MATEMATIK

NOTAT

02 - ARITMETIK & ALGEBRA

AF:

CAND. POLYT.

MICHEL MANDIX

SIDSTE REVISION: AUGUST 2021

Indholdsfortegnelse:

Aritmetik

Matematik er mange ting. Man kan sige, at der er mange grene indenfor matematikken. Den gren af matematikken, som omhandler tal og de måder man kan regne med tal på, kaldes for ”aritmetik”. (*af græsk: arithmetiké – læren om tal eller arithmos – tal*).

Regnearterne

De traditionelle operationer i aritmetikken er: **addition (plus)**, **subtraktion (minus)**, **multiplikation (gange)** og **division (dele)** – altså de fire elementære regnearter, men også **rødder** og **eksponenter** er en del af aritmetikken.

Addition og subtraktion kan betragtes som modsatte operatorer, ligesom multiplikation og division også kan betragtes som modsatte operatorer.

De tal, som indgår i regnestykket – eller står på hver sin side af operatoren kaldes for operander. Operander kan have særlige navne, afhængigt af regnearten.

Regne-tegn	**Regneart**	**Operation** Substantiv	**At…** Verbum (infinitiv)	**Operander**	**Resultat**
+	Plus	Addition (Sammenlægning)	Addere (Lægge sammen)	Led Addender	Sum (Sammenlægning)
–	Minus	Subtraktion (Fratrækning)	Subtrahere (Trække fra)	Led Minuend og subtrahend	Differens (Forskel)
·	Gange	Multiplikation (Gange)	Multiplicere (Gange)	Faktorer (Koefficienter) Multiplikator og multiplikand	Produkt
: **Eller (hellere)** **brøk-streg**	Divideret med (Delt med)	Division (Dele)	Dividere (Dele)	Faktorer Dividend og divisor	Kvotient eller Forhold (Division)

Addition

Addition er normalt den første regneart man lærer. Den benyttes til at lægge to (eller flere) tal sammen. Har man f.eks. 2 æbler i den ene hånd og 3 æbler i den anden hånd, så har man i alt $2+3=5$ æbler i alt.

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \textit{Operand}\\ \textit{Led}\\ \textit{Addend}}}{2} \quad \overset{\substack{\textit{Operator}\\ \textit{Plus}\\ \downarrow}}{+} \quad \underset{\substack{\uparrow\\ \textit{Operand}\\ \textit{Led}\\ \textit{Addend}}}{3} \quad = \quad \overset{\substack{\textit{Resultat}\\ \textit{Sum}\\ \downarrow}}{5}$$

I matematikken benyttes også – specielt når mange led (op til uendeligt) skal adderes – sumoperatoren, som er angivet ved bogstavet store græske sigma: $\sum$. Denne operator har et indeks, som angiver hvor summen begynder og slutter. Indekset skrives under sigma-tegnet, som en variabel lig med begyndelsesværdien, og slutværdien skrives over sigma-tegnet.

F.eks. $$\sum_{i=1}^{3} v_i = 180° \Leftrightarrow v_1 + v_2 + v_3 = 180°$$

Addition er kommutativt, hvilket betyder at man kan ombytte leddene i udregningen uden konsekvenser for resultatet. Med andre ord vil det sige, at placeringen af en operators specifikke antal af operander er uden betydning for resultatet af udregningen.
F.eks. er $1+2=2+1$.

Addition er associativt, hvilket betyder at $(a+b)+c=a+(b+c)$. Det betyder, at hvis en operator (her plus) forekommer mere end én gang i en udregning, så er rækkefølgen af disse operatorer uden betydning for resultatet.
I eksemplet $1+2+3=(1+2)+3=1+(2+3)$ er det ligegyldigt, om man først udregner $1+2$ og derefter lægger 3 til, eller om man begynder med at udregne $2+3$ og derefter lægge 1 til.

Subtraktion

Subtraktion er modstykket til addition.

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \textit{Operand}\\ \textit{Led}\\ \textit{Minuend}}}{5} \quad \overset{\substack{\textit{Operator}\\ \textit{Minus}\\ \downarrow}}{-} \quad \underset{\substack{\uparrow\\ \textit{Operand}\\ \textit{Led}\\ \textit{Subtrahend}}}{2} \quad = \quad \overset{\substack{\textit{Resultat}\\ \textit{Differens}\\ \downarrow}}{3}$$

Subtraktion er hverken kommutativt eller associativt.
F.eks. er $5-3=2$, mens $3-5=-2$.

