MATEMATIK

NOTAT

03 - ENHEDER

AF:

CAND. POLYT.

MICHEL MANDIX

SIDSTE REVISION: AUGUST 2019

Indholdsfortegnelse:

Tal – med og uden enheder

I folkeskolen regner man ofte uden enheder. Man siger også at resultatet er enhedsløst.
I virkeligheden er det meget få udregninger, som er enhedsløse, da man for det meste regner på noget konkret. Et eksempel kan være, at man skal udregne prisen for en taxitur hjem fra en aften i byen. I folkeskolen kunne man nok slippe afsted med at udregne at man skulle betale 264,35. Måske (måske ikke) ville man huske at skrive, at det var kroner, man skulle betale. Hvis man var særligt omhyggelig, kunne man vinde et point ved at skrive at det var danske kroner (DKK eller kr). Pointen er, at når det ikke angives med en enhed, men bare med et tal, så er det en kilde til mange misforståelser. Som det vil blive beskrevet senere i dette notat, vil udregninger ofte også blive nemmere, hvis man har forståelse for enheder.

For at vende tilbage til taxi-eksemplet, så er der jo mange parametre, som indgår i udregningen. Ofte tænker man ikke over det (der er jo en grund til at man prajer en vogn), men ikke desto mindre kan man lave en korrekt udregning af prisen af en taxitur.

For at få overblik over dette, tages der udgangspunkt i følgende situation:
Det har været en fugtig aften i byen. En person (I denne historie hedder han Michael) står på Vesterbrogade i København og vil gerne hjem til Valby. Det er så sent, at S-togene kun kører en gang i timen, og lige nu er der kun én ting, som gælder, og det er at komme hurtigt hjem. Det er lørdag nat, så der er alt for mange mennesker i byen, som tilsyneladende har samme problem og har fået samme ide til at komme hjem, nemlig at praje en taxi på gaden. Efter at have stået på Vesterbrogade i lidt over en halv time uden at kunne hyre en taxi, besluttes det at gribe i lommen efter mobiltelefonen og ringe til taxicentralen for at bestille en vogn. Så kan man da i mindste bestille den til et navn (Michael). Ringer man til centralen lørdag nat (efter kl. 23:00), så er starttaksten 50,00 DKK (kr). Så da taxien ankommer, og Michael sætter sig ind i vognen, så viser taxameteret allerede 50,00 kr. Michael vil gerne hjem til Valby. Det er en afstand på 5,4 km. Desværre har Michael i sin brandert glemt nøglen til huset ude på herretoilettet på Rosie McGee's, så det er nødvendigt at køre en omvej forbi forældrerne for at hente en ekstranøgle. Det forlænger ruten, så den samlede afstand er på 9,0 km. Kilometertaksten er for lørdag nat (takst 2) 19,15 kr/km. Da taxien ankommer hos forældrene, skal Michael rende op på 3. sal, ringe på, modtage nøglen og løbe ned til taxien igen. Dette tager samlet 6 minutter (6 min). Prisen for ventetid for en taxi er 7,00 kr/min.

Og nu til matematikken:

Prisen skal udregnes. Prisen ønskes angivet i danske kr.

Starttakst: $50{,}00 \; kr$

Samlet afstand i km: $9{,}00 \; km$
Kilometertakst: $19{,}15 \; kr/km$

$$\text{Kilometerpris} = \text{Samlet afstand i km} \cdot \text{Kilometertakst}$$
$$\text{Kilometerpris} = 9{,}00 \; km \cdot 19{,}15 \; kr/km$$
$$\text{Kilometerpris} = 172{,}35 \; kr$$

Ventetid, takst: $7{,}00 \; kr/min$
Ventetid: $6{,}00 \; min$

$$\text{Ventetid, pris} = \text{Ventetid, takst} \cdot \text{Ventetid}$$
$$\text{Ventetid, pris} = 7{,}00 \; kr/min \cdot 6 \; min$$
$$\text{Ventetid, pris} = 42{,}00 \; kr$$

$$\text{Pris, total} = \text{Starttakst} + \text{Kilometerpris} + \text{Ventetid, pris}$$
$$\text{Pris, total} = 50{,}00 \; kr + 172{,}35 \; kr + 42{,}00 \; kr$$
$$\text{Pris, total} = 264{,}35 \; kr$$

Som det ses af resultatet, så er resultatet, 264,35 *kr*, angivet med enheden *kr*. Dette er vigtigt, for selvom en turist får en taxiregning, så er der ingen tvivl om at beløbet skal betales i danske kroner, og ikke i britiske pund eller svenske salttabletter.
Udover det, så er der oplysninger om en del parametre, som har indflydelse på prisen:

Hvor langt skal der køres?	Denne parameter har enheden *km*.
Hvad er kilometerprisen?	Enheden er *kr*/*km* – altså hvad er prisen i kr for hver kørt kilometer?
Pris for ventetid?	Enheden er *kr*/*min* – dvs. prisen for hvert minut der ventes (holdes stille).
Hvor lang tid ventes der?	Enheden er *min*.
Starttakst:	Enheden er bare *kr*, da starttaksten ikke er afhængig af noget andet.

