MATEMATIK

NOTAT

04 - LIGNINGER

AF:

CAND. POLYT.

MICHEL MANDIX

SIDSTE REVISION: AUGUST 2019

Indholdsfortegnelse:

Ligninger

Mange gange om dagen, hver eneste dag 24/7, udregner man ligninger – bevidst eller ubevidst – for at komme igennem hverdagen. Eksempler kan være: Man står i supermarkedet, og skal regne ud, om man har råd til 2 eller 3 liter letmælk. Som nævnt i et tidligere afsnit, kan man stå og vurdere lidt på, om man har råd til at tage en taxi hjem. Andre eksempler kan være: Telefonregninger, transporttider, madopskrifter, benzinforbrug etc.

Nogle gange regner man rent faktisk på de forskellige situationer, men mange gange afgør man situationen med sig selv, baseret på sund fornuft og måske lidt matematisk baggrundsviden.

Hvad er en ligning?

Matematiske "sætninger" kan skrives på mange måder. Afhængigt af, hvad det er, man forsøger at udtrykke, findes der en korrekt matematisk opskrivningsmetode.

Der findes mange typer matematiske tekster. Nogle indeholder variable, mens andre er mere simple.

Åbne og lukkede udtryk og udsagn.

Ved lukkede udsagn forstås sammenstillinger af ord eller symboler, som udtrykker en påstand, som kan være sand eller falsk. Disse kan skrives som (dansk) tekst eller med matematiske symboler:

Eksempler: I 2009 var der flere tyskere end danskere. (Sandt, lukket udsagn.)
Danmark er en by i Frankrig. (Falsk, lukket udsagn.)
$2+2=4$ (Sandt, lukket udsagn.)
$2+2=5$ (Falsk, lukket udsagn.)

Det lukkede udsagn $2+2=4$, der er sandt, består af to lukkede udtryk eller navne: "$2+2$" og 4. Disse to lukkede udtryk forbindes af lighedstegnet

Ofte vil man i matematikken benytte variable. Disse repræsenterer flere navne på en gang. Dette er meget praktisk, når der skal udføres gentagne beregninger, hvor et eller flere af størrelserne ændres for hver beregning. Ofte ser man *x*, *y* og *z* repræsentere vilkårlige hele tal.
Ved skriftlig fremstilling, skrives variable altid i kursiv!

Idet man indfører variable, så giver det også meget mere fleksibilitet i det skriftlige sprog. Dermed fremkommer åbne udtryk og åbne udsagn.

Eksempler: $2x+3$ (Åbent udtryk)
$2x+3=5$ (Åbent udsagn)

Så for at opsummere: En simpel udregning kaldes for et udtryk. Det kendetegnes ved ikke at indeholde komparative operatorer såsom lighedstegn, ulighedstegn etc. Indeholder udtrykket kun tal og ingen konstanter, kaldes det for et lukket udtryk, hvorimod det kaldes for et åbent udtryk såfremt der indgår variable.

Udtryk:	Lukket udtryk:	$2+2$	*(Uden variable)*
(Uden lighedstegn)	Lukket udtryk:	27	*(Uden variable)*
	Åbent udtryk:	$2x+3$	*(Med variable)*
	Åbent udtryk:	$8x$	*(Med variable)*
Udsagn:	Lukket udsagn:	$2+2=4$	*(Uden variable)*
(Med lighedstegn)	Åbent udsagn:	$2x+3=5$	*(Med variable)*

Når man har to udtryk, kan de sættes sammen til et udsagn vha. en af de komparative operatorer.

Disse er:

$=$	Lig med …
$<$	Mindre end …
$\leq$	Mindre end eller lig med …
$>$	Større end …
$\geq$	Større end eller lig med …
$\neq$ (eller $<>$)	Forskellig fra (ikke lig med) …

(I dette notat omtales udelukkende "Lig med" $(=)$)

Som antydet, så vil dette ende i et udsagn:

Kombinationer af to lukkede udtryk:

$2+2=4$	*Sandt*	"*Sandt*" og "*Falsk*" kan bruges om lukkede udsagn
$5-2=8$	*Falsk*	
$7=7$	*Sandt*	
$10=-10$	*Falsk*	
$1000<6000$	*Sand*	
$2>4$	*Falsk*	
$2\geq 2$	*Sandt*	
$4\leq 250$	*Sandt*	

Kombinationer af to åbne udtryk:

$2x+4=-4x+6$

$x=-5x-10$

Kombinationer at et åbent udtryk og et lukket udtryk_

$8x=4$

$2x-4=0$

$x=0$

En ligning indeholder et lighedstegn, og er således et udsagn. Man kan også sige, at der er fremsat en påstand om, at de to sider er værdimæssigt ens.

En meget vigtig ting om at ligninger er udsagn er netop, at et udsagn kan vurderes som sandt eller falsk. Afhængigt af opgavens type, kan man sagtens komme ud for en situation, hvor lighedstegnet ikke er sandt. Det er naturligvis forvirrende, for der står gerne en matematiklærer og siger, at ET LIGHEDSTEGN SKAL ALTID TALE SANDT, og det er for så vidt også fuldstændig korrekt, når man arbejder med traditionel matematik og ligningsløsning.