Multiplikation

Multiplikation kan på en måde betragtes som en udvidet form for addition. Hvis et tal skal lægges sammen med sig selv mange gange, kan man i stedet for at lægge tallet 10 sammen med sig selv 8 gange sige, at man multiplicerer (eller ganger) 10 med 8.

$$\underset{\substack{\text{Operand}\\\text{Faktor}\\\text{Multiplikator}}}{\underset{\uparrow}{10}} \quad \overset{\substack{\text{Operator}\\\text{Gange}\\\downarrow}}{\cdot} \quad \underset{\substack{\text{Operand}\\\text{Faktor}\\\text{Multiplikand}}}{\underset{\uparrow}{8}} \quad = \quad \overset{\substack{\text{Resultat}\\\text{Produkt}\\\downarrow}}{80}$$

Multiplikation er kommutativt, hvilket betyder at $a \cdot b = b \cdot a$.
Multiplikation er associativt, hvilket betyder at $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
Multiplikation er en distributiv operation mht. addition, da $a \cdot (b + c) = ab + ac$.

$$\begin{aligned}
& 10+10+10+10+10+10+10+10 \\
= \; & (\text{Vha. den distributive regel}) \\
& 10 \cdot (1+1+1+1+1+1+1+1) \\
= \; & (\text{Ved at addere et-tallerne i parentesen}) \\
& \underline{\underline{10 \cdot 8}}
\end{aligned}$$

Tegnet for multiplikation er en prik, $\cdot$, i det normale tilfælde. Benytter man en lommeregner eller en computer, kan man i stedet bruge en asterisk, *. Enkelte steder (i folkeskolen og ved areal- eller volumendimensionering) anvendes tegnet $\times$ mellem faktorerne for at angive at der er tale om multiplikation. Særligt i forbindelse med ubekendte variable kan symbolet helt udelades, og f.eks. gælder følgende udsagn: $3 \cdot x = 3x$. Følgende eksempel med parenteser er også vigtigt: $3 \cdot (4-2) = 3(4-2)$.
Bemærk, at det kun er i forbindelse med "bogstavregning" og ved brug af parenteser, at dette er muligt.
F.eks. kan "33" aldrig være lig med "9", fordi man har undladt gangetegnet. Her er det nødvendigt at benytte notationen: $3 \cdot 3 = 9$.

I skriftlig matematik foretrækkes prikken som gangetegn, hvilket vil sige, at hverken "$\times$" (som gangetegn) eller "*" accepteres, medmindre det er som en del af en udskrift fra et computerprogram. I mange af programmerne, er "*" også udskiftet med "$\cdot$" i de seneste versioner.

Division

Division er en aritmetisk operation, som er det modsatte af multiplikation.

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \textit{Operand}\\ \textit{Faktor}\\ \textbf{\textit{Dividend}}}}{42} \quad \overset{\substack{\textit{Operator}\\ \textbf{\textit{Division}}\\ \downarrow}}{:} \quad \underset{\substack{\uparrow\\ \textit{Operand}\\ \textit{Faktor}\\ \textbf{\textit{Divisor}}}}{6} \quad = \quad \overset{\substack{\textit{Resultat}\\ \textbf{\textit{Forhold}}\\ \downarrow}}{7}$$

Generelt foretrækkes dog skrivemåden:

$$\frac{\overset{\substack{\textit{Operand}\\ \textit{Faktor}\\ \textbf{\textit{Dividend}}\\ \downarrow}}{42}}{\underset{\substack{\uparrow\\ \textit{Operand}\\ \textit{Faktor}\\ \textbf{\textit{Divisor}}}}{6}} = \overset{\substack{\textit{Resultat}\\ \textbf{\textit{Forhold}}\\ \downarrow}}{7}$$

Division er ikke kommutativt.
Division er ikke associativt.