Starttaksten giver sig selv. Som allerede nævnt er enheden bare kroner (*kr*). Dette er absolut forventeligt, og da resultatet også forventes at blive angivet i *kr*, så er det helt ligetil.

Kilometerpris og ventepris er til gengæld lidt mere kompliceret. I disse tilfælde afhænger prisen af noget. I det ene tilfælde er det antallet af kørte kilometer, og i det andet tilfælde antallet af minutter, som taxien har ventet.

Matematikken betragtes:

Hvis der fokuseres på tal for sig og enheder for sig, kan man anvende følgende eksempel for en af beregningerne:

$$Kilometer\ Pris = Samlet\ afstand\ i\ km \cdot Kilometertakst$$

$\Updownarrow$ I grundformlen indsættes talværdier med enheder:

$$Kilometer\ Pris = 9{,}00\,km \cdot 19{,}15\,kr\ /\ km$$

$\Updownarrow$ $\left(\begin{array}{l}\text{Der SKAL være mellemrum mellem tal og enheder, men underforstået betyder det, at der står et gangetegn ...}\\ \text{Da faktorernes orden er ligegyldig, kan følgende opskrives ...}\end{array}\right)$

$$Kilometer\ Pris = 9{,}00 \cdot 19{,}15 \cdot km \cdot \frac{kr}{km}$$

$\Updownarrow$ Når man ganger en brøk med dens nævner, så får man dens tæller ...

$$Kilometer\ Pris = 172{,}35 \cdot \cancel{km} \cdot \frac{kr}{\cancel{km}}$$

$\Updownarrow$ Igen udskiftes gangetegnet mellem tal og enhed med et mellemrum.

$$\underline{\underline{Kilometer\ Pris = 172{,}35\,kr}}$$

Dette var blot et eksempel. I det efterfølgende forklares det, hvorfor og hvordan man effektivt kan regne med enheder og hvordan man kan drage en massiv fordel af at inddrage enhederne.

SI-Systemet (Système International d'Unités)

I gamle dage, var der ingen regler for hvordan man målte længde, vægt og tid. Ofte skiftede måleenhederne mellem (endog ganske små) regioner, så man kunne forestille sig som et eksempel, at man købte et mål korn i København, men at der så ville "mangle noget" i at det kunne være det samme mål i Roskilde.

Et problem (som stadig eksisterer) kan være at nogle steder måler man en længde i kilometer, meter, centimeter og millimeter, mens man andre steder måler en længde i miles, yards, feet og inches.

Efterhånden som tiden gik, og man af både nemheds- og retfærdighedshensyn valgte at standardisere måleenheder (meter-kilogram-sekund eller MKS-Systemet), så blev det videreudviklet, og den første SI-enhed blev indført i 1960. En bevægelse for at ensrette måleenheder har for det meste i verdenshistorien bygget på franske initiativer, og oprindelsen til det – i dag mest anvendte – system i verden har rødder tilbage til omkring år 1640 – altså på vores egen Kong Christian IV's tid.

Danmark har vedtaget SI-systemet ved *Lov om mål og vægt nr. 246 af 12. maj 1976* og *Handelsministeriets bekendtgørelse nr. 320 af 21. maj 1977*, hvilket indebærer at SI-systemets størrelser og enheder skal anvendes i myndighedspublikationer, standarder, normer, undervisningsmaterialer, varedeklarationer m.v.

Det er i denne bekendtgørelse, at det bl.a. er givet, at der SKAL være mellemrum mellem tal og enheder – også procent-tegnet (%).