Men i anvendt matematik sker det, at man skal påvise at f.eks. en linje går igennem et bestemt punkt. Det gør man ved at indsætte hhv. punktets *x*- og *y*-værdi i linjens ligning for at se om det stemmer. HVIS det stemmer, så er punktet beliggende på linjen, men HVIS DET IKKE STEMMER, så er det jo ”bare” et udtryk for, at punktet ikke er beliggende på linjen. Det betyder ikke nødvendigvis, at der er blevet begået en matematisk fejl.

En ligning kan også kaldes for en identitet eller et udsagn. En matematisk **ligning** er et udtryk som fastslår at to udtryk (ofte kaldet hhv. venstre og højre *side* af ligningen) er lige store, skrevet op på formen:

(Det ene udtryk) = (det andet udtryk).

Almindeligvis indgår én eller flere *ubekendte* talstørrelser, repræsenteret ved et eller flere bogstaver (ofte *x*, men det kan sagtens være alle mulige andre bogstaver – særligt, hvis man støder på samme matematiske problem i et andet fag. I kemi regner man f.eks. på koncentrationer, og de benævnes *c*).

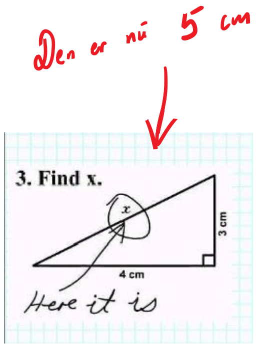
Man kan sammenligne en ligning med en vippe på en legeplads eller en gammeldags vægt. Idet der i ligningen indgår et **lighedstegn**, betyder det, at alt det, som står på **venstre** side af lighedstegnet **SKAL** være lig med alt det, som står på **højre** side af lighedstegnet. Lighedstegnet betyder således ikke, at det på den ene side giver det resultat, som står på den anden side. **Lighedstegnet betyder, at DE TO SIDER SKAL HAVE SAMME VÆRDI!** Dette er meget vigtigt! Det er hele grundlaget for forståelsen af, hvad ligninger skal bruges til.

Hvis der på en vippe i ligevægt, sætter sig en dreng på 40 *kg* på den ene side af vippen, så vil vippen tynges ned i den ende. Vippen er ikke længere i ligevægt! Hvis man ser bort fra den mulighed at drengen stiger ned fra vippen igen, så er den eneste mulighed for at vippen igen kommer i ligevægt, at der på den anden side af vippen sætter sig en dreng eller en pige, som også vejer 40 *kg*. Hvis det sker, så er vippen igen i ligevægt.

Med andre ord, så er vippen i ligevægt hele tiden, hvis de to sider løbende bliver identisk belastet!

Det er præcis det samme, som gør sig gældende med ligninger.

Løsning af ligninger



Som allerede nævnt, kan der i en ligning indgå en eller flere ubekendte størrelser. Ofte kaldes den (hvis der kun er én) for *x*, men det er langtfra altid tilfældet. Der er mange måder at forklare på, hvad det vil sige at løse en ligning. En af de mest gængse, får man i folkeskolen: Denne forklaring går ud på at man skal ”finde *x*”. Man lærer efterfølgende at isolere *x*, så man til sidst har facit *x* = ”En eller anden talværdi”.

De elever, som har interesseret sig lidt mere for, hvad det vil sige at løse en ligning, har garanteret bemærket, at den *x*-værdi, som man finder frem til er netop den *x*-værdi, hvor den grafiske afbildning af problemet, skærer *x*-aksen.

Denne sidste betragtning, er medvirkende til en god og korrekt forklaring på, hvad det vil sige at løse en ligning.

Her er det nødvendigt at forklare lidt om, hvad man kan bruge en ligning til. Bare rolig, det bliver beskrevet mere detaljeret i et senere afsnit.

En ligning kan – som også tidligere beskrevet) bruges til at udregne en talværdi – gerne på baggrund af et input i form af den ukendte variabel – f.eks. *x*. Det er næppe overraskende, at resultatet afhænger af, hvilken *x*-værdi, som man indsætter i ligningen.

Et eksempel kan være:

En Jaguar (X300 fra 1995) bruger ifølge on-board-computeren 13,5 *l* benzin for at køre 100 *km*. Benzinforbruget kan således beregnes som:

$$Forbrug\ \frac{l_{benzin}}{100\,km} = 13{,}5\frac{l_{benzin}}{100\,km}$$

$\Updownarrow$

$$Forbrug\ \frac{km}{l_{benzin}} = \frac{100}{13{,}5}\frac{km}{l_{benzin}}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{Forbrug\ \frac{km}{l_{benzin}} = 7{,}4\frac{km}{l_{benzin}}}}$$

Dvs. at den kører 7,4 *km* per l_{benzin}. Hvis man vil vide hvor langt man kan køre med en bestemt mængde benzin kan følgende ligning opskrives:

$Distance = 7{,}4\frac{km}{l_{benzin}} \cdot x\, l_{benzin}$, hvor *x* er mængden af benzin i tanken målt i liter.

