01 – Notat om Tal og Mængder

Matematik

Notat

01 - Tal & mængder

Af:

Cand. Polyt.

Michel Mandix

Sidste revision: august 2021

Indholdsfortegnelse:

Tal

Hvad er tal? Tal er et kunstigt og abstrakt værktøj, som bruges til at angive en bestemt mængde.

Tal er kunstige, fordi de er menneskeskabte! De er abstrakte, fordi man har valgt en løsning, hvor man bygger diverse optællinger på 10 cifre: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 & 9. Der er nok ingen tvivl om, at man har valgt at bruge 10 cifre, fordi det passer med antallet af fingre, så man nemmere kan tælle og regne uden at bruge eksterne hjælpemidler. Man kunne vel i virkeligheden lige så godt have valgt at benytte et system, hvor man benytter 2, 8, 16 eller 60. (Netop disse tal nævnes, da man rent faktisk visse steder benytter (eller har benyttet) positionstalsystemer, som bygger på 2, 8, 16 eller 60 cifre – udover de normale 10 cifre.)

Taltyper

Man skelner mellem de naturlige tal, heltal, brøker (rationale tal), irrationale tal, reelle tal, imaginære tal og komplekse tal.

De naturlige tal

De naturlige tal beskrives vha. en mængde, som man normalt angiver som $\mathbb{N}$. Det er de tal, som man kan tælle til, dvs.: 1, 2, 3, 4…
I de tidligste tider hvor mennesker har kunnet kommunikere, har man udelukkende benyttet denne taltype, da aritmetik (regningsarter, dvs. addition, multiplikation etc.) ikke har været anvendt. Det har f.eks. været væsentligt, at man kunne angive, hvor mange geder, som man havde i en indhegning etc.
Da tallet 0, er et relativt moderne fænomen, har man ikke haft **0** geder, man har haft **ingen** geder.
Den første brug af ”0” i et positionstalsystem som er kendt, er fra ca. år 1000 f.Kr.
Vælger man at inkludere tallet 0 blandt de naturlige tal, skrives denne mængde, altså mængden af alle tal man kan tælle til SAMT NUL, som $\mathbb{N}_0$.

Heltal

På et tidspunkt i historien har man formentlig manglet en ged! Der har altså været underskud i antallet af geder, og nogen har fundet på at udvide mængden af de naturlige tal (inklusive 0) med de negative tal, altså: -1, -2, -3…
Mængden af heltal skrives som $\mathbb{Z}$.

Brøker

Igen har behovet for nye tal eskaleret. To bønder har haft to geder sammen. Man kan også sige, at hvis makkerskabet ophæves, så har de hver en ged. Men hvis de to geder nu er en han og en hun, så er der chance for, at der en dag er tre geder. (Lige netop dén type matematik, må være op til læserens fantasi… Spørg evt. en biologilærer) Hvis de to bønder nu går hver til sit, har de altså halvanden (én plus en halv) ged hver, men det kan ikke skrives vha. heltal. Det kræver en division, som ender med et resultat, som ikke er et helt tal. Eller med andre ord – det er en brøk.
Brøker siges at være en del af det rationale tallegeme. Endelige decimaltal er også en del af det rationale tallegeme.
Mængden af rationale tal skrives som $\mathbb{Q}$.

Irrationelle tal

Nu kan der ikke længere hentes eksempler fra oldtidens bønder. Hvis man udelukkende benytter de fire elementære regnearter: addition (plus), subtraktion (minus), multiplikation (gange) og division (dele), er der heller ikke behov for andre taltyper end dem, som allerede er beskrevet.
I nyere tid (dvs. i de seneste 4500 år), er der dog opstået et behov for en anden type tal. F.eks. π (pi). π kendes i dag vha. kraftige computere med over 1.241.100.000.000 decimaler. I virkeligheden er der dog uendeligt mange decimaler, og tallet kan derved ikke skrives som en brøk!
Dette er blot et enkelt eksempel på et tal, som ikke kan skrives hverken som et helt tal eller som en brøk. Inddrages også potensregning og regning med f.eks. kvadratrødder, viser det sig, at der er rigtig mange (uendeligt mange) af den slags tal. Her er det også vigtigt at huske, at begreberne ∞ (uendeligt) og $-\infty$ (minus uendeligt) også indgår i kategorien reelle tal.

Reelle tal

De reelle tal er foreningsmængden af alle brøker og alle irrationelle tal. Eller med andre ord – alle tal, som ikke kan skrives som et heltal.
Den samlede mængde af reelle tal skrives som $\mathbb{R}$.
I den daglige matematik, vil man også sige, at $\mathbb{R}$ også indeholder heltal, således at man som oftest betragter $\mathbb{R}$ som ”alle (normale) tal”.
Vil man specificere, at der er tale udelukkende om positive reelle tal, skrives $\mathbb{R}_+$.
Alle positive reelle tal samt 0, skrives $\mathbb{R}_0$.

Imaginære tal

Nu kunne man tro, at der ikke var behov for yderligere talkategorier. Det viser sig dog at være en fejlagtig antagelse. Man kan løse f.eks. en andengradsligning og finde ud af, at den ikke har nogen løsning. Det er dog kun, hvis man tilgår problemet uden at kende til de imaginære tal.
Grunden til at en andengradsligning ikke har nogen umiddelbare rødder er, at diskriminanten er negativ! Da det ikke (umiddelbart) er muligt at uddrage kvadratroden af et negativt tal (hvilket er nødvendigt, hvis ligningen løses vha. standardformlen), kan udregningen ikke lade sig gøre, og det viser sig, at der ikke er nogen reelle rødder til andengradsligningen.
Med de imaginære tal, vil det være muligt at udregne kvadratroden og få et brugbart resultat.
Imaginære tal tilhører mængden $\mathbb{C}$ (Complex numbers)

Komplekse tal

Et komplekst tal er et tal, som indeholder både en imaginær del og en reel del.

