk.html

Noter sammenhørende værdier af tid og position i skema 6 og lav en *x*-graf.

Skema 6

Tid [sek]										
Position [m]										

Forsøg 6: Det frie fald
I fysik lokalet udfører du det frie fald ved at ophænge et lod i timeren og lader loddet falde fra ca. 2,5 meters højde.
Anvend timer - strimlen til at finde sammenhørende værdier for tid og sted.
Indfør data i skema 7

skema 7

Tid [sek]										
Position [m]										

6.3 Reaktionshastighed

Analyse af kemiske reaktioners hastighed.

Fagligt samarbejde med: kemi.

Formål: At undersøge reaktionshastigheders afhængighed af temperatur og koncentration

Deløvelse 1: redoxreaktion

Deløvelse 2: syre/base reaktion.

Teori (del 1):
Ved tilsætning af syre til en vandig opløsning af natriumthiosulfat $Na_2S_2O_3$, vil der udfældes frit svovl:

$$\mathbf{S_2O_3^{2-} + 2\,H^+ \rightarrow S\,(s) + SO_2 + H_2O}$$

Reaktionen er ret langsom. Da frit svovl er uopløseligt i vand vil der fremkomme en opslemning af mikroskopiske svovlkrystaller i opløsningen, hvilket efter et kort tidsrum: Δt gør opløsningen uigennemsigtig. På dette tidspunkt er der ved hvert forsøg dannet den samme stofmængde svovl.

Udstyr:
100 ml bægerglas, stort reagensglas, stort bægerglas, stopur, termometer

Kemikalier:
0,10 M $Na_2S_2O_3$ (aq)
1,0 M HCl (aq)
Is, samt koldt og varmt vand

Fremgangsmåde:
Det er væsentligt for at opnå gode resultater, at de anvendte glasvarer er meget rene. På et 100 ml bægerglas tegnes med spritskriver et tydeligt sort kryds udvendigt på bunden. Reaktionen skal nu finde sted i bægerglasset, og ved hvert forsøg måles tiden fra sammenblanding af reagenserne til det tidspunkt, hvor det sorte kryds ikke længere kan ses gennem opløsningen på grund af udfældet svovl.

Undersøgelse af reaktionens temperaturafhængighed:
Der udføres 4 forsøg. Ved hvert forsøg af tappes 20,0 ml 0,10 M thiosulfatopløsning i bægerglasset med det sorte kryds og 20,0 ml 1,0 M saltsyre i et stort reagensglasglas. Bægerglasset og reagensglasset anbringes i et stort bægerglas med vand. Ved de 4 forsøg varieres vandets temperatur jævnt i intervallet ca. 5°C til ca. 50°C.
Når reagenserne i det lille bægerglas og reagensglasset har stået i det store glas i nogle minutter, hældes indholdet fra reagensglasset over i det lille bægerglas med kryds i bunden. Med stopuret bestemmes reaktionstiden, mens det lille bægerglas holdes neddyppet. Reaktionstiden Δt er den tid der går indtil der er udfældet så meget svovl at krydset ikke længere kan ses. Straks herefter måles opløsningens temperatur. Resultaterne indføres i skemaet nedenfor.

Undersøgelse af reaktionens koncentrationsafhængighed:
Der udføres i alt 8 forsøg ved stuetemperatur.
De 4 første forsøg holdes koncentrationen af natriumthiosulfat konstant og i de næste 4 forsøg holdes syrekoncentrationen konstant.
$Na_2\ S_2O_3$ overføres til det lille bægerglas med kryds i bunden. HCl og vandet blandes i et andet bægerglas. Når de to opløsninger blandes sammen startes stopuret. Reaktionstiden Δt er den tid der går indtil der er udfældet så meget svovl at krydset ikke længere kan ses, her stoppes stopuret og Δt indføres i skema 2.
De enkelte forsøgs blandingsforhold er angivet i skema 2 nedenfor:

Måleresultater:

Måleresultater indsættes i nedenstående skema:

Forsøg nr.	$Na_2S_2O_3$ V [ml]	HCl V [ml]	Temperatur [°C]	Reaktionstid Δt [sek.]	$1/\Delta t$ [sek^{-1}]
1	20	20			
2	20	20			
3	20	20			
4	20	20			

Skema 1: Undersøgelse af reaktionens temperaturafhængighed[1]