Hvis der er 10 *l* i tanken, kan man køre:

$$Distance = 7{,}4\frac{km}{l_{benzin}} \cdot x$$

$\Updownarrow$

$$Distance = 7{,}4\frac{km}{l_{benzin}} \cdot 10\ l_{benzin}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{Distance = 74\ km}}$$

Er der derimod 20 *l* i tanken, kan man køre:

$$Distance = 7{,}4\frac{km}{l_{benzin}} \cdot x$$

$\Updownarrow$

$$Distance = 7{,}4\frac{km}{l_{benzin}} \cdot 20\ l_{benzin}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{Distance = 148\ km}}$$

Hvis man er løbet tør for benzin, fås følgende ligning:

$$Distance = 7{,}5\frac{km}{l_{benzin}} \cdot x\, l_{benzin}$$

$\Updownarrow$

$$Distance = 7{,}5\,\frac{km}{l_{benzin}} \cdot 0\ l_{benzin}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{Distance = 0\ km}}$$

… hvilket ikke er overraskende, da man ikke kommer langt i en benzindrevet bil uden benzin. I dette eksempel er resultatet lig med 0 *km*, og man kan sige, at udsagnet giver resultatet 0 *km*.
Indsættes sammenhængen mellem benzinforbrug og distance i et koordinatsystem, viser det sig også, at der er tale om en lineær sammenhæng, som går igennem origo. Dette kaldes også for en *ligefrem proportionalitet.*

Udsagnets resultat er altså afhængigt af den ubekendte variabel. I dette eksempel mængden af brændstof i tanken. Derfor kaldes den ubekendte variabel (her: *x*) for den uafhængige variabel, mens resultatet, der jo indsættes som *y*-værdien i koordinatsystemet kaldes for den afhængige variabel. Den kaldes således, fordi den er afhængig af, hvad *x* (dvs. den uafhængige variabel) er.

På en eller anden måde (hvilket betyder, at man af og til kan skyde en matematisk genvej, så det ikke nødvendigvis vil se sådan ud), så vil en ligning altid kunne løses ved at omskrive ligningen, så der kommer til at stå 0 (nul) på den ene side (oftest den højre side).

Givet et mere teoretisk eksempel:

$$2x - 6 = -4$$

Skal denne ligning løses efter alle kunstens regler, skal ligningen omskrives således, at den ene side af ligningen giver 0 (nul). Husk, at dette betyder, at BEGGE sider skal have værdien 0.

For at repetere teorien bag ligningsløsning, så kan man gøre mange forskellige ting (mere om det senere), bare man gør det på BEGGE SIDER af lighedstegnet.

I dette tilfælde lægges der 4 til på begge sider.
På højre side betyder det, at der står: $-4+4$, hvilket giver 0.
På venstre side betyder det, at der kommer til at stå: $2x-6+4$.
Led med variable og led med tal behandles hver for sig, så $2x-6+4$ kan omskrives til: $2x-2$.

I folkeskolen forklares dette ofte som at "flytte et led over på den anden side og skifte fortegn". Det kan da også se sådan ud, men egentlig er den forklaring noget værre vrøvl. Har man et led på f.eks. -4, så kan det neutraliseres ved at lægge 4 til. -4 + 4 = 0, men da man er nødt til at udføre operationen på begge sider af lighedstegnet, kan det godt tolkes som at "flytte leddet over og skifte fortegn", men det er i virkeligheden kun "den synlige virkning af at lægge et led til eller trække et led fra" for at neutralisere et led.

Resultatet af dette bliver således:

$$2x - 6 = -4$$

$\Updownarrow$

$$2x - 6 + 4 = -4 + 4$$

$\Updownarrow$

$$\underline{2x - 2 = 0}$$

Nu er ligningen omskrevet, så den ene side er lig med 0. Som allerede nævnt, så kan man i visse tilfælde opleve, at dette ikke er nødvendigt – eller at det endda gør udregningen mere kompliceret.

Ligningen er dog langt fra løst. For at løse ligningen er det nødvendigt at isolere den ubekendte variabel – i dette tilfælde x.

Igen handler det om at udføre identiske operationer på begge sider af lighedstegnet.

Først lægges der 2 til på begge sider for at neutralisere de $''-2''$ som står på venstre side.

$$2x-2=0$$
$$\Updownarrow$$
$$2x-2+2=0+2$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{2x=2}$$

Nu er det led, hvor x forekommer isoleret, men det er ikke interessant hvor meget "$2x$" er. Det er kun spændende at vide, hvor meget x er. Derfor divideres med 2. Som altid er det vigtigt at det gøres på begge sider:

$$2x=2$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{2x}{2}=\frac{2}{2}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{x=1}}$$

Løsningen på ligningen er altså: $\underline{\underline{x=1}}$.

Ser man på igen på, hvordan man indtegner en ligning i et koordinatsystem, så er resultatet af ligningen når man sætter en x-værdi ind den værdi, som i koordinatsystemet indtegnes som den y-værdi, der hører til den x-værdi der er blevet indsat.

Husk, at man løser en ligning ved at omskrive den, så en af siderne er lig med 0. Det betyder så, at skal man indtegne denne løsning i et koordinatsystem, så er det på forhånd givet, at resultatet af udregningen skal være lig med 0. Dette betyder så igen, at i den grafiske afbildning, så er y-værdien lig med 0 for denne løsning.

Når y-værdien er lig med 0, så er det helt sikkert, at man befinder sig et eller andet sted på x-aksen. Se blot på et almindeligt kartesisk koordinatsystem. Uanset hvor på x-aksen man peger, så vil y-værdien være lig med 0. Det er derfor man i folkeskolen har fået at vide, at løsningen på en ligning er "*skæring med x-aksen*", men dette er sådan set kun et biprodukt af at have løst ligningen. Pointen er, at man søger de steder på x-aksen (de x-værdier), hvor ligningen har resultatet 0. Med andre ord: De steder, hvor den grafiske afbildning skærer x-aksen.
Dette er væsentligt at forstå i forbindelse med ligningsløsning!