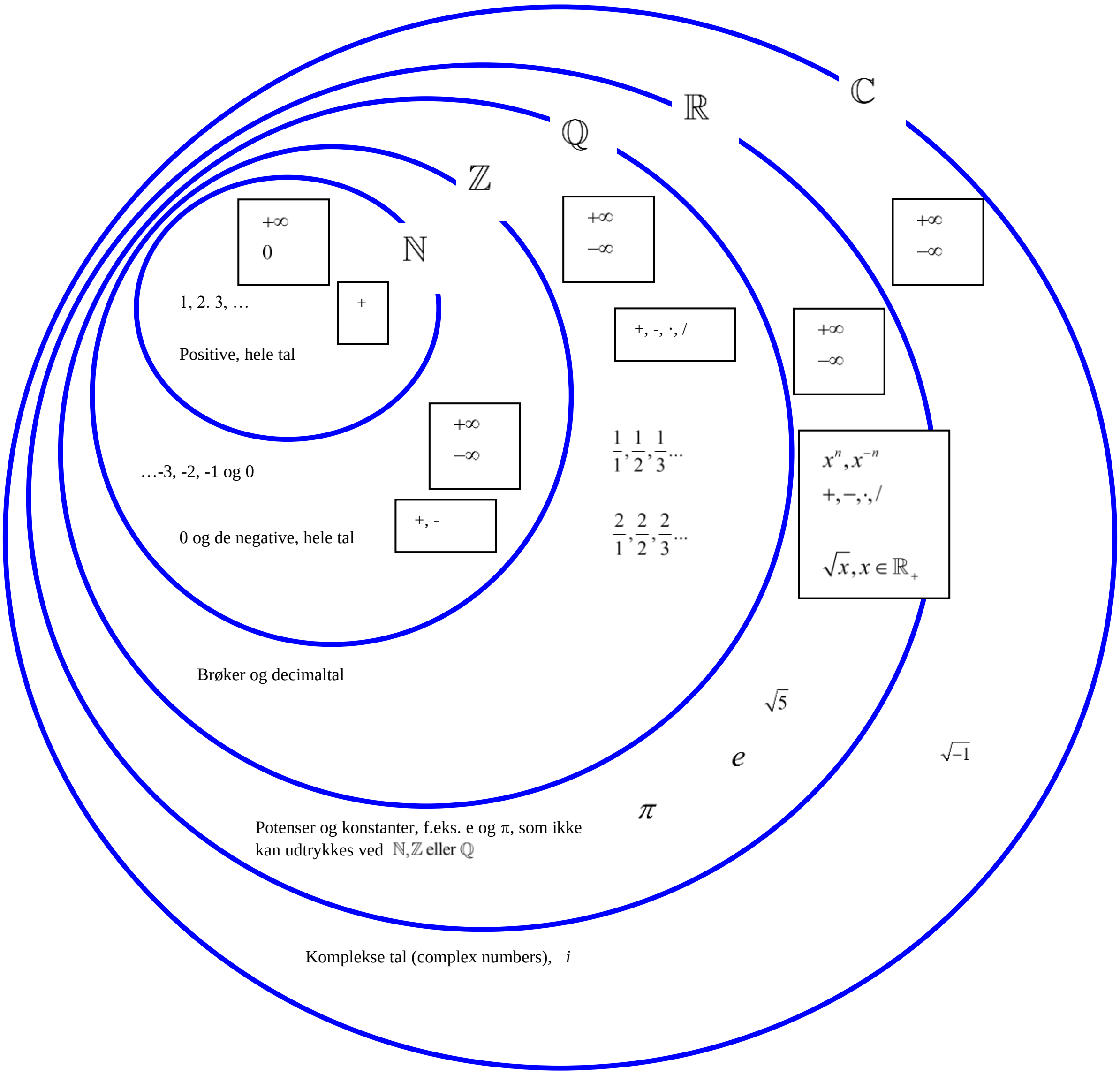
De imaginære og komplekse tal er IKKE en del af kernestoffet på HTX, og beskrives ikke yderligere her.

Taltyperne som mængder

Betragter man taltyperne som mængder, kan man sige at f.eks. de naturlige tal er en ægte delmængde af de reelle tal. Faktisk er alle taltyperne delmængder af de mere inkluderende taltyper.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Eller vist grafisk:



Positionstalsystemer

I vores dagligdag (med det talsystem der bruges normalt) er der 10 forskellige cifre at arbejde med. Det er tallene et (1) til ni (9) og så nul (0).
Men det betyder heldigvis ikke, at der kun kan tælles til 9. Det er her, at positionstalsystemet kommer ind i billedet.

Når man læser en tekst, læser man (i Danmark) fra venstre mod højre. Skal man derimod læse et tal, så læses det (muligvis ubevidst) fra højre mod venstre. Hvorfor? Fordi et positionstalsystem fungerer som følger herunder. Formentlig er det også her værd at bemærke, at man overalt i verden primært benytter de "arabiske tal". Det vil altså sige, at talsystemet oprinder fra den arabiske kultur, hvor man jo som bekendt læser fra højre mod venstre. Dette er dog udokumenteret, men en rimelig antagelse.

Tæller (skriver) man fra 0 til 9 skriver man bare tallet. Skal man derimod skrive tallet ti (10), skal der bruges to cifre.

I tallet 10, er cifret til højre lig med antallet af enere. Cifret til venstre er så antallet af tiere. Således er 10 = 0 enere + 1 tier. Tallet 27 er lig med 7 enere og 2 tiere.