Det aritmetiske udregningshierarki

Når man laver udregninger med de ovenstående operatorer, kan det være vigtigt i hvilken rækkefølge udregningerne udføres.
Hvis udtrykket er kommutativt, så er rækkefølgen ligegyldig, men hvis det ikke er kommutativt eller hvis der er forskellige operatorer i udtrykket, så er rækkefølgen væsentlig.

Rækkefølgen er: FØRST skal rødder og potenser udregnes
DEREFTER skal der multipliceres og divideres
TIL SIDST skal der adderes og subtraheres

Et klassisk eksempel (som har kostet mange omgange for uheldige, ikke-matematikkyndige på lokale beværtninger) er:

"Hvad er $2+3\cdot 5$?"

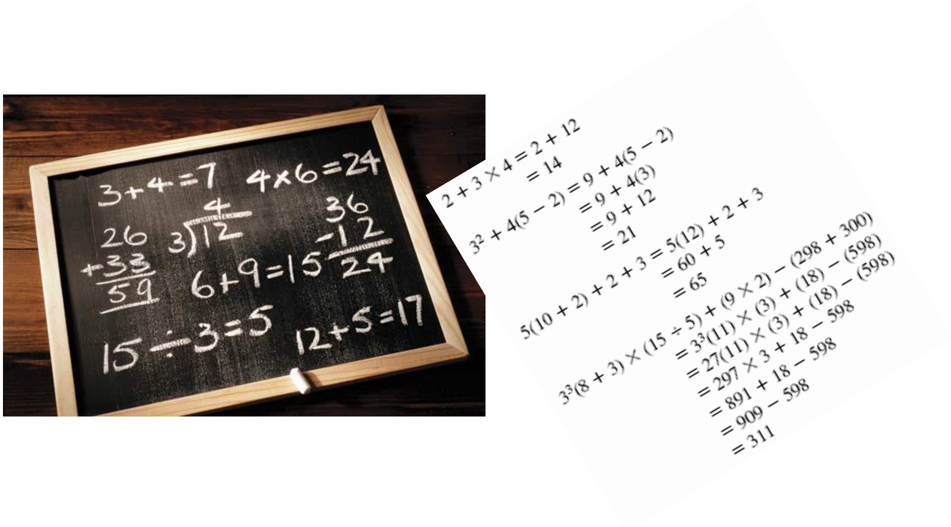
Nogle (særligt uuddannede voksne) vil begynde fra venstre, som når de læser og udregne:
$2+3=5$ og så gange med 5, det giver $5\cdot 5=25$.

Men hvis man holder sig til det aritmetiske udregningshierarki, så skal multiplikationen udregnes FØR additionen, og det giver følgende resultat:
$3\cdot 5=15$ og så lægge 2 til, det giver $15+2=17$.

Af og til kan man have behov for, at udregningerne skal udføres i en rækkefølge som ikke er "korrekt" i forhold til det aritmetiske udregningshierarki.

Hvis man f.eks. skulle bruge eksemplet fra før, men hvor det var vigtigt at "$2+3$" blev udregnet FØR der skulle multipliceres med 5, så kunne man skrive det som følger:

$(2+3)\cdot 5$. Da parenteser skal udregnes allerførst – igen med det aritmetiske udregningshierarki gældende, så bliver resultatet: $2+3=5$. Derefter multipliceres med 5, hvilket giver: $5\cdot 5=25$.



Hvad sker der, når man blander?

Møder man et udtryk, hvor der optræder flere forskellige operatorer (regnearter), som måske endda er forskellige, skal man være opmærksom på – dels det aritmetiske udregningshierarki, men så sandelig også om regnearten er kommutativ eller ej.

F.eks. er $8+4-2$ det samme som: $(8+4)-2=12-2=10$, hvorimod $8-4+2$ IKKE er det samme som: $8-6$, medmindre det tydeliggøres som: $8-(4+2)$.

Algebra

Algebra kommer af det arabiske udtryk al-djabrwa, som betyder noget i stil med:
"Genforening af itubrudne stykker".

Læser man forskellige kilder, er der uenighed om oprindelsen af denne matematiske disciplin.

Som allerede antydet, mener mange at algebra stammer fra en bog, som blev skrevet af den persiske matematiker Muhammad Ibn Al-Khwārizmī i 820 – værkets fulde titel var Al-Kitāb al-muhtaṣar fi l-hisāb al-djabr wa'l-muqābalah (الكتاب المختصر في حساب الجبر والمقابلة), der betyder "Den grundige bog om udregning ved sammensætning og afbalancering".