Regneregler for løsning af ligninger

Som det allerede er antydet, så kan man gøre næsten hvad man vil med en ligning, så længe man gør det på begge sider af lighedstegnet.

Selvom der er relativt frie hænder mht. ligningsoperationer, beskrives kun nogle af dem i dette notat. Flere ligningsoperationer vil blive introduceret i undervisningen senere.

Til alle tider er det vigtigste at alt hvad man gør, at man husker at gøre det på begge sider af lighedstegnet.

Addition:
Man må lægge det samme tal til på begge sider af lighedstegnet:

Eksempel:

$$x - 5 = 8$$

$\Updownarrow$

$$x - 5 + 5 = 8 + 5$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{x = 13}}$$

Som tidligere nævnt, kan det være værd at bemærke, at denne operation ofte (fejlagtigt) refereres til som at: "flytte et led over på den anden side af lighedstegnet og skifte fortegn". I dette tilfælde kan det ses, som at der står $"-5"$ på venstre side i ligningen. Hvis man er lidt øvet, så plejer man ikke at skrive: $"-5+5"$, så det ignoreres bare. På højre side af ligningen optræder pludselig: $"+5"$, så for det utrænede øje, kan det godt se ud som om at leddet flytter side og skifter fortegn.

Subtraktion:
Man må trække det samme tal fra på begge sider af lighedstegnet:

Eksempel:

$$x + 6 = 8$$

$\Updownarrow$

$$x + 6 - 6 = 8 - 6$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{x = 2}}$$

Som tidligere nævnt, kan det være værd at bemærke, at denne operation ofte (fejlagtigt) refereres til som at: "flytte et led over på den anden side af lighedstegnet og skifte fortegn". I dette tilfælde kan det ses, som at der står $"+6"$ på venstre side i ligningen. Hvis man er lidt øvet, så plejer man ikke at skrive: $"+6-6"$, så det ignoreres bare. På højre side af ligningen optræder pludselig: $"-6"$, så for det utrænede øje, kan det godt se ud som om at leddet flytter side og skifter fortegn.

HUSK, at se godt på fortegnene. Det er en meget almindelig fejl at overse fortegnene i en situation som denne …

Multiplikation:
Man må gange det samme tal til på begge sider af lighedstegnet. **Dog må dette tal IKKE VÆRE 0**:

Eksempel:

$$\frac{1}{5}x = 2$$

$\Updownarrow$

$$\frac{1}{5}x \cdot 5 = 2 \cdot 5$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{x = 10}}$$

Vær opmærksom på, hvis der er flere led på den ene side i en ligning. Da skal ALLE led, ganges! Muligvis er man i folkeskolen stødt på udtrykket: ”gange over kors”. Dette er et trick, som kan bruges, hvis begge sider af ligningen er skrevet som brøker.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$$

Bevis:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow bd\cdot\frac{a}{b}=bd\cdot\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{bda}{b}=\frac{bdc}{d} \Leftrightarrow ad=bc \qquad Q.E.D.$$

I det virkelige liv, vil man nok være mere interesseret i at standse på halvvejen, dvs.:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{a=\frac{bc}{d}} \text{ eller } \underline{c=\frac{ad}{b}} \text{ eller } \underline{b=\frac{ad}{c}} \text{ eller } \underline{d=\frac{bc}{a}}$$

Division:

Man må dividere med det samme tal til på begge sider af lighedstegnet.

Dog må dette tal IKKE VÆRE 0:

Eksempel:

$$5x=15$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{5x}{5}=\frac{15}{5}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{x=3}}$$

Det er en af de grundlæggende dødssynder i matematik, hvis man dividerer med 0.

Vær opmærksom på, hvis der er flere led på den ene side i en ligning. Da skal ALLE led, divideres!

Uden at beskrive flere operationer, kan kort nævnes: Uddragning af n’te rod (herunder kvadratrod), opløftning i n’te potens, logaritme samt mange andre.

Regler:

a) Man må lægge det samme tal til på begge sider af lighedstegnet:
b) Man må trække det samme tal fra på begge sider af lighedstegnet:
c) Man må gange det samme tal til på begge sider af lighedstegnet. **Dog må dette tal IKKE VÆRE 0**:
d) Man må dividere med det samme tal til på begge sider af lighedstegnet. **Bortset fra 0**.
e) Man må altid reducere en enkelt side af ligningen, idet det ikke ændrer udtrykkets værdi.

I matematikopgaver, kan man med fordel anvende følgende fremgangsmåde når man løser ligninger:

1) Skriv **altid** grundformlen. (Dette er smart, for når man skal læse til eksamen, så er der ingen tvivl om, hvor formlen kommer fra, hvis man har skrevet grundformlen.)
2) Omskriv grundformlen, så den kommer til at stå på den form man ønsker. Med andre ord, så er det her, at man kan isolere den ønskede variabel.
3) Indsæt (hvis det er nødvendigt) de aktuelle variabelnavne, som er gældende i opgaven.
4) Indsæt talværdier.
5) Udregn facit.

Er der behov for yderligere mellemregninger for at øge overskueligheden, så kan de frit indsættes. Det vigtigste er, at ovenstående rækkefølge bliver overholdt. Dels for at minimere fejl, men også for at indarbejde en vane, så det til sidst bliver rutine at løse en simpel ligning.