Sådan kan man fortsætte til 99, men tæller man videre, skal der bruges tre cifre. Enere og tiere stadigvæk, men nu også hundreder. Bemærk at 100 er lig med $10 \cdot 10$ – altså ti tiere – ligesom en tier var lig med $10 \cdot 1$ dvs. 10 enere…

Når man når op på tal, som er 1.000 eller større, inddeler man ofte tallene i grupper – både notationsmæssigt og sprogligt. Dette ses – som antydet – ofte, når man skriver tallene. Man kan sætte et punktum for hver tre cifre, så tallet bliver nemmere at læse. (Matematisk set ikke et krav, men i mange økonomiske fag, er det en obligatorisk skrivemåde. I matematikopgaver, ses det helst, at man IKKE benytter tusindtalsseperatorer.)
De tre tal længst mod højre er enere, tiere og hundreder. De næste tre tal er tusinder. Så i stedet for at hitte på nye begreber tæller man forfra, men ganger med tallet 1000, som så også er lig med $10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$. Og så fremdeles. Se også afsnittet om store tal, for at navngive de større tal.

Tallet 45.671.325 bruges som eksempel:

45.671.325

<table>
<tr><td colspan="3">Antal millioner
(1.000.000 = 10^6)</td><td rowspan="5">Tusindtals seperator
(Kan udelades)</td><td colspan="3">Antal tusinder
(1.000 = 10^3)</td><td rowspan="5">Tusindtals seperator
(Kan udelades)</td><td colspan="3">Under tusind
(1 = 10^0)</td></tr>
<tr><td>Hundreder</td><td>Tiere</td><td>Enere</td><td>Hundreder</td><td>Tiere</td><td>Enere</td><td>Hundreder</td><td>Tiere</td><td>Enere</td></tr>
<tr><td>0</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="3">45</td><td colspan="3">671</td><td colspan="3">325</td></tr>
<tr><td colspan="3">$45 \cdot 1.000.000 = 45.000.000$</td><td colspan="3">$671 \cdot 1.000 = 671.000$</td><td colspan="3">$325 \cdot 1 = 325$</td></tr>
<tr><td colspan="11">Altså kan tallet opfattes som: 45.000.000 plus 671.000 plus 325

Så tallet skrives (og udtales) som:
45 millioner 671 tusinde og 325
45.671.325</td></tr>
</table>

Store og små tal

Bliver tallene større end en million, skal man være helt klar over de muligheder, som eksisterer:

1. Man kan naturligvis skrive tallet med en masse nuller bagefter, men det er både pladskrævende og svært at overskue, så det anbefales ikke.
2. Allerede efter tusind (1000) har talgrupperne (hver gruppe svarer til den forgående gruppe ganget med 1000), forskellige navne, som man kan skrive. F.eks. er 1000 millioner lig med en milliard. 1000 milliarder er en billion etc.
   Pas på !!! Som angivet i følgende tabel, kan disse udtryk skifte navn, efter hvilken verdensdel man er i. Vær især på vagt over for skrevne materialer. Kommer de f.eks. fra U.S.A. kan tallenes navne være anledning til store misforståelser.
3. Man kan skrive et tal, og så multiplicere det med en faktor, som er givet ved tallet 10 opløftet i en potens. Typisk vil denne potens være en faktor 3, da tusind svarer til $10 \cdot 10 \cdot 10$ – altså 10^3. F.eks. er tallet en million lig med $1 \cdot 10^6$.
   En million, som er lig med 10^6, kan også skrives 1E6, hvilket ofte benyttes i computerprogrammer, avancerede lommeregnere etc.

På tabelform, kan store tal skrives som følger:

Tal	Tier potens	Engineering notation	Dansk skrivemåde	US skrivemåde	SI-symbol	SI-præfiks
1	10^0	$1 \cdot 10^0$	En/et	One		
10	10^1	$10 \cdot 10^0$	Ti	Ten	da	deka- græsk δέκα, *deka, ti* (1795)
100	10^2	$100 \cdot 10^0$	Hundrede	Hundred	h	hekto- græsk ἑκατόν, *hekaton, hundrede* (1795)
1000	10^3	$1 \cdot 10^3$	Tusind	Thousand	k	kilo- græsk χίλιοι, *khilioi, tusind* (1795)
10000	10^4	$10 \cdot 10^3$	Titusind	Ten Thousand		(myria)
1000000	10^6	$1 \cdot 10^6$	Million	Million	M	mega- græsk μέγας, *megas, stort* (1873)
1000000000	10^9	$1 \cdot 10^9$	Milliard	Billion	G	giga- græsk γίγας, *gigas, kæmpe* (1960)
1000000000000	10^{12}	$1 \cdot 10^{12}$	Billion	Trillion	T	tera- græsk τέρας, *teras, monster* (1960)
1000000000000000	10^{15}	$1 \cdot 10^{15}$	Billiard	Quadrillion	P	peta- græsk πέντε, *pente, fem* for 1000^5 (1975)
1000000000000000000	10^{18}	$1 \cdot 10^{18}$	Trillion	Quintillion	E	exa- græsk ἕξ, *hex, seks* for 1000^6 (1975)
Etc …	10^{21}	Etc …	Trilliard	Sextillion	Z	zetta- græsk bogstav ζ, *zeta*, i oldgr. ζῆτα, *sept, syv* for 1000^7 (1991)
	10^{24}		Kvadrillion	Septillion	Y	yotta- græsk ὀκτώ, *okto, otte* for 1000^8 (1991)
	10^{27}		Kvadrilliard	Octillion		
	10^{30}		Kvintillion	Nonillion		
	10^{33}		Kvintilliard	Decillion		
	10^{36}		Sekstillion	Undecillion		
	10^{39}		Sekstilliard	Duodecillion		
	10^{42}		Septillion	Tredecillion		
	10^{45}		Septilliard	Quattuordecillion		
	10^{48}		Oktillion	Quindecillion		
	10^{51}		Oktilliard	Sexdecillion		
	10^{54}		Nonillion	Septendecillion		
	10^{57}		Nonilliard	Octodecillion		
	10^{60}		Decillion	Novendecillion		
	10^{63}		Decilliard	Vigintillion		
	10^{66}		Undecillion	Unvigintillion		
	10^{69}		Undecilliard	Duovigintillion		
	10^{100}		Googol	Googol		

… og der er mange, mange flere endnu, men de beskrives ikke her.