Der eksisterer syv forskellige grundlæggende SI-enheder:

Størrelse	Enhed	SI-Sym-bol	Definition
Længde	meter	***m***	Den distance lyset tilbagelægger i det tomme rum på 1/299 792 458 sekund.
Masse (Vægt)	kilogram	***kg***	Massen af det internationale prototypelod på 1 kg i Paris.
Tid	sekund	***s***	Varigheden af 9 192 631 770 svingninger af strålingen fra en ganske bestemt overgang i cæsium-133 atomet.
Elektrisk strøm	ampere	***A***	Den strømstyrke, der giver anledning til en kraftpåvirkning mellem to uendeligt lange parallelle ledere i afstanden 1 m fra hinanden på 2×10^{-7} N pr. meter.
Termodynamisk temperatur	kelvin	***K***	1/273,16 af den termodynamiske temperatur for vandets triplepunkt, som svarer til 0,01 °C.
Stofmængde	mol	***mol***	Antallet af atomer i 0,012 kg af kulstof-12-isotopen.
Lysstyrke	candela	***cd***	Lysstyrken i en given retning af en lyskilde, som udsender monokromatisk lys med en frekvens på 540×10^{12} Hz, og hvis strålingsstyrken i denne retning er 1/683 W/sr.

Udover de syv grundlæggende SI-enheder, findes der et utal af afledte SI-enheder. Kun et fåtal af disse vil blive beskrevet i dette notat, men et par eksempler kunne være:

Areal				m^2
Rumfang				m^3
Frekvens				s^{-1}
Energi (arbejde)	joule	J	$= N \cdot m$	$= kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$

SI-Præfikser:

Et andet brug af SI-enheder er SI-præfikser. Disse er allerede beskrevet i afsnittet om tal og mængder, men for at opsummere, så er SI-præfikser et præfiks, som kan anvendes på enhver SI-enhed for at lette notationen af meget store og meget små tal.
For yderligere information om dette emne, se afsnit 01 – Tal og mængder.

For at give et eksempel på et SI-præfiks, så kunne man – med rette – påstå, at afstanden fra Valby til Helsingør er 52300 *m* (meter). Dog vil det umiddelbart være forvirrende – dels fordi det ikke er den "traditionelle" notation, men også fordi det er en kompliceret og uoverskuelig måde at skrive det på.

Blev afstanden i stedet skrevet som 52,3 *km* (kilometer), så giver det straks mere mening. Tallet er umiddelbart blevet divideret med 1000, men til gengæld står der KILOmeter i stedet for blot meter. "Kilo" betyder altså, at tallet skal ganges med 1000 for at repræsentere "meter", som er den grundlæggende SI-enhed.

Særligt i fysikken, arbejder man ofte med bogstavrepræsentanter for forskellige størrelser.
F.eks. benævnes strækning (afstand) ofte som s, tid som t, masse som m etc.
Så hvis en opgave lyder på at en bil kører fra Valby til Helsingør, så vil det ofte skrives som at bilen har tilbagelagt strækningen $s = 52{,}3\ km$. Tager det 35 minutter, vil det skrives som at turen tog $t = 35\ min$.

Da matematik er et værktøj, som bruges i de andre fag – særligt i de naturvidenskabelige fag – er størrelser og præfikser derfor også essentielle i dagligdagens matematik.

Størrelser og præfikser

Størrelse	Størrelse-symbol	SI-enhed	SI-symbol
Strækning	*s*	Meter	*m*
Tid	*t*	Sekunder	*s*
Masse	*m*	Kilogram	*kg*
Stofmængde	*n*	Mol	*mol*
Temperatur, kelvin	*T*	Kelvin	*K*

Størrelse	Størrelse-symbol	SI-enhed	SI-symbol
Hastighed	*v*	m/s	*m/s*
Acceleration	*a*	m/s^2	m/s^2
Kraft	*F*	Newton	*N*
arbejde, energi	*A, E*	Joule	*J*
Effekt	*P*	Watt	*W*
Temperatur, celsius	*t*	Celsius	*°C*
Varmemængde	*Q*	Joule	*J*
Varmekapacitet	*C*	J/K	*J/K*
Specifik varmekapacitet	*c*	J/(kg·K)	*J/(kg·K)*
Densitet	*ρ*	kg/m3	*kg/m3*
Tryk	*p*	Pascal	*Pa*
Stofmængde koncentration	*c*	mol/L	*mol/L*
Molarmasse	*M*	Molar, g/mol	*M, g/mol*
Molarvolumen	*Mv*	mol/L	*mol/L*
Volumen	*V*	Liter (ikke SI)	*L*

Fysiske størrelser

Som det allerede er antydet, så giver en fysisk størrelse kun mening, hvis den består af en talværdi samt en enhed.

For eksempel måles massen af en bil til at være 1800 kilogram (kg). Dette måles vha. simpel vejning. I dette tilfælde er den fysiske størrelse: **masse** bestående af talværdien 1800 og SI-enheden *kg*.