Eksempel: (Det er ikke vigtigt at forstå selve matematikken endnu ... Bare se på opstillingen.)

Givet en trekant $\triangle RST$ med følgende værdier: $R = 35°$, $r = 9$ og $S = 87°$.

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} \qquad \text{(Grundformel)}$$

$\Updownarrow$

$$b = \frac{a \cdot \sin(B)}{\sin(A)} \qquad \text{(Omskrevet grundformel)}$$

$\Updownarrow$

$$s = \frac{r \cdot \sin(S)}{\sin(R)} \qquad \text{(Indsætter aktuelle variabelnavne)}$$

$\Updownarrow$

$$s = \frac{9 \cdot \sin(87°)}{\sin(35°)} = \frac{9 \cdot 0{,}9986}{0{,}5736} \qquad \text{(Indsætter talværdier)}$$

$\Updownarrow$

$$s = \frac{8{,}9877}{0{,}5736} \qquad \text{(Reducerer)}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{s = 15{,}7}} \qquad \text{(Udregner facit)}$$

Ensbetydende ligninger

I de eksempler, som er vist i dette afsnit, optræder der flere gange denne pil: $\Updownarrow$. Denne pil kaldes for en biimplikation. I matematisk notation kan den forekomme både vandret og lodret: $\Updownarrow$ eller $\Leftrightarrow$.

Denne type pil bruges, når en ligning omskrives til en anden ligning, som har præcis de samme løsninger.

$$x - 5 = 8$$

$\Updownarrow$

$$x - 5 + 5 = 8 + 5$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{x = 13}}$$

I ovenstående tilfælde (som er brugt tidligere i dette notat), bemærkes det, at den øverste linje beskriver at: $x - 5 = 8$. Sagt på dansk betyder det, at man har et tal, x, hvilket man trækker 5 fra, og får resultatet 8.

Ser man i stedet på den midterste linje, så er det givet at: $x-5+5=8+5$. Det er måske voldsomt indlysende, men her står, at hvis man har et tal, *x*, og trækker 5 fra og lægger 5 til, så får man resultatet $8+5$. Da udsagnet stadig stemmer, kan man siger, at det – matematisk set – er fuldkommen ligegyldigt om man vælger at bruge den første eller den anden linje – de er begge gyldige og siger begge præcis det samme.

Tager man den tredje linje med, så står der, at $x=13$. Det er stadig gyldigt, og i princippet er det præcis det samme, der står i den første linje.

Fordi det er "det samme" der står i de tre linjer, skrives der en dobbeltpil (biimplikation) imellem dem, for at vise, at linjerne betyder det samme. At der er tre linjer, er for at vise progressionen i udregningen med et antal mellemregninger. Man kan også sige, at de tre linjer i ligningen har den samme løsning, men idet der er brugt "lovlige metoder" til at omskrive ligningen, så er det den samme ligning, og der skrives biimplikationspile imellem linjerne.

Det er vigtigt at forstå, at **DER ER FORSKEL PÅ BIIMPLIKATIONER OG LIGHEDSTEGN**.

Lighedstegn fortæller, at to størrelser er identiske (også selvom de er skrevet på forskellige måder), mens biimplikationer beskriver sammenhængen mellem to udsagn.

Man kan også sige, at hvis linje 1 gælder, så gælder også linje 2 – OG OMVENDT!

Nulreglen

"Et produkt er lig med nul hvis og kun hvis en (eller flere) af faktorerne er lig med nul".

Af og til kan man meget nemt løse relativt komplicerede ligninger. Særligt i forbindelse med ligninger af 2. orden (andengradsligninger) og derover, kan man af og til slippe trolig nemt over det.

Forudsætningen for at kunne drage fuld fordel af nulreglen er, at man har kendskab til hvordan man **faktoriserer**.

Faktorisering:

Et tal kan opløses i faktorer. Dette er især brugbart, når der skal regnes med kvadratrødder.

Når et udtryk består af to eller flere led, kan det hænde, at leddene har en faktor til fælles. Hvis det er tilfældet, kan denne fælles faktor sættes uden for en parentes.

Eksempel – Tal opløses i faktorer:
Se på tallet 36. Hvis det skal opløses i faktorer (husk at faktorer er ingredienserne i et multiplikationsstykke), så undersøges det, hvilke tal som går op i 36. De nemme gæt er altid 2 og 3, for de går ofte op i større tal. Til sidst vil det dog vise sig, at alle faktorerne skal være primtal. (Tal, hvor kun tallet selv og tallet 1 går op i).

$$36=2\cdot18=2\cdot2\cdot9=2\cdot2\cdot3\cdot3$$

Så i princippet kunne man, hver gang man skulle skrive tallet 36 i stedet skrive $2\cdot2\cdot3\cdot3$, for det er jo lige vist, at det er det samme. Dog nok lidt besværligt i længden. Bemærk, at både tallet 2 og tallet 3 er primtal.

Som et andet eksempel betragtes tallet 34.

$$34=2\cdot17$$

Da både tallet 2 og tallet 17 er primtal, kan der ikke faktoriseres yderligere.

Til sidst skal tallet 19 faktoriseres.

Men da der ikke er noget tal, som er mindre end 19 som går op i 19 (bortset fra tallet 1, som jo går op i alle tal), så er det i forvejen et primtal og kan ikke faktoriseres.