Bemærk, at langt de fleste af de store tal hedder noget forskelligt på dansk og på amerikansk. De to sprogkulturer har simpelthen valgt at tolke de latinske præfikser på to forskellige måder.

Fra og med bi… (to) betegner det latinske ord for et heltal *n* med endelsen "-llion" således 10^{6n} på dansk og 10^{3n+3} på amerikansk. Med endelsen "-lliard" betegner det på dansk 10^{6n+3}, mens denne endelse ikke anvendes på amerikansk.

På amerikansk benytter man snarere et system, som kunne synes at bygge på det italienske talsystem (Italiensk tilhører jo også den romanske sprogstamme, som primært bygger på latin.) Det kan være nemmere at regne sig frem til de store tal på amerikansk, end med det danske (europæiske) system, hvis man kan tælle til tyve på italiensk.

De danske talord anvendes tilsvarende på de fleste kontinentale europæiske sprog, og traditionelt også i Storbritannien. I moderne tid er Storbritannien imidlertid gået over til de amerikanske talord.

For små tal – dvs. tal mindre end én findes lignende:

Tal	**Tier potens**	**Dansk skrivemåde**	**US skrivemåde**	**SI-Symbol**	**SI-præfiks**
1	10^{0}	En	One		
$\frac{1}{10}$ 0,1	10^{-1}	En tiendedel	Tenth	d	deci- latin *decimus, tiende* (1795)
$\frac{1}{100}$ 0,01	10^{-2}	En hundrededel	Hundreth	c	centi- latin *centum, hundrede* (1795)
$\frac{1}{1000}$ 0,001	10^{-3}	En tusindedel	Thousandth	m	milli- latin *mille, tusind* (1795)
$\frac{1}{10000}$ 0,0001	10^{-4}	En titusindedel	Ten-thousandth		
$\frac{1}{100000}$ 0,00001	10^{-5}	En hundredetusinddel	Hundred-thousandth		
$\frac{1}{1000000}$ 0,000001	10^{-6}	En milliontedel	Millionth	μ	mikro- græsk μικρός, *mikros, småt* (1960)
$\frac{1}{1000000000}$ 0,000000001	10^{-9}	En milliardendedel	Billionth	n	nano- græsk νάνος, *nanos, dværg* (1960)
$\frac{1}{1000000000000}$ 0,000000000001	10^{-12}	En billiontedel	Trillionth	p	pico- italiensk *piccolo, småt* (1960)
Etc…	10^{-15}	En billiardendedel	Quadrillionth	f	femto- dansk *femten* for 10^{-15} (1964)
	10^{-18}	En trilliontedel	Quintillionth	a	atto- dansk *atten* for 10^{-18} (1964)
	10^{-21}	En trilliardendedel	Sextillionth	z	zepto- latin *septem, syv* for 1000^{-7} (1991)
	10^{-24}	En kvadrilliondedel	Septillionth	y	yokto- græsk ὀκτώ, *okto, otte* for 1000^{-8} (1991)
	10^{-27}	En kvadrilliardendedel	Octillionth		
	10^{-30}	En kvintilliontedel	Nonillionth		
	Etc …	Etc…			

Dette angiver de "reciprokke" værdier. En reciprok værdi (eller det multiplikative inverse) af et tal, *x*, den værdi som multipliceret med *x* giver 1. F.eks. er den reciprokke værdi af 2 lig med ½, da 2·½ = 1. Dette gælder naturligvis for alle tal, men i skemaet er kun nævnt de reciprokke værdier for de tilsvarende store tal.

Ved angivelse af antal enheder bruges ofte SI-præfiks i stedet for talord.
F.eks. gigabyte i stedet for en milliard byte, men netop for datamængder, refereres der til næste afsnit.

Tal i forbindelse med datamængder

Når man taler om bits og bytes (datastørrelser), skal man dog være opmærksom på, at i stedet for at tælle i potenser à 1000, så tæller man i potenser à 1024, da 1024 er meget nemmere at "forstå" for en computer, da 1024 er lig med 2^{10}. På denne måde kan alle tal dannes vha. tændte og slukkede strømimpulser.

Præfiks		Base_{1000}	Base_{1024}	Base_{2}
		1000^0	1024^0	2^0
		1		1
kibi	Ki	1000^1	1024^1	2^{10}
		1000		1024
mebi	Mi	1000^2	1024^2	2^{20}
		1000000		1048576
gibi	Gi	1000^3	1024^3	2^{30}
		1000000000		1073741824
tebi	Ti	1000^4	1024^4	2^{40}
		1000000000000		1099511627776
pebi	Pi	1000^5	1024^5	2^{50}
		1000000000000000		1125899906842624
exbi	Ei	1000^6	1024^6	2^{60}
		1000000000000000000		1152921504606846976
zebi	Zi	1000^7	1024^7	2^{70}
		1000000000000000000000		1180591620717411303424
yobi	Yi	1000^8	1024^8	2^{80}
		1000000000000000000000000		1208925819614629174706176

Mængder

Arbejder man med mange elementer, som på en eller anden måde har et eller flere fællestræk, kan man samle dem i en mængde. Et eksempel på en mængde kunne være: USA er en kort betegnelse for: Alabama, Alaska, Arizona, Arkansas, Californien… etc. Så skal man omtale alle disse (50) stater, hvor det gælder dem alle sammen, kan man i stedet bare skrive: USA. Staterne er således elementer i mængden USA.