Ofte bruges symbolerne bare for at spare tid:
F.eks. kan man vha. en fysisk formel bestemme hastigheden af en gennemsnitlig bevægelse:

$Fart = \frac{Strækning}{Tid}$. Skal man udføre den samme udregning mange gange, bliver man hurtigt træt af at skrive så meget. Så er det nemmere (og præcis lige så korrekt) at skrive: $v = \frac{s}{t}$.

Det er således nemt at bestemme farten, hvis man kender strækningen man har kørt og den tid, det har taget at køre denne strækning. Er strækningen lig med de 52,3 *km* fra før og tiden det tager at køre strækningen 50 minutter, skrives det som: s = 52,3 *km* og t = 50 minutter.

De 50 minutter kan omskrives til: $t = 35\,min = \frac{35\,min}{60\frac{min}{t}} = \frac{35}{60}t \approx 0{,}58\bar{3}t$

Altså er hastigheden: $v = \frac{s}{t} = \frac{52{,}3\,km}{0{,}58\bar{3}t} = \underline{\underline{89{,}66\frac{km}{t}}}$.

Så det er altså relativt nemt at regne med enheder. Det er dog ekstra fascinerende, at man kan gentage beregningen UDEN TAL, og altså udelukkende med enhederne. Det er jo "nemt" at forestille sig, at alle talværdierne er lig med 1. Husk, at mellemrummet mellem tallet og enheden i virkeligheden repræsenterer et gangetegn, og hvis alle talværdier er lig med 1, så er regnestykket stadig gyldigt.

Da $\boldsymbol{t}$ kan udregnes som: $\boldsymbol{t} = \frac{min}{\frac{min}{t}} = t$ (Bemærk at $\boldsymbol{t}$ symboliserer tiden, og t symboliserer timer.)

Da fås:

$$v = \frac{s}{t} = \underline{\underline{\frac{km}{t}}}$$

Det er ikke overraskende. Alle ved, at en bils hastighed måles i kilometer i timen. Nu er det bare udregnet. Og hvorfor nu det? Er det ikke netop indlysende at en bils hastighed måles i *km*/*t*?

Jo, det er voldsomt indlysende. Nu skal man huske på, at fysiske formler ofte er langt mere komplicerede end denne: $v = \frac{s}{t}$, så hvad er det, der er så godt ved at udføre enhedsregnskabet?

Hvad nu, hvis man kom frem til at resultatet IKKE gav *km*/*t* ? Tja, så er det vel lige så indlysende, at der undervejs i udregningen ville have indsneget sig en regnefejl. Faktisk kan man påstå, at hvis enhedsregnskabet stemmer, så er der over 95 % chance for, at udregningen er korrekt. Der er en meget lille risiko for, at en evt. regnefejl ville ende med at resultatet ville have den korrekte enhed, så HVIS resultatet er forkert, så er der størst chance for, at fejlen kan findes i en fejlagtig indtastning på lommeregner eller pc.

Derfor er det altid en god ide at udføre enhedsregnskabet. Om ikke andet, så for en kontrol af det opnåede facit.

Et andet eksempel kunne være, at man kendte hastigheden og strækningen og at man gerne ville udregne den tid det ville tage at køre denne strækning med en bestemt gennemsnitlig hastighed.

Givet at den gennemsnitlige hastighed er 75 *km*/*t* og at strækningen er 35 *km*.

Dette kræver en omskrivning af den fysiske formel fra før. Først bemærkes det, at de tre informationer som indgår i problemet er netop de tre størrelser, som formlen indeholder. Da to af disse værdier er givet, kan den tredje nemt udregnes:

$$v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow v \cdot t = \frac{s \cdot \cancel{t}}{\cancel{t}} \Leftrightarrow v \cdot t = s \Leftrightarrow \frac{\cancel{v} \cdot t}{\cancel{v}} = \frac{s}{v} \Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$$

$\Updownarrow$ (Indsætter talværdier (med enheder))

$$t = \frac{35\,km}{75\,\frac{km}{t}} = \frac{35}{75} \cdot \cancel{km} \cdot \frac{t}{\cancel{km}} = \frac{35}{75}t = \frac{7}{15}t$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{t = 0{,}46\,t}}$$

I dette tilfælde regnes eksemplet ikke igennem udelukkende med enhederne, men det er tydeligt at se, at enhederne stemmer, idet den udregnede tid er angivet i timer, hvilket jo var forventeligt.

En hurtig overslagsregning fortæller ydermere, at facit med stor sandsynlighed er korrekt. Havde hastigheden været 70 *km*/*t*, er det indlysende, at det ville have taget ½ time at køre strækningen. Nu er hastigheden lidt større, så det passer med at resultatet er lige i underkanten af ½ time.