Forsøg nr.	$Na_2S_2O_3$ V [ml]	HCl V [ml]	Vand V[ml]	Reaktionstid Δt [sek.]	$1/\Delta t$ [sek^{-1}]
1	20	1	19		
2	20	5	15		
3	20	10	10		
4	20	15	5		
5	15	15	15		
6	20	15	10		
7	25	15	5		
8	30	15	0		

Skema 2: Undersøgelse af reaktionens koncentrationsafhængighed $v=k\cdot[S_2O_3^{2-}]^x\cdot[H^+]^y$

Resultatbehandling
1. Hvorfor er svovl uopløseligt i vand?
2. Forklar kort hvorfor reaktionen mellem thiosulfat og syre kaldes en redoxreaktion.
3. På baggrund af resultaterne skema 1 ønskes optegnet en graf der beskriver hastigheden (udtrykt ved $1/\Delta t$) som funktion af temperaturen. Kommenter grafens udseende kemisk og matematisk.
4. Optegn herefter dataene fra skema 1 på følgende måde: logaritmen til hastigheden ($1/\Delta t$) som funktion af $1/T$ og kommenter grafens udseende (Jvf. fodnote).
5. Bestem Ea og forklar hvad Ea (aktiveringsenergien) er for en størrelse.
6. Plot reaktionshastigheden $1/\Delta t$ som funktion af koncentrationen af $[S_2O_3^{2-}]$ og kommenter grafens udseende matematisk.
7. Plot reaktionshastigheden $1/\Delta t$ som funktion af koncentrationen af $[H^+]$ og kommenter grafens udseende matematisk.

I deløvelse 2 skal du følge dannelsen af carbondioxid ved reaktionen imellem granuleret marmor og saltsyre.

Teori (del 2)
Reaktionen nedenfor er en syre-basereaktion og reaktionsskemaet for reaktionen ser således ud:

$CaCO_3(s) + 2\ HCl(aq) \rightarrow\ CO_2(g) + CaCl_2(aq) + H_2O(l)$

[1] Hastighedens temperaturafhængihed kan matematisk skrives $1/\Delta = K\cdot e^{(-Ea/RT)}$ hvor R= 8,31j/mol·K og Ea er aktiveringsenergien og T er temperaturen i Kelvin

Udstyr**:** Bægerglas 100 ml, urglas, vægt, stopur

Kemikalier**:** 1M HCl , $CaCO_3$ (s)

Fremgangsmåde:
For at undersøge forløbet af reaktionen måles masseændringen (Δm) af blandingen som funktion af tiden. Alternativt kan man vælge at måle volumen af den udviklede gas som funktion af tiden.
På en vægt anbringes et 250 mL bægerglas.
I bægerglasset anbringes 50 mL saltsyre (1M)
Der afvejes 2,0 g granuleret marmor på et urglas
Det hele anbringes på vægtskålen og vægten tareres.
Nu hældes marmor ned i bægerglasset samtidig med at du starter et ur.
Aflæs nu sammenhørende værdier af massen og tiden.
Når massen ikke længere ændrer sig nævneværdigt stoppes forsøget.
Du må selv vælge passende aflæsningsintervaller eller anvende de fortrykte i skemaet nedenfor.

Måleresultater

Tid [sek]	Masse [g]	C_{HCl} beregnet [mol/l]	Tid [sek]	Masse [g]	C_{HCl} beregnet [mol/l]
0					
10					
20					
30					
60					
90					
120					
150					
180					
210					
240					

Resultatbehandling.
1. Forklar hvorfor reaktionen kaldes en syre/base reaktion.
2. På baggrund af forsøgsdataene og reaktionsskemaet beregnes koncentrationen af HCl til de forskellige tidspunkter anført i skemaet ovenfor.
3. Lav en grafisk afbildning af koncentrationen af HCl som funktion af tiden. Plot (t, C)
4. Bestem hastigheden for omdannelsen til tiderne: 10 sek., 60 sek. 150 sek. og 240 sek.

Tid [s]	Koncentration [mol/l]	Hastighed [mol/l / s]
10		
60		
150		
240		

5. Lav et plot af hastigheden som funktion af koncentrationen og angiv en funktionsforskrift (angiv funktionstypen.)
6. Giv en kort forklaring på hvorfor hastigheden afhænger af koncentrationen

6.4 Differentialregning: Hæmmet vækst

Fagligt samarbejde med: biologi.