Så hvis man har en række elementer, som tilsammen kan opfattes som en helhed, kaldes den velafgrænsede samling af elementer for en mængde.

Mængderne af de forskellige taltyper er allerede beskrevet tidligere i dette notat. F.eks. mængden af naturlige tal eller mængden af reelle tal. Bemærk, at der i disse mængder er uendeligt mange elementer.

Det er givet at et element $\boldsymbol{x}$ tilhører en mængde $\boldsymbol{X}$. For at vende tilbage til eksemplet fra før, så tilhører elementet ***Alaska*** mængden ***USA***, hvilket kan skrives: $\boldsymbol{Alaska} \in \boldsymbol{USA}$. Tilhører et element $\boldsymbol{x}$ IKKE en mængde $\boldsymbol{X}$, f.eks. at **Italien** IKKE er en del af **USA**, skrives det som: $\boldsymbol{Italien} \notin \boldsymbol{USA}$.

Er to mængder, $\boldsymbol{X}$ og $\boldsymbol{Y}$ ens, skrives det helt enkelt som: $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}$. Hvis der i dette tilfælde gælder at et element, $\boldsymbol{x}$, tilhører mængden $\boldsymbol{X}$, så må der følgelig gælde, at elementet $\boldsymbol{x}$ også tilhører mængden $\boldsymbol{Y}$. Dette skrives som: $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Y}$.

Hvis der gælder en betingelse, $B(\boldsymbol{x})$, for elementerne i en mængde, $\boldsymbol{X}$, skrives det i en mængdebygger:

$$\boldsymbol{X} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} \,\middle|\, B(\boldsymbol{x}) \right\}$$

Et tankeeksperiment er, at der eksisterer en mængde af tal fra 1 og op til 100. I dette tilfælde er betingelsen, at tallet er mellem 1 og 100 (begge inklusive). Det, at et tal befinder sig i det lukkede interval (altså at både begyndelse og afslutning er inkluderet i intervallet) fra 1 til 100, skrives som: $\boldsymbol{x} \in [1;100]$. Der kan også gælde en generel beskrivelse af mængden, $\boldsymbol{X}$. Dette er typisk den generelle beskrivelse af de elementer, som er indeholdt i mængden.

Er det f.eks. mængden af alle hele tal, skrives det som: $\boldsymbol{X} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{N} \,\middle|\, \boldsymbol{x} \in [1;100] \right\}$.

For nemheds skyld vil mængdeelementer og mængder i resten af dette notat ikke blive skrevet med fede bogstaver. Det skrives heller ikke med fed skrift normalt, men for overblikkets skyld har introduktionen benyttet sig af fede bogstaver, for at kunne skelne tal og mængder fra hinanden.

Eksemplet kan videre beskrives:
I det sidste eksempel var mængden bestående af alle hele tal fra 1 til 100, begge inklusive. Det vil sige, at der er præcis 100 elementer i mængden. Vil man i stedet vise, at alle tal mellem 1 og 100 kan beskrives, kan man ikke benytte taltypen $\mathbb{N}$. Anvender man i stedet taltypen $\mathbb{R}$, altså alle tænkelige tal, vil der naturligvis være uendeligt mange elementer i denne mængde. Dette skrives som: $X = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \in [1;100] \right\}$.

Intervaller

For at beskrive mængder, kan man – ligesom i folkeskolen – lave nogle bobler, som indeholder de forskellige elementer i mængden. Det er også det, som er vist i dette notat på p. 5.

Det kan dog være snedigt at vise intervaller – dvs. et talområde (f.eks. tallene –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 & 8) på en mere overskuelig måde.

Hvis der er tale om udelukkende de hele tal, vil det være korrekt at angive en **liste**.

En liste med de nævnte tal vil se således ud: $\{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;5;6;7;8\}$. I denne liste er der 13 elementer. Det vil med andre ord sige, at f.eks. tallet 5,2 ikke er en del af listen. Bemærk i øvrigt, at elementerne adskilles af ; ”semikolon”. Dette gøres for ikke at forveksle decimal-kommaer med element-adskillere.

Vil man derimod udtrykke, at det er ALLE (reelle) tal fra –4 til 8, så kan man vælge følgende metoder: (Tænk på, at de reelle tal inkluderer alle kommatal og alle brøker i det givne interval. Således vil der – selv i et meget lille interval – være uendeligt mange elementer).

Hvis både –4 og 8 er inkluderet, kan det noteres således: $[-4;8]$. Her kaldes tallene –4 og 8 for intervallets *endepunkter*. Det venstre endepunkt skal ALTID være det mindste tal.
Bemærk, at begge de firkantede parenteser vender IND mod tallene. Det betyder, at både 4 og 8 er ”med” i intervallet.

Hvis hverken –4 eller 8 er en del af intervallet, skrives det: $]-4;8[$. Her vender parenteserne VÆK fra tallene. Dette betyder, at tallene –4 og 8 ikke er med, men f.eks. tallet –3,9999999999999999 og tallet 7,99999999999999 er med i det nævnte interval. Bemærk, at det er eksempler!

