

MATEMATIK

# NOTAT 05

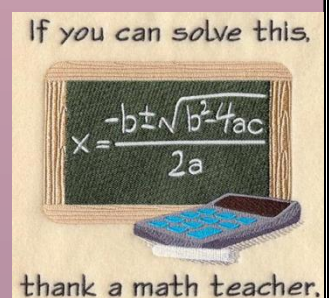
## 2. GRADSLIGNINGEN

AF:

CAND. POLYT.

MICHEL MANDIX

SIDSTE REVISION: FEBRUAR 2023



## 2. Gradslingningen – Introduktion

## 2. Gradsligningen – Løsninger

Side 3 af 33

### Indholdsfortegnelse:

|                                                                                           |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| INDHOLDSFORTEGNELSE: .....                                                                | 3  |
| INTRODUKTION: .....                                                                       | 4  |
| Koefficienter .....                                                                       | 4  |
| LØSNING AF 2. GRADSLIGNINGEN: .....                                                       | 5  |
| Diskriminanten, $d$ .....                                                                 | 5  |
| DISKRIMINANTEN – IGEN... ..                                                               | 8  |
| $d < 0$ .....                                                                             | 8  |
| $d = 0$ .....                                                                             | 8  |
| $d > 0$ .....                                                                             | 8  |
| SPECIALTILFÆLDE ( $B$ - ELLER $C$ -KOEFFICIENTEN = 0): .....                              | 9  |
| $c = 0$ .....                                                                             | 9  |
| Nulreglen .....                                                                           | 9  |
| $b = 0$ .....                                                                             | 9  |
| SMÅ TIPS & TRICKS OM 2. GRADSLIGNINGER: .....                                             | 10 |
| Kontrol af de fundne løsninger .....                                                      | 10 |
| OM DEFINITIONSMÆNGDER OG VÆRDIMÆNGDER... ..                                               | 11 |
| Definitionsmængden, $D_m(f)$ .....                                                        | 11 |
| Værdimængden, $V_m(f)$ .....                                                              | 11 |
| Specielt for 2. gradsligninger: .....                                                     | 11 |
| LIGNINGER OG ULIGHEDER: .....                                                             | 12 |
| LIDT OM DIFFERENTIALKVOTIENTER FOR EN 2. GRADSLIGNING: .....                              | 16 |
| Differentialkvotient af en potensfunktion .....                                           | 16 |
| ET PAR SMÅ EKSEMPLER PÅ ANDRE TYPER OPGAVER I FORBINDELSE MED<br>2. GRADSLIGNINGER: ..... | 17 |
| KOORDINATSYSTEMET – EN ARBEJDSPLADS... ..                                                 | 19 |
| DEN GRAFISKE AFBILDNING: .....                                                            | 20 |
| Ting man kan se ved at betragte $a$ : .....                                               | 20 |
| Ting man kan se ved at betragte $b$ : .....                                               | 20 |
| Ting man kan se ved at betragte $a$ og $b$ : .....                                        | 23 |
| Ting man kan se ved at betragte $c$ : .....                                               | 23 |
| Diskriminanten – igen... ..                                                               | 24 |
| Parablens Toppunkt: .....                                                                 | 24 |
| Symmetriakse: .....                                                                       | 24 |
| NOGLE GENVEJE, HVIS 2. GRADSFUNKTIONEN OMSKRIVES: .....                                   | 25 |
| BILAG 1 – BEVISET: .....                                                                  | 26 |
| BILAG 2 – ALTERNATIVT BEVIS: .....                                                        | 27 |
| BILAG 3 – BEVIS FOR TOPPUNKTSFORMLEN: .....                                               | 30 |
| BILAG 4 – BEVIS FOR TOPPUNKTSFORMLEN (ALTERNATIV): .....                                  | 32 |

## 2.Gradsligningen – Introduktion

### Introduktion:

En 2. gradsligning kan altid skrives på formen:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

$a$  må ikke være lig med 0, for hvis det er tilfældet, står der " $bx + c = 0$ ", hvilket ikke er et 2. gradspolynomium, men derimod et 1. gradspolynomium – altså "linjens ligning".