Vi skal se på funktionen $f(x) = \dfrac{\frac{b}{a}}{1 + c \cdot e^{-b \cdot x}}$ for $a > 0$ og $b > 0$

1. Vis at f er voksende for alle x når $c > 0$.
2. Find asymptoterne for f, når $a = 3{,}6 \cdot 10^{-5}$, $b = 0{,}03$ og $c = 9875$.
3. Hvad er det generelle udtryk for asymptoterne for denne funktion?
4. Tegn grafen for f, når $a = 3{,}6 \cdot 10^{-5}$, $b = 0{,}03$ og $c = 9875$.

For eksponentialfunktioner $g(x) = b \cdot e^{k \cdot x}$ er den relative vækst $g'(x)/g(x)$ konstant.

5. Vis det!
6. Tegn $f'(x)/f(x)$ og sammenlign dette udtryk med udtrykket $b - a \cdot f(x)$.
7. Tegn $f'(x)/f(x)$ som funktion af $f(x)$ når $a = 3{,}6 \cdot 10^{-5}$, $b = 0{,}03$ og $c = 9875$ ved at tegne vektorfunktionen $\vec{r}(t) = (f(t), f'(t)/f(t))$.
8. Prøv at formulere med ord, hvad grafen viser. (Når $f(t)$ bliver større vil …)

I et forsøg er et stort antal majskimplanters gennemsnitsvægt blevet målt hver 14.dag, x angiver altså et ugenummer (tid) og $n(x)$ en vægt:

x	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$n(x)$	4	10	30	81	203	432	680	837	904	938
$n'(x) = \dfrac{n(x+h) - n(x-h)}{2h}$	-	6,5	17,75	43,25	87,75	119,25	101,25	56	25,25	-

9. Tegn gennemsnitsvægten som funktion af tiden. Det skulle gerne give samme S-kurve som $f(x)$.

10. Prøv nu at beregne $n'(x)/n(x)$ og dernæst at tegne $\vec{r}(x) = (n(x), n'(x)/n(x))$. Bestem *a* og *b* ud fra denne graf, og find dernæst *c*, så funktionen *f* beskriver dataene.

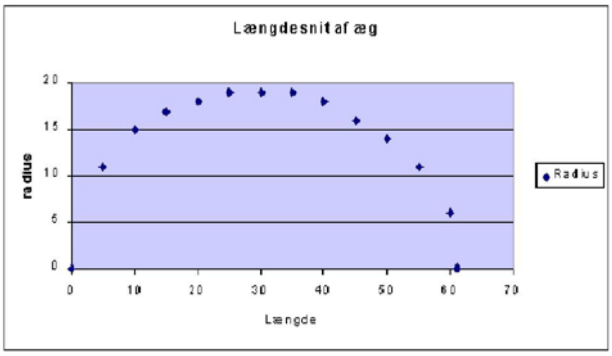
Opgaven kan med fordel åbnes ved at lade elever selv samle data op på vækstforsøg, og finde ud af om denne model passer. Matematisk kan opgaven også drejes over i løsning af differentialligninger.

6.5 Integralregning: Volumen af æg

Lad os sige, at den danske æggeindustri har ønsker at udvikle en metode til nemt at bestemme volumenet af hønseæg ud fra en enkelt måling af æggets længde eller tykkelse.

Volumenet af et hønseæg ønskes beregnet ved hjælp af teorien om omdrejningslegemer. Opgaveløsningen skal indeholde følgende elementer:

a. Optegning af længdesnittet af et æg, eksempelvis som på denne figur. Brug en skydelære til opmåling af diameteren i et givet tværsnit, eller find en anden metode evt. ved hjælp af skyggebillede. Vær opmærksom på forvrængning. Og vær opmærksom på ved grafisk afbildning, at akserne skal være ækvidistante.



b. Opskrivning af stykkevis funktionsudtryk, der beskriver det pågældende længdesnit. Inddel grafen i passende afsnit og brug funktionsudtryk fra cirkler, ellipser, parabler eller rette linier. Brug evt. regressionsværktøjer.
c. Analytisk udregning af volumenet af det samlede omdrejningslegeme. (Analytisk betyder, at man ikke bare sætter CAS-værktøjet (graflommeregneren) til at udregne bestemte integraler!).
d. Kontrol af resultatet ved andre metoder, eksempelvis væskefortrængning.
e. Opstilling af en tabel eller et funktionsudtryk, der til en given længde (eller tykkelse) af et vilkårligt æg giver æggets volumen. Reducer udtrykket til at være af formen $V = k \cdot l^3$ (eller $V = k \cdot t^3$), hvor *V* står for volumen og *l* for længden (*t* for tykkelse) og *k* er en proportionalitetskonstant. Vurder ud fra målinger på eks. 10 forskellige æg om formlen passer, og giv forklaringer på hvorfor den eventuelt ikke gør.