Naturligvis kan parenteserne kombineres efter behov. Tænk selv over de følgende eksempler:
$[-4;8[$ og $]-4;8]$

Der kan også benyttes en mere ”ligningsmæssig” notation.

Intervallet $[-4;8]$ betyder som nævnt, at intervallet indeholder alle tal mellem –4 og 8 – begge inklusive. Det svarer jo til løsningen der opfylder følgende ulighed: $-4 \le x \le 8$. Med andre ord, hvis intervallet består af en masse tal, så vil ethvert af disse tal, *x*, være større end –4 og mindre end 8.

Bemærk, brugen af $\le$. Dette symbol er en *komparativ operator*. Det sættes mellem to værdier, og hvis udsagnet skal være sandt, så skal tallet til venstre for symbolet være mindre end eller lig med tallet til højre.
Der kan også anvendes symbolet <. Dette symbol betyder, at de to tal ikke kan være lig med hinanden, men at tallet til højre SKAL være STRENGT STØRRE end tallet til venstre.

Ved løsning af uligheder, kan dette symbol også være *undersøgende*, det vil sige, at man undersøger om f.eks. $x \le y$. Dette vil blive beskrevet i et senere notat.

Det kan være lidt forvirrende i begyndelsen, men måske et lille skema kan hjælpe på det:

$[-4;8]$	Kan også skrives som:	$-4 \le x \le 8$

$]-4;8[$	Kan også skrives som:	$-4 < x < 8$

$[-4;8[$	Kan også skrives som:	$-4 \le x < 8$

$]-4;8]$	Kan også skrives som:	$-4 < x \le 8$

Her skal der særlige lægges mærke til sammenhængen mellem parentesernes form og de komparative operatorer (ulighedstegnene).

Der er en særlig ting, man skal være opmærksom på, hvis man skal bruge tal, som går helt ud til (plus/minus) uendeligt.

Tallene (!) plus og minus uendeligt skrives som hhv. $-\infty$ og ∞. Specielt om disse to værdier er, at de ALDRIG kan være indeholdt i et interval. Så hvis et interval strækker sig så langt, kan man altså ikke anvende inkluderende parenteser eller større end eller lig med-tegn.

Eksempler:

$[-4;\infty[$	Kan også skrives som:	$-4 \le x < \infty$

$]-\infty;\infty[= \mathbb{R}$	Kan også skrives som:	$-\infty < x < \infty$

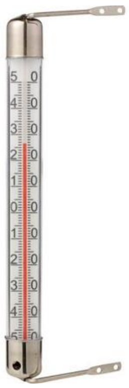
Øvelser:

a) Beskriv et interval, som indeholder alle de reelle tal fra og med –2 til (men ikke med) 3.
b) Lav en liste, som indeholder alle de hele tal fra –1 til 6.
c) Lav en liste, som indeholder alle de lige tal fra –5 til 7.
d) Beskriv et interval, som indeholder alle de reelle tal fra 3 til 11.
e) Beskriv et interval, som indeholder alle de reelle tal fra 5 til uendeligt.
f) Beskriv et interval, som går fra $-\infty$ og til og med -8.

Mængder afbildet på tallinjer

Måske er det allerede kendt fra folkeskolen at mængder af tal – lad os kalde dem for **intervaller** – kan afbildes på tallinjer.

Der findes adskillige eksempler fra det daglige liv, hvor værdier repræsenteres på en eller anden form for tallinje: Hvis man får taget sin temperatur med et gammeldags termometer, så vil den røde streg standse ud for en eller anden talværdi – nok omkring de 37°, hvis man altså er rask. Måske har man et termometer, der viser temperaturen udendørs, så man kan klæde sig fornuftigt på. Når der skal tages mål til beklædning, bruges ofte et målebånd, hvor målet f.eks. kan vise, at man nok skal tabe sig lidt, hvis man er 105 cm. omkring livet. En tømrer vil tage mål til at montere en opvaskemaskine under køkkenbordet. Det nødvendige hul til opvaskemaskinen skal måles, og der vil nok stå ca. 59-60 cm på tommestokken for at opvaskemaskinen kommer til at passe perfekt ind i åbningen. I alle disse tilfælde er værdien vist på en tallinje: Termometerskalaen, målebåndet og tommestokken.



Temperaturen udendørs på en sommerdag er 26°C

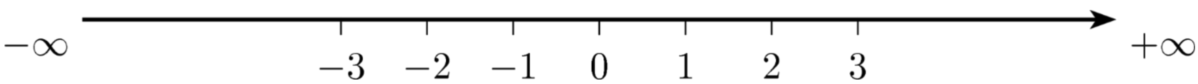
70 cm om livet er ikke så galt!

En god tommestok er uundværlig når der skal laves håndværks-projekter ...

Fælles for de tre (og mange andre) måleinstrumenter er, at de egentlig blot består at en tallinje, hvor en bestemt værdi bliver afsat på.

Det er ikke meget anderledes, når der skal beskrives tal-intervaller.

Først og fremmest: Hvad er en tallinje, hvad er kravene til en tallinje og hvordan bruges den?



En simpel tallinje. (Lærebog i matematik hhx 1, kap. 1.1.1 – Tallinjen)

Betragter man den ovenstående tallinje, ses det, at der er afsat syv værdier. Alle de hele tal (Husk, at de tilhører mængden $\mathbb{Z}$) fra –3 og op til 3. Strengt taget betyder det ikke, at der ikke kan indsættes andre tal – dvs. reelle tal etc. Men det er ikke praktisk at angive alle mulige tal, så det er altid godt, hvis man kan inddele tallinjen i passende skridt. Det kan sagtens være: 2, 4, 6 etc. eller 100, 200, 300 etc., hvis det er bedre til at lave en god figur, som viser de relevante værdier.