Eksempel – Multiple faktorer opløses i endnu flere faktorer:
Se på udtrykket $12x^2$. I virkeligheden står der $12 \cdot x^2$, så det er i virkeligheden to ”tal”, som multipliceres. Det ene tal er 12 og det andet ”tal” er x^2.

Tallet 12 faktoriseres som allerede beskrevet, men x^2 er det samme som $x \cdot x$. Faktoriseringen bliver derfor:

$$12x^2 = 2 \cdot 6 \cdot x^2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x$$

Eksempel – Multiple led opløses i faktorer:
Se på udtrykket $12 + 4x$. I virkeligheden står der $12 + 4 \cdot x$, så det er i virkeligheden to ”tal”, som adderes. Det ene tal er 12, hvilket kan skrives som $4 \cdot 3$. Det kunne godt være faktoriseret yderligere til: $2 \cdot 2 \cdot 3$, men det er ikke nødvendigt i dette eksempel. Hele udtrykket derfor kan skrives som: $4 \cdot 3 + 4 \cdot x$.
Der er stadig to led (adskilt af plus-tegnet), og det ses at faktoren 4 indgår i begge led. Derfor kan faktoren 4 sættes udenfor en parentes:

$$12 + 4x = 4 \cdot 3 + 4 \cdot x = 4(3 + x)$$

Husk, at der underforstået er et gangetegn mellem faktoren og parentesen: $4(3+x) = 4 \cdot (3+x)$, så det der er sket er, at et udtryk, som oprindeligt bestod af to led (et plusstykke) nu består af to faktorer (et gangestykke). Deraf navnet: faktorisering.

Vil man se om man har faktoriseret korrekt, kan man ganske enkelt gange faktoren foran parentesen ind i parentesen igen og kontrollere om man når frem til udgangspunktet:

$$4(3 + x) = 4 \cdot 3 + 4 \cdot x = 12 + 4x$$

Tilbage til nulreglen …

Det er nu vist, hvordan man kan faktorisere et eller flere led så udtrykket ender med at blive et produkt i stedet for en sum eller en differens.

Det er her, at nulreglen er meget praktisk:

Eksemplet fra før fortsætter:

$$12 + 4x = 4 \cdot 3 + 4 \cdot x = 4(3 + x)$$

Det er naturligvis muligt at løse ligningen $12 + 4x = 0$ på normal vis, og man kan jo også sagtens forestille sig, at det er en væsentligt mere kompliceret ligning i en anden sammenhæng, men her løses ligningen:

$$12 + 4x = 0$$

$\Updownarrow$ Trækker 12 fra på begge sider

$$4x = -12$$

$\Updownarrow$ Dividerer med 4 på begge sider

$$\underline{\underline{x = -3}}$$

Man kunne i stedet (med fordel) anvende nulreglen. Som allerede nævnt, så siger reglen, at hvis et produkt giver nul, så må mindst én af faktorerne være lig med nul.

$12+4x=4(3+x)$

Skrives ligningen på den faktoriserede form fås:

$4(3+x)=0$

Det er altså et produkt, som er lig med 0.

Når ligningen er blevet faktoriseret, består det (i dette tilfælde) af to "tal" eller faktorer. Det ene tal er 4 og det andet "tal" er $(3+x)$.

Nulreglen siger, at mindst en af faktorerne er nul. Det ene produkt er lig med 4, så det kan ikke være lig med 0. Det andet produkt er lig med $(3+x)$, så det undersøges, om det kan give 0.

$(3+x)=0$

$\Updownarrow$ Da parentesen ikke er nødvendig fjernes den. (Plusparentes)

$3+x=0$

$\Updownarrow$ Trækker 3 fra på begge sider

$\underline{\underline{x=-3}}$

Det kan argumenteres, hvor meget man "sparer" ved at benytte nulreglen i dette eksempel. Det er en rimelig diskussion, da det er et meget simpelt og nemt eksempel, men se på et mere kompliceret eksempel.

Givet ligningen:

$x^2+4x=0$

Dette er en andengradsligning, og vil normalt kræve et mere avanceret formelapparat for at kunne løses. Det bemærkes dog, at der kun er to led (der er normalt tre), og at begge led indeholder faktoren *x*.

Udtrykket faktoriseres:

$x^2+4x=0$

$\Updownarrow$

$\underline{x(x+4)=0}$

Det er nu muligt – i stedet for at køre det noget mere komplicerede formelapparat til løsning af andengradsligninger – at løse denne ligning (næsten som hovedregning).
Betragtes ligningen, så skal mindst én af de to faktorer være lig med 0, idet produktet er lig med 0.

Så enten er $x=0$, hvilket der ikke er noget hokus-pokus i: $\underline{\underline{x=0}}$, eller også er $(x+4)=0$.

$(x+4)=0$

$\Updownarrow$

$\underline{\underline{x=-4}}$

Naturligvis kan *x* ikke være lig med 0 og lig med –4 på samme tid, så løsningen skrives:

$\underline{\underline{x=0 \vee x=-4}}$, hvor det matematiske tegn "$\vee$" betyder "eller".