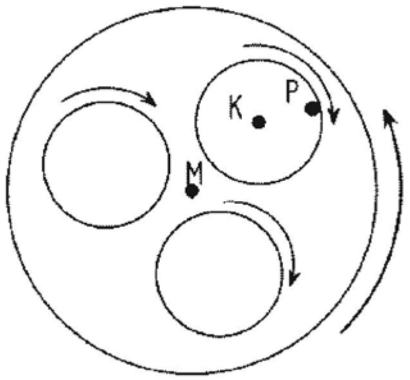
Projektopgaven kan udvides til også at omfatte arbejdet med design af et æggebæger.

6.6 Vektorfunktioner: Karrusel – eventuelt i samarbejde med fysik

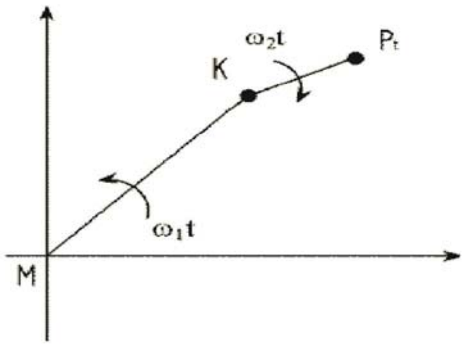
Fagligt samarbejde med: fysik.

I mange forlystelsesparker kan man få en karruseltur i 'Tekopper'.

Karrusellen består af en cirkelformet plade, der kan dreje omkring centrum. På pladen er der anbragt 3 mindre roterende karruseller. Hver af de små karruseller er indrettet som en tekop til 3 personer.



Projektopgaven går ud på at beskrive den bevægelse som en person placeret i en af kopperne foretager under karruselturen. Nedenfor ses det hele lagt ind i et koordinatsystem. Vi ser personen P's position P_t til tiden t sekunder.



Den store plade drejer om punktet M og tekoppen drejer om punktet K. Pladen roterer mod uret mens tekopperne roterer med uret.
Man skal nu fastlægge vinkelhastigheder og radier for pladen og tekopperne, således at turen i en tekop bliver tilfredsstillende.
Opgaven er altså at fastlægge og beskrive denne karruseltur mht. tid, sted, hastighed, acceleration, kraftpåvirkninger osv.
Hvis man undervejs ønsker at bestemme længden af kurven, som personen i tekoppen følger, kan det gøres ved hjælp af nedenstående formel:

$$s=\int_a^b \sqrt{\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)}dt$$

(Vektorfunktionen skal være differentiabel i intervallet]a;b[).
I projektopgaven er der også mulighed for at eksperimentere med vinkelhastighederne. Grafregneren vil hurtigt give forløbet af kurverne, og eleven kan med denne baggrund analysere, vurdere og kommentere resultaterne.

Projektopgaven kan efterfølgendes udvides ved at lade eleven designe andre forlystelser. Opgaven kunne lyde:
I skal selv anlægge en forlystelse (rutschebane, boldkast etc.) og beskrive denne ved hjælp af en vektorfunktion. Brug jeres fantasi samt grafregnerens faciliteter til at eksperimentere med forskellige funktionsudtryk. Vær opmærksom på at vektorfunktionsbegrebet kan udvides til tre dimensioner ved at tilføje en z-koordinatfunktion.

6.7 Differentialligninger (supplerende stof):

Temperaturforsøg, Newtons afkølingslov

Fagligt samarbejde med: fysik.

Data fra et afkølingsforsøg kan ses på vedlagte side. Forsøget blev foretaget således:

- 1,5 liter vand koges i en elkedel
- Halvdelen af vandet hældes i en glaskande og den anden halvdel i en termokande
- Temperaturen af vandet i glaskanden T_g og i termokanden T_t måles hvert minut, indtil der er forløbet 15 minutter
- Herefter måles T_g og T_t i hvert minut, indtil der er gået 2 timer

Den omgivende temperatur T_o måles under hele forsøget.