Andre mener, at det er den græske matematiker Diophant (som levede 600 år før Muhammad Ibn Al-Khwārizmī), som har titlen og æren af at være algebraens fader.

I vore dage forstås algebra som "bogstavregning" – dvs. når et udtryk eller en ligning ud over tal indeholder bogstaver – eller "læren om matematiske operationer".

Reduktion

Alle har hørt i folkeskolen: "Man kan ikke blande æbler og pærer" i regnetimerne.

… Og det er fuldstændig korrekt, blot er det yderst sjældent at vores udregninger repræsenteres i æbler og pærer.

Særligt i gymnasiet. Dér er æblerne og pærerne udskiftet med x'er og y'er og alle mulige andre bogstaver, der hver især repræsenterer bestemte værdier.

Typisk, vil man navngive konstanter (altså faste talværdier som f.eks. koefficienter) med a, b, c etc…, medens variable (altså talværdier, der kan variere undervejs i problemet) navngives med x, y, z etc.

Ligesom med æbler og pærer kan man ikke blande dem. Har man f.eks. fire æbler og fem pærer, siger man jo ikke: "Jeg har ni!". Det skulle da lige være ni stykker frugt, men i matematik er man interesseret i en langt større præcision, så hvis man har $4 \cdot x$ og $5 \cdot y$, så kan man ikke have 9, da der jo ikke er 9 ens, men derimod 4 af x'erne og 5 af y'erne. Idet x og y ikke nødvendigvis er ens, giver det derfor ikke nogen mening at lægge dem sammen i en helhed.

Således er der regler for, hvordan udtryk kan reduceres eller forenkles. Og det er vigtigt i matematik. Jo enklere resultatet kan angives, desto bedre er det!

Givet udtrykket: $x+7+4x-2$.

Her er der to "typer" led. Nogle som indeholder "x" og nogle som ikke gør.

Da der er tale om to typer led, skal de opgøres (tælles) hver for sig.

Det første led er x. Det tredje led er $4x$ – altså 4 gange x.
Så alt i alt er der $1+4 = 5$ gange x. Det skrives som $5x$.
Så har vi overstået alle leddene, som indeholder x, men der er jo stadig dem tilbage, som ikke indeholder x – altså konstantleddene.

Det andet led er 7 og det fjerde og sidste led er –2.
I alt er der så $7 - 2 = 5$ tilbage, hvorfor resultatet af reduktionen er lig med: $5x + 5$.

Traditionelt noteres disse udtryk med de højeste potensled forrest og konstantled til sidst. Dvs. at $3x^2$ noteres før $-4x$, som igen noteres før konstantleddet.
Altså: $3x^2 - 4x + 6$.

Samtidig noteres ”bogstavled”, altså konstanter og variable i alfabetisk rækkefølge, stadig under hensyntagen til at højeste potensled står til venstre for de laveste (konstantled).
Der kan være undtagelser, som f.eks. i forbindelse med overskuelighed af udtrykket eller hvis man ”lægger an” til at benytte en bestemt formel, hvor bogstaverne står i en helt bestemt rækkefølge, men generelt noteres led i den ovennævnte rækkefølge.

Dermed reduceres følgende udtryk:

$$(13\cdot e-19\cdot f)\cdot(13\cdot e+19\cdot f)-(12\cdot f-9\cdot e)^2-(17\cdot e+11\cdot f)^2$$

til:

$$-201\cdot e^2-626\cdot f^2-158\cdot e\cdot f\ .$$

Eksempler og øvelser:

Eksempler:

$2+3\cdot 5=17$	$=2+15=17$
$(2+3)\cdot 5=25$	$=5\cdot 5=25$
$4+4:4+4=9$	$=4+\frac{4}{4}+4=4+1+4=9$
$(4+4):(4+4)=1$	$=\frac{4+4}{4+4}=\frac{8}{8}=1$
$4+4:(4+4)=4,5$	$=4+\frac{4}{4+4}=4+\frac{4}{8}=4+\frac{1}{2}=\frac{8}{2}+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}\approx 4,5$
$4+8:2^2+1=7$	$=4+\frac{8}{2^2}+1=4+\frac{8}{4}+1=4+2+1=7$
$(4+8):4+1=4$	$=\frac{4+8}{4}+1=\frac{12}{4}+1=3+1=4$