Der er sådan set ikke sat nogen begrænsninger. –3 er ikke nødvendigvis det mindste tal og 3 er ikke nødvendigvis det højeste tal. Dette ses bl.a. ved, at der er sat $-\infty$ (minus uendeligt) ind yderst til venstre og ∞ (plus uendeligt) ind yderst til højre. Hvis der ikke i det / den pågældende eksempel / opgave er behov for tal, som er mindre end –3 eller tal større end 3, så er dette rigeligt til at vise det ønskede.

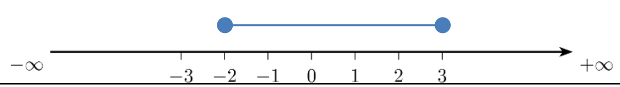
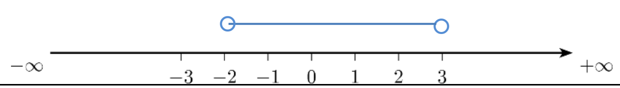
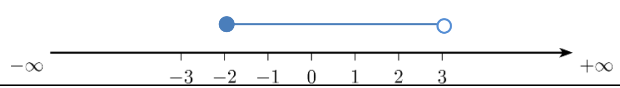
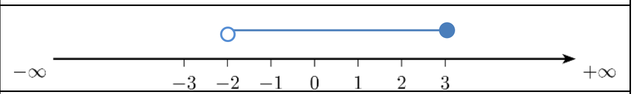
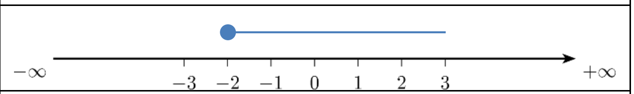
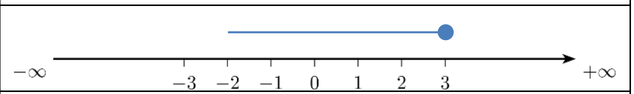
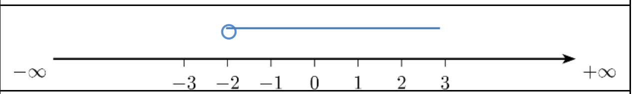
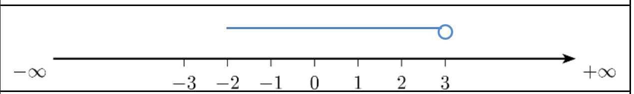
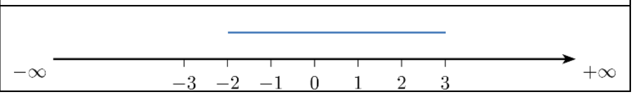
Det ses også, at der yderst til højre på linjen er et pilehoved. Det indikerer, at talværdierne stiger, desto længere man bevæger sig ud af (til højre) på tallinjen. Det betyder samtidig, at man ALTID indsætter talværdier i den rigtige rækkefølge på en tallinje. Mindre tal, står til venstre og større tal står til højre. Det vil være praktisk, ALTID at rette sig efter denne standard.

Intervallerne er kendt fra forrige kapitel. Hvis de skal afbildes på tallinjer, er der nogle få regler, som skal følges:

Er et tal inkluderet, vises det på tallinjen som en udfyldt prik: ●.
Er et tal ikke inkluderet, vises det på tallinjen som en hul prik: ○.
Hvis et interval går imod (plus/minus) uendeligt, afsluttes linjen uden noget symbol.

Selve intervallet indtegnes typisk over selve tallinjen for at undgå forvirring og sammenblanding af intervallet og tallinjen.

Det nemmeste er måske igen at vise sammenhængen i et skema:

$[-2;3]$	Kan også skrives som:	$-2 \le x \le 3$	
$]-2;3[$	Kan også skrives som:	$-2 < x < 3$	
$[-2;3[$	Kan også skrives som:	$-2 \le x < 3$	
$]-2;3]$	Kan også skrives som:	$-2 < x \le 3$	
$[-2;\infty[$	Kan også skrives som:	$-2 \le x < \infty$	
$]-\infty;3]$	Kan også skrives som:	$-\infty < x \le 3$	
$]-2;\infty[$	Kan også skrives som:	$-2 \le x < \infty$	
$]-\infty;3[$	Kan også skrives som:	$-\infty < x \le 3$	
$]-\infty;\infty[$	Kan også skrives som:	$-\infty < x < \infty$	

Strengt taget er linjernes længde ligegyldig, når et intervals endepunkt er plus/minus uendeligt. Igen er det op til den enkelte at lave en grafisk afbildning af et interval, som er korrekt og letlæseligt.

I de følgende forklaringer, tages der i eksemplerne udgangspunkt i følgende mængder:

$A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{1; 2; 3; 4\}$ og $C = \{2; 3; 4\}$

Delmængde

En mængde, *A*, er en delmængde af *B*, hvis alle elementer i *A*, også er elementer i *B*.
Man siger også, at *A* er **indeholdt** i *B*.

Dette skrives generelt som: $A \subseteq B$

I eksemplet vil det sige, at: $A \subseteq B$, men også at $B \subseteq B$, da det jo ikke er nogen overraskelse, at alle elementer i *B* også er indeholdt i *B*. Således er enhver mængde en delmængde af sig selv!
Ligeledes er $C \subseteq B$, $A \subseteq A$ og $C \subseteq C$.

A er ikke en delmængde af *C*, idet ”1” ikke indgår i *C*, så: $A \not\subset C$. På samme måde er *C* heller ikke en delmængde af *A*, idet ”4” ikke er indeholdt i *A*, så: $C \not\subset A$.