Ifølge Newtons afkølingslov er legemets temperaturændring ΔT i løbet at det lille tidsrum Δt proportional med såvel tidsrummet som med forskellen mellem legemets temperatur og omgivelsestemperaturen.

1. Formuler Newtons hypotese matematisk og undersøg, eksempelvis ved hjælp af regneark (som antydet på vedlagte side), om der er hold i den: Se om der er en sammenhæng mellem afkølingen pr. tidsenhed (dT/dt) og forskellen mellem temperaturen indeni kanderne og udenfor kanderne (T-T_o). Find den påståede proportionalitetskonstant k, ved hjælp af regnearkets regressionsværktøj.
2. Opstil og løs den differentielligning, der beskriver legemets temperatur som funktion af tiden.
3. Find den løsningskurve, der passer til forsøgsresultaterne. Det vil sige du skal finde regneforskriften for T_g *model* samt T_t *model* samt udfylde cellerne i det vedlagte bilag.
4. Hvordan passer forsøgsresultaterne til løsningskurven? Lav grafiske afbildninger.
5. Hvor lang tid vil det tage, før temperaturen er faldet til 1 °C over den omgivende temperatur?

6. Bestem grænseværdien af *T(t)* for $t \to \infty$.

Det er måske en ide at aflægge et besøg på hjemmesiden http://www.aw-bc.com/ide/index.html .
Fra hovedsiden klikkes ind under ”First Order Differential Equations” og i ”laboratorium 1” kan man arbejde med løsningskurver for det pågældende forsøg.
I stedet for at arbejde med de vedlagte data, kan man selv lave dataopsamling på forsøg man selv laver. Find en opskrift på et franskbrød eller en lækker kage og find afkølingskurven efter endt bagning!
Man kan også bruge afkølingskurver og de dertil hørende afkølingskonstanter til at karakterisere forskellige stoffers varmeisolerende egenskaber.

Bilag til ”Temperaturforsøg, Newtons afkølingslov”

Bemærk: De første 4 kolonner gengiver måledata. Der gemmer sig regneforskrifter bagved de resterende kolonner. Find ud af hvorledes disse virker!

Temperaturforsøg

t, min.	*Tg*	*Tt*	*T o*	*Tg-To*	*Tt-To*	*dTg*	*dTt*	*dt*	*dTg/dt*	*dTt/dt*	*Tg model*	*Tt model*
0	77,4	83,3	21	56,4	62,3						77,4	83,3
1	76,9	83,1				2,6	0,5	2	1,3	0,25		
2	74,8	82,8										
3	73,8	82,2										
4	73,2	82										
5	72,3	81,4										
6	71,5	81										
7	70,2	80,1										
8	69,6	80										
9	68,7	79,6										
10	67,7	79										
11	66,6	78,8										
12	65,9	78,2										
13	65	78										
14	64,4	77,6										
15	63,6	77,1										
30	54,5	72,7										
45	47,9	68,9										
60	42,9	65,7										
75	39,1	63										
90	36,1	60,8										
105	33,8	58,5										
120	31,5	57										

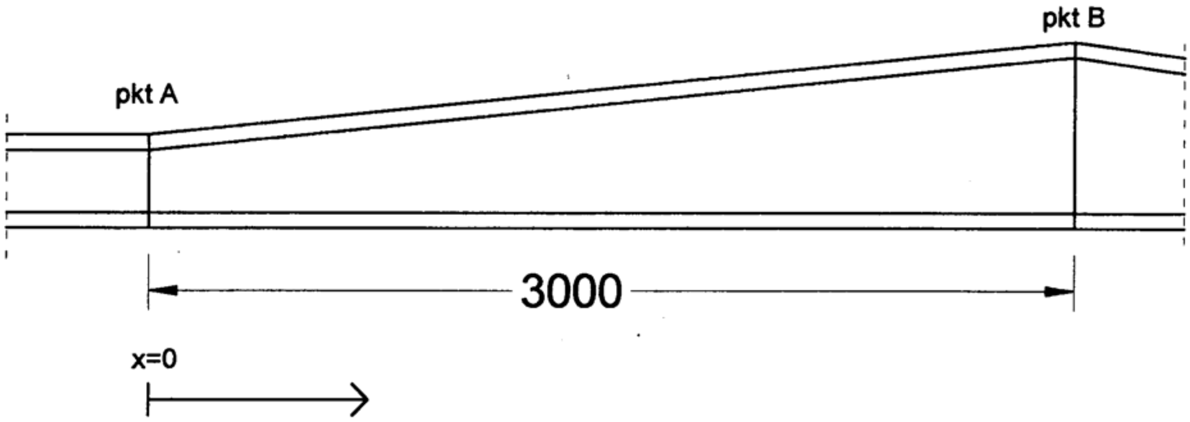
6.8 Inerti- og modstandsmoment, numeriske metoder og differentialregning