Øvelse 01: (Addition og multiplikation)

Svar med ”Ja” eller ”Nej” på følgende spørgsmål:

01.a: Kan $4\cdot 2+5$ omskrives til $4\cdot 10$? Svar: ______

01.b: Kan $4\cdot 2+5$ omskrives til $8+5$? Svar: ______

01.c: Kan $7\cdot(1+6)$ omskrives til $7\cdot 7$? Svar: ______

01.d: Kan $3\cdot 2+5-2$ omskrives til $4\cdot 10-2$? Svar: ______

01.e: Kan $(4+5)\cdot 2$ omskrives til $4+10$? Svar: ______

01.f: Kan $(4+5)\cdot 2$ omskrives til $8+10$? Svar: ______

01.g: Kan $4\cdot 3+5\cdot x$ omskrives til $12+20x$? Svar: ______

01.h: Kan $4\cdot 3+5\cdot x$ omskrives til $4\cdot 15\cdot x$? Svar: ______

01.i: Kan $4\cdot 3+5\cdot x$ omskrives til $12+5x$? Svar: ______

Øvelse 02: (Addition og multiplikation)

En tur med taxi kan (meget forenklet) udregnes som et startgebyr samt en pris for hver kørt kilometer.

En tur hjem kan beskrives som et startgebyr på 30 kr. og derefter 9 kr. pr. kørt kilometer.

Hvilken formel beskriver det ovenstående problem?
(Sæt kryds ud for en eller flere rigtige formel(er)).

02.a.a:	$(30+x)\cdot 9$	Svar: ___________
02.a.b:	$30+9x$	Svar: ___________
02.a.c:	$30x+9$	Svar: ___________
02.a.d:	$39x$	Svar: ___________
02.a.e:	$9x+30$	Svar: ___________

Om natten er startgebyret større og kilometerprisen højere.
Så nu udregnes prisen for en tur:

A: Gang 12 med antal kilometer (x).
B: Addér resultatet fra A med 40.

Opskriv en ligning, som beskriver en taxitur om natten:

02.b.a: Svar:____

Fra centrum af København og hjem til forfatteren er der 7,2 km.
Hvad koster en taxitur hjem om natten, når forfatteren er strandet på Rådhuspladsen efter en bytur?

Udregn svaret og anfør det nedenfor.

02.b.b: Svar:____

Øvelse 03: (Samle led af samme type)

x repræsenterer en bestemt værdi.

Ved indgangen til Copenhagen Beer Festival er der en tællemekanisme på de tre indgange, for at registrere antallet af besøgende.
Efter 1. dag står der 3000 på nr. 1 og "x" på nr. 2 og på nr. 3.
(Der er åbenbart gået præcis lige mange mennesker ind gennem indgang nr. 2 og indgang nr. 3).

Hvilke(t) af de følgende udtryk angiver det korrekte antal besøgende?
(Sæt kryds ud for de(t) rigtige udtryk)

03.a.a: $3000+2\cdot x$ Svar: ___________
03.a.b: $5000\cdot x$ Svar: ___________
03.a.c: $3000+x+x$ Svar: ___________

Såfremt der er gået $x = 2000$ personer gennem hhv. indgang 2 og 3, så er:

03.b.a: $3000+2\cdot x$ Svar: ___________

Øvelse 04: (Samle led af samme type)

x repræsenterer én bestemt værdi.

9 æsker indeholder hver et antal nøgler.
Der står på hver æske hvor mange nøgler, der er i.
Sedlerne viser som følger:

x	x	4	x	x	x	8	x	3

Hvilke(t) af de følgende udtryk angiver det korrekte antal nøgler?
(Sæt kryds ud for de(t) rigtige udtryk)

04.a.a: 21 Svar: ___________
04.a.b: $15+6\cdot x$ Svar: ___________
04.a.c: $2x+4+3x+8+x+3$ Svar: ___________
04.a.d: $2\cdot x+4+3\cdot x+8+x+3$ Svar: ___________
04.a.e: $x+x+4+x+x+x+8+x+3$ Svar: ___________
04.a.f: $21\cdot x$ Svar: ___________
04.a.g: $6x+15$ Svar: ___________

Såfremt der er $x = 2$ nøgler i æskerne, så er:

04.b.a: $12x+15$ Svar: ___________
04.b.b: $39x$ Svar: ___________
04.b.b: 39 Svar: ___________
04.b.b: $27x$ Svar: ___________
04.b.c: 27 Svar: ___________

Øvelse 05: (Reduktion)

Nedenstående udtryk skal reduceres mest muligt.