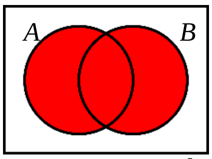
Ægte delmængde (egentlig delmængde)

En mængde, *A*, er en ægte delmængde af *B*, hvis alle elementer i *A*, også er elementer i *B*, MEN OGSÅ at $A \neq B$ – altså at de to mængder ikke er identiske.
Der er således et ekstra krav i forhold til den ”almindelige” delmængde. Dette vil i eksemplet betyde, at alle de delmængder, som er dannet udelukkende af én mængde bortfalder. En mængde er jo identisk med sig selv!

Dette skrives generelt som: $A \subset B$

I eksemplet vil det sige, at: $A \subset B$, $C \subset B$.

Foreningsmængde



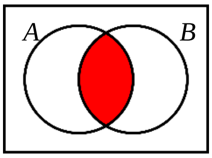
Foreningsmængde

En foreningsmængde er resultatet af to mængder, som er ”lagt sammen”.
Notationen for en fællesmængde er: $A \cup B$

I eksemplet er: $A \cup C = \{1; 2; 3; 4\}$

Specielt:
$A \cup B = B \cup A$
$A \subseteq B \cup A$
$A \cup A = A$
$A \cup \varnothing = A$

Fællesmængde



Fællesmængde

En fællesmængde for to (eller flere) mængder er de elementer, som er indeholdt i begge/alle mængderne.
Notationen for en fællesmængde er: $A \cap B$

I eksemplet er:

$A \cap B = \{1;2;3\}$

$A \cap C = \{2;3\}$

$B \cap C = \{2;3;4\}$

Specielt:

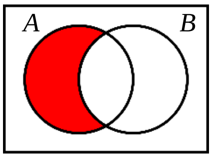
$A \cap B = B \cap A$

$A \cap B \subseteq A$

$A \cap A = A$

$A \cap \varnothing = \varnothing$

Komplementærmængde



Komplementærmængde

En komplementærmængde er resultatet af to mængder, som er "trukket fra hinanden". Dette kaldes også for **mængdedifferensen**.
Notationen for en fællesmængde er: $A \setminus B$. (Af og til bruges $A - B$).

$A \setminus B$ er mængden af alle elementer, som er indeholdt i *A*, der ikke er indeholdt i *B*.

$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$

I eksemplet er:

$A \setminus B = \varnothing$

$B \setminus A = \{4\}$

$A \setminus C = \{1\}$

$C \setminus A = \{4\}$

$B \setminus C = \{1\}$

$C \setminus B = \varnothing$

Mængdebyggeren

Mængdebyggeren er allerede beskrevet ganske kort i dette notat.

En mængde kan beskrives vha. en mængdebygger.

Mængdebyggeren ser på sin grundform således ud: $M = \{\ldots|\ldots\}$.

Først står mængdens navn. Det beskrives i detaljer lidt senere. Dernæst et lighedstegn, og på højre side er der en Tuborg parentes. I denne Tuborg parentes er der i midten en lodret streg.
Til venstre for den lodrette streg, beskrives de tal, som kan bruges (er gyldige). Til højre for den lodrette streg er selve beskrivelsen af mængden.

Til at begynde med, fokuseres der på to specifikke mængder, nemlig grundmængden, *G*, og løsningsmængden, *L*. Dette er to vigtige mængder, som skal bruges på alle matematikniveauer. Senere – i afsnittet om funktioner – vil de skifte navn til hhv. definitionsmængden og værdimængden, men de vil beskrive det samme, nemlig: Hvilke tal må/skal/kan der bruges, og hvilke tal består løsningen af.

Grundmængden:
Det er meget vigtigt at bestemme grundmængden før man går i gang med at løse en ligning. Det er nemlig den som afgør, om det resultat man når frem til, kan anvendes eller om det er ugyldigt. Man kan sagtens opleve, at man løser en ligning (fuldstændig korrekt), men at den eller de fundne løsninger ikke nødvendigvis er gyldige. Der kan være mange grunde til at en løsning kan være ugyldig. F.eks. kan det udregnede resultat være årsag til at man begår en matematisk ulovlighed, eller det kan være fordi resultatet ikke ligger i et interval, der betragtes som relevant.

Et par eksempler:
I ligningen $\frac{-7}{4+x} = 18$ vil der fremkomme et problem, hvis $x = -4$. Fordi hvis $x = -4$, så vil der i nævneren i venstre side komme til at stå: $\frac{-7}{4+(-4)}$, hvilket vil være en alvorlig fejl, idet $4-4=0$. Og da det ikke er tilladt at dividere med 0, så kan denne *x*-værdi ikke accepteres. I dette tilfælde vil det ikke give et problem, men i et andet tænkt eksempel kunne man komme ud for, at den løsning man udregner vil være ugyldig.

Grundmængden kunne i dette tilfælde skrives som: $\underline{\underline{G = \{x \in \mathbb{R} | x \neq -4\}}}$.

Oversættelse: Grundmængden, *G*, er lig med alle reelle tal $(x \in \mathbb{R})$, for hvilke det gælder $(\,|\,)$, at *x* ikke må være lig med -4 $(x \neq -4)$.
Så det, det betyder er, at til at begynde med kan der vælges frit fra alle reelle tal, der er dog den begrænsning, at *x* ikke må være lig med –4.

Ofte vil man her standse op og undre sig over, at der først kan vælges mellem alle tal, og derefter sættes der begrænsninger, men det giver mening, hvis man forestiller sig, at man i stedet for alle tal kun kunne bruge alle hele tal, negative, positive og nul. I det tilfælde ville grundmængden se således ud:
$\underline{\underline{G = \{x \in \mathbb{Z} | x \neq -4\}}}$.