Bærende bjælke til en tagkonstruktion

Fagligt samarbejde med: fysik, matematik og statik.

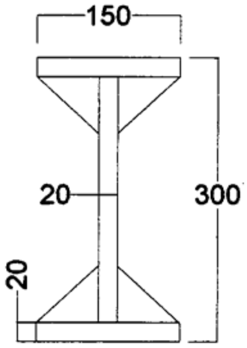
Ved belysning af baggrunden for momentfunktionen i opgaven, kan opgaven udbygges med kraft-beregninger, hvorved matematiske emner som f.eks. vektorer også kan inddrages.

På figuren er vist et bjælkestykke fra punkt *A* til punkt *B*, der indgår i et større bjælkesystem (riste-værk), som udgør tagkonstruktionen til en fabrikshal.
$x = 0$ svarer til punkt *A* og $x = 3000$ svarer til punkt *B*.
Alle mål er i millimeter.

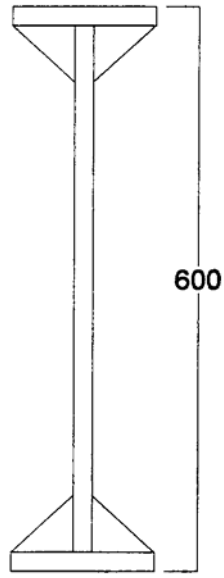


Bjælken er belastet af kræfter, der påvirker bjælkestykket med momentet:

$$M(x) = -10x^2 + 60000x + 90000000 \,[\text{Nmm}]$$



Tværsnit ved pkt A



Tværsnit ved pkt B

– Redegør for tyngdepunktsaksernes beliggenhed i f.eks. tværsnittet i punkt *A* eller tværsnittet i punkt *B*.
– Bestem inertimomentet m.h.t. den vandrette tyngdepunktsakse for x=0, x=1500 og x=3000.

Spændingen $\sigma(x)$ angivet i N/mm^2 kan i et vilkårligt tværsnit mellem punkt A og punkt B findes som: $\sigma(x) = \dfrac{M(x)}{W(x)}$ hvor modstandsmomentet $W(x)$ kan findes ved $W(x) = \dfrac{2 \cdot I(x)}{h_x}$.
Her angiver h_x højden af tværsnittet i afstanden x fra punkt A.
Spændingen $\sigma(x)$ skal et vilkårligt sted på bjælken være mindre end 95 N/mm^2.

– Find spændingen for de i foregående spørgsmål nævnte x-værdier.
– Vurdér om spændingen i et vilkårligt tværsnit på bjælkestykket ligger over den tilladelige værdi.

6.9 Oversigt over projekter fra IT-forsøget i mat B 2001-06 samt prøverne i 2007 og 2008

Typeopgave 1 2000:
Emne 1: Gågadeoverdækning
Emne 2: Rutschebane

Typeopgave 2 2001:
Emne 1: Tilbygning
Emne 2: Regnvandsbassin

Eksamen 2001:
Emne 1: Vægdrejekran
Emne 2: Vandkar

Eksamen 2002:
Emne 1: Billund lufthavn
Emne 2: Vejgennemføring

Eksamen 2003:
Emne 1: Brokonstruktion
Emne 2: Design af havegrill

Eksamen 2004:
Emne 1: Solenergi
Emne 2: Design af bænk

Eksamen 2005:
Emne 1: Legeredskaber
Emne 2: Design, emballage og logistik

Eksamen 2006:

Emne 1: Musikfestival
Emne 2: Betonkonstruktioner

Eksamen 2007:

Alssundbroen med tilkørselsveje
Design af cykel