Opgaver

Opgave L01 Ligninger og uligheder (Udtryk og udsagn)

Afgør om hvert af følgende udtryk er et udsagn og angiv i bekræftende fald sandhedsværdien (Sand//Falsk).

a)	$0 \in \mathbb{Z}$	**b)**	0 er et lige tal
c)	$\varnothing \in \{\varnothing\}$	**d)**	36546788 er et stort tal
e)	$3^2 > 2^3$	**f)**	$\sqrt{7} = 2,64575$
g)	For alle $x \in \mathbb{R}$ er $\frac{x-1}{x-1} = 0$	**h)**	$924563^2 = 98345644354$
i)	$\frac{1}{100}$ er et lille tal	**j)**	Når en trekant er ligebenet er den også ligesidet

-- **Opgave slut** --

Opgave L02 Ligninger og uligheder (Mængdebyggeren)

Bestem grundmængden for følgende udtryk:

a) $\frac{1}{x}$

b) $\frac{1}{x-3}$

c) $\frac{1}{3-x}$

d) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

e) $\frac{1}{\sqrt{x-3}}$

f) $\frac{1}{\sqrt{3-x}}$

-- **Opgave slut** --

Opgave L03 Ligninger og uligheder (Ligninger med 1 ubekendt)

Bestem grundmængde og *x* i følgende ligninger:

a) $-4x-(-10+8x)=(8-16x)-(14-6x)$

b) $15+(2x-5)9=5(2x+7)+12+3$

c) $3x-12=5\left[x-3(7-2x)-7\right]$

-- **Opgave slut** --

Opgave L04 Ligninger og uligheder (Ligninger med 1 ubekendt)

Bestem grundmængde og *x* i følgende ligninger:

a) $\frac{x+7}{3}-\frac{3x-7}{4}=\frac{x-1}{2}$

b) $\frac{3}{x-3}-\frac{1}{2x-6}=\frac{5}{6}$

c) $\frac{2+x}{5x-15}+\frac{1}{5}=\frac{7}{15}+\frac{2}{3x-9}$

--- **Opgave slut** ---

Opgave L05 Ligninger og uligheder (Ligninger med 1 ubekendt)

Løs hver af følgende ligninger:

a)	$3x-1=2x+8$	**b)**	$2+3(2-x)=\frac{1}{2}x-2(x+2)$
c)	$\frac{4x-2}{3}=\frac{1}{2}(x+3)$	**d)**	$2(x-1)+3-x=1+x$
e)	$\frac{1}{2}(-4x+2)=5-2x$	**f)**	$(x-1)(x+2)=0$

--- **Opgave slut** ---

Opgave L06 Ligninger og uligheder (Ligninger med 1 ubekendt)

Bestem grundmængden for hver af følgende ligninger, og løs dem derefter:

a)	$\frac{1}{4}x-3=7(x+3)-\frac{1}{2}x$	**b)**	$2(x-2)=3x-(x+3)$
c)	$3-\frac{1}{2}(x+3)=\frac{1}{2}x-\left(x-\frac{3}{2}\right)$	**d)**	$\frac{5}{x+2}-\frac{2}{x-1}=\frac{4}{x+2}$
e)	$1-\frac{x}{2}=3(x+2)-\frac{1}{3}$	**f)**	$x^2+\frac{1}{2}x(x-3)=\frac{3}{2}x$

--- **Opgave slut** ---

Opgave L07 Ligninger og uligheder (Ligninger med 1 ubekendt)

Bestem grundmængde og *x* i følgende ligninger:

a) $\frac{1}{3}=\frac{10x-12}{24}$

b) $\frac{1-2x}{6+x}=\frac{28-6x}{3x-7}$

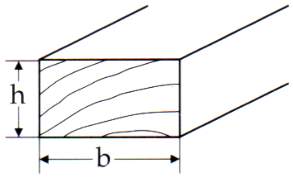
c) $\frac{12}{x}-\frac{6}{x-2}=\frac{9}{x}$

--- **Opgave slut** ---

Opgave L08 Ligninger og uligheder (Tekniske ligninger)

I forbindelse med styrkeberegning af en bjælke med rektangulært tværsnit anvendes en størrelse, der kaldes tværsnittets modstandsmoment, og som benævnes med bogstavet W. For en bjælke med tværsnit $b \cdot h$ gælder følgende formel for beregning af tværsnittets modstandsmoment W :

$$\boxed{W = \frac{1}{6} \cdot b \cdot h^2}$$



Beregn tværsnittets bredde, b **, når:** $W = 100000\,mm^3$ **og**
$h = 100\,mm$

--Opgave slut --

Opgave L09 Ligninger og uligheder (Tekst ligninger)

Ved betaling for sit årlige el-forbrug kan Marie vælge mellem at betale:

a) 70,3 *øre/kWh* eller
b) en fast årlig afgift på *382 kr* plus 0,47 *kr/kWh*.

For hvilke forbrug er a) dyrere end b).

--Opgave slut --

Facitliste

Opgave L01

Afgør om hvert af følgende udtryk er et udsagn og angiv o bekræftende fald sandhedsværdien (Sand/Falsk).

a)	$0 \in \mathbb{Z}$ "Sand"	**b)**	0 er et lige tal "Sand"
c)	$\varnothing \in \{\varnothing\}$ "Falsk"	**d)**	36546788 er et stort tal "Nonsens"
e)	$3^2 > 2^3$ "Sand"	**f)**	$\sqrt{7} = 2{,}64575$ "Falsk"
g)	For alle $x \in \mathbb{R}$ er $\frac{x-1}{x-1} = 0$ "Falsk"	**h)**	$924563^2 = 98345644354$ "Falsk"
i)	$\frac{1}{100}$ er et lille tal "Nonsens"	**j)**	Når en trekant er ligebenet er den også ligesidet "Falsk"