05.a: $3x+x+7x$ Svar:____

05.a: $4a+b-2a+5b$ Svar:____

05.a: $2+6y+2+21y+4x$ Svar:____

05.a: $4+3x+2x+6+x$ Svar:____

Øvelse 06: (Reduktion)

x og y repræsenterer to værdier.

x er antallet af Ruko-nøgler i en æske og y er antallet af Yale-nøgler i en æske.

Herunder er angivet 4 æsker med nøgler.

A	B	C	D
$x \quad y$	$x \quad y \quad x \quad y \quad x \quad y$	$x \quad x \quad x \quad y$	$x \quad y \quad x \quad x$

06.a: Hvilken æske har $x+y$ nøgler? Svar: ____________

06.b: Hvilken æske har $3\cdot x+y$ nøgler? Svar: ____________

06.c: Hvilken æske har $3\cdot(x+y)$ nøgler? Svar: ____________

06.d: Hvilken æske har $3x+3y$ nøgler? Svar: ____________

06.e: Hvilken æske har $x+3y$ nøgler? Svar: ____________

06.f.a: $x=2$ og $y=4$: $3\cdot(x+y)=?$ nøgler? Svar: ____________

06.f.b: $x=2$ og $y=4$: $3x+3y=?$ nøgler? Svar: ____________

Øvelse 07: (Symbolbehandling)

I en fodboldklub er der T trænere, B bestyrelsesmedlemmer, P piger og D drenge.
Med andre ord kan man sige følgende:

07.a: T = antallet af trænere
07.b: B = antallet af bestyrelsesmedlemmer
07.c: P = antallet af __________
07.d: D =_____________________

Øvelse 08: (Symbolbehandling)

Skriv følgende relationer op med ord:
Eks: $3 \cdot B = T$: Tre gange antallet af bestyrelsesmedlemmer er lig med antallet af trænere (der er altså tre gange så mange trænere som der er bestyrelsesmedlemmer).

08.a : $D = 5 \cdot P$ ____

08.b : $T + B + P + D = 340$ ____

08.c : $P + D = 10 \cdot T$ ____

08.d : $\dfrac{B+T}{P} = 0{,}8$ ____

Øvelse 09: (Symbolbehandling & ligningssystemer)

Fire børn har tilsammen 38 chokoladeæg. Børnene hedder Andrea (A), Peter (P), Jonas (J) og Marie (M). Oversæt følgende ligninger til hverdagssprog:

09.a.a : $P = J + 1$ ____
09.a.b : $A = P - 2$ ____
09.a.c : $M = 2 \cdot A$ ____

09.b: Der kan opstilles endnu en ligning på baggrund af opgaveteksten. Hvilken?
09.c: Hvem af børnene har flest chokoladeæg?
09.d: Hvor mange chokoladeæg har hvert barn?

Øvelse 10: (Symbolbehandling & ligningssystemer)

I en frugtkurv findes æbler, pærer og bananer. Der er i alt seksten stykker frugt. Der er dobbelt så mange æbler som bananer, og hvis man lægger antallet af pærer og æbler sammen får man tre gange antallet af bananer.

10.a: Vælg passende symboler til at betegne antallet af de tre slags frugt
10.b: Opstil tre ligninger på baggrund af teksten ovenfor
10.c: Hvor mange er der af hver slags frugt?

Den store tabel:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
11	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220
12	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240
13	13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260
14	14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280
15	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225	240	255	270	285	300
16	16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240	256	272	288	304	320
17	17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	204	221	238	255	272	289	306	323	340
18	18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	198	216	234	252	270	288	306	324	342	360
19	19	38	57	76	95	114	133	152	171	190	209	228	247	266	285	304	323	342	361	380
20	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400