-- **Opgave slut** --

Opgave L02

Bestem grundmængden for følgende udtryk:

a)	$\frac{1}{x}$	$G = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$	**b)**	$\frac{1}{x-3}$	$G = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$
c)	$\frac{1}{3-x}$	$G = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$	**d)**	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$G = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
e)	$\frac{1}{\sqrt{x-3}}$	$G = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$	**f)**	$\frac{1}{\sqrt{3-x}}$	$G = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$

-- **Opgave slut** --

Opgave L03 Ligninger og uligheder (Ligninger med 1 ubekendt)

Bestem grundmængde og *x* i følgende ligninger:

a) $-4x - (-10 + 8x) = (8 - 16x) - (14 - 6x)$ $G = \mathbb{R}$ $x = 8$

b) $15 + (2x - 5)9 = 5(2x + 7) + 12 + 3$ $G = \mathbb{R}$ $x = 10$

c) $3x - 12 = 5[x - 3(7 - 2x) - 7]$ $G = \mathbb{R}$ $x = 4$

-- **Opgave slut** --

Opgave L04 Ligninger og uligheder (Ligninger med 1 ubekendt)

Bestem grundmængde og *x* i følgende ligninger:

a) $\frac{x+7}{3} - \frac{3x-7}{4} = \frac{x-1}{2}$ $G = \mathbb{R}$ $x = 5$

b) $\frac{3}{x-3} - \frac{1}{2x-6} = \frac{5}{6}$ $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$ $x = 6$

c) $\frac{2+x}{5x-15} + \frac{1}{5} = \frac{7}{15} + \frac{2}{3x-9}$ $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$ $x = 8$

-- **Opgave slut** --

Opgave L05 Ligninger og uligheder (Ligninger med 1 ubekendt)

Løs hver af følgende ligninger:

a)	$3x - 1 = 2x + 8$ $x = 9$	**b)**	$2 + 3(2 - x) = \frac{1}{2}x - 2(x + 2)$ $x = 8$
c)	$\frac{4x-2}{3} = \frac{1}{2}(x + 3)$ $x = \frac{13}{5}$	**d)**	$2(x - 1) + 3 - x = 1 + x$ $L = \mathbb{R}$
e)	$\frac{1}{2}(-4x + 2) = 5 - 2x$ $L = \varnothing$	**f)**	$(x - 1)(x + 2) = 0$ $x = 1 \vee x = -2$

-- **Opgave slut** --

Opgave L06 Ligninger og uligheder (Ligninger med 1 ubekendt)

Bestem grundmængden for hver af følgende ligninger, og løs dem derefter:

a)	$\frac{1}{4}x-3=7(x+3)-\frac{1}{2}x$	$G=\mathbb{R}$ $x=-\frac{96}{25}$	**b)**	$2(x-2)=3x-(x+3)$	$G=\mathbb{R}$ $L=\varnothing$
c)	$3-\frac{1}{2}(x+3)=\frac{1}{2}x-\left(x-\frac{3}{2}\right)$	$G=\mathbb{R}$ $L=\mathbb{R}$	**d)**	$\frac{5}{x+2}-\frac{2}{x-1}=\frac{4}{x+2}$	$G=\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq\{1;-2\}\}$ $x=-5$
e)	$1-\frac{x}{2}=3(x+2)-\frac{1}{3}$	$G=\mathbb{R}$ $x=-\frac{4}{3}$	**f)**	$x^2+\frac{1}{2}x(x-3)=\frac{3}{2}x$	$G=\mathbb{R}$ $x=0\vee x=2$

--- **Opgave slut** ---

Opgave L07 Ligninger og uligheder (Ligninger med 1 ubekendt)

Bestem grundmængde og *x* i følgende ligninger:

a) $\frac{1}{3}=\frac{10x-12}{24}$ $G=\mathbb{R}$ $x=2$

b) $\frac{1-2x}{6+x}=\frac{28-6x}{3x-7}$ $G=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x\neq\left\{-6;\frac{7}{3}\right\}\right\}$ $x=7$

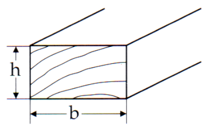
c) $\frac{12}{x}-\frac{6}{x-2}=\frac{9}{x}$ $G=\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq\{0;2\}\}$

--- **Opgave slut** ---

Opgave L08 Ligninger og uligheder (Tekniske ligninger)

I forbindelse med styrkeberegning af en bjælke med rektangulært tværsnit anvendes en størrelse, der kaldes tværsnittets modstandsmoment, og som benævnes med bogstavet W. For en bjælke med tværsnit $b\cdot h$ gælder følgende formel for beregning af tværsnittets modstandsmoment W:

$$\boxed{W=\frac{1}{6}\cdot b\cdot h^2}$$



Beregn tværsnittets bredde, b, når: $W=100000\,mm^3$ **og**

$h=100\,mm$

$b=60\ mm$

---Opgave slut---

Opgave L09 Ligninger og uligheder (Tekst ligninger)

Ved betaling for sit årlige el-forbrug kan Marie vælge mellem at betale:

c) 70,3 *øre/kWh* eller
d) en fast årlig afgift på *382 kr* plus 0,47 *kr/kWh*.

For hvilke forbrug er a) dyrere end b). a) er dyrere end b), når forbrug>1639,5 kWh

---Opgave slut---