### Koefficienter

Tallene  $a$ ,  $b$  og  $c$  kaldes for ligningens **Koefficienter**.

$a$  er koefficienten til 2.grads leddet ( $x^2$ )

$b$  er koefficienten til 1.grads leddet ( $x^1$  – eller bare:  $x$ )

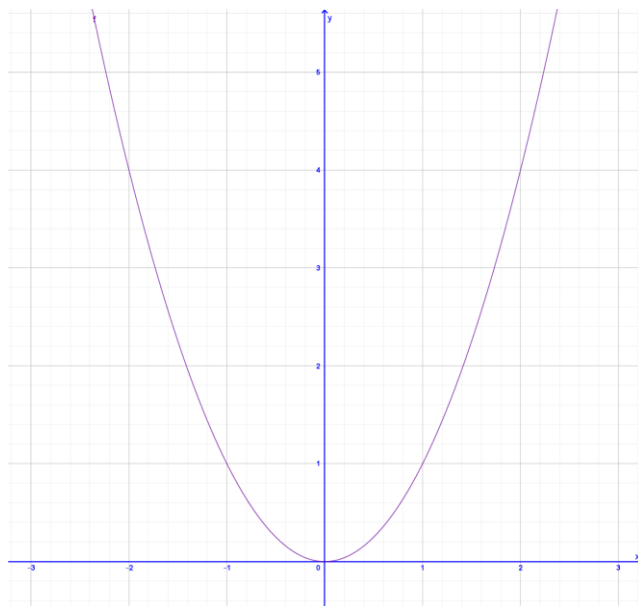
$c$  er koefficienten til 0.grads leddet ( $x^0$  – eller konstantleddet)

Bemærk, at alle koefficienter **ALTID** har et fortegn, som skal medregnes! Hvis der ikke står noget fortegn (foran  $a$  – eller det første led), regnes den som positiv!

Hvis et led helt mangler (**Ikke  $x^2$ -leddet**), er koefficienten **lig med 0!** Det er således kun  $b$  og/eller  $c$ , som kan være lig med 0. Hvis dette er tilfældet, gælder der specielle regler for løsningen af 2.gradspolynomiet, og disse beskrives senere i dette notat.

Hvis der ikke står et tal foran  $x^2$  eller  $x$ , er koefficienten underforstået lig med 1 eller -1, afhængigt af fortegnet.

Den grafiske afbildning af en 2.gradsligning kaldes en **parabel**, og kan f.eks. se ud som i nedenstående figur:



$$f(x) = x^2$$

Figur 1: Et eksempel på en parabel. Her er  $f(x) = x^2$

| $x$        | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5  | 1 | 1,5  | 2 |
|------------|----|------|----|------|---|------|---|------|---|
| $y = f(x)$ | 4  | 2,25 | 1  | 0,25 | 0 | 0,25 | 1 | 2,25 | 4 |

## 2. Gradsligningen – Løsninger

Side 5 af 33

### Løsning af 2. gradsligningen:

Som nævnt, kan andengradsligningen skrives på formen:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

Ligning 1

En lignings **løsninger** kan beskrives som de steder på  $x$ -aksen, hvor ligningens graf skærer  $x$ -aksen!

Specielt for 2. gradsligninger, findes der et formelapparat, der kan bruges til at finde ligningens løsninger, som for resten også i daglig tale kaldes ligningens **nulpunkter** eller **rødder**.

Bemærk forskellen! Hvis der er tale om en funktions nulpunkter, refereres der til de  $x$ -værdier, som opfylder ligningen  $f(x) = 0$ .

Eksempler kan være:

$$f(x) = 2x - 4$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 4 = 0 \\ \Downarrow \\ x = 2 \end{array} \right\} \text{ Her er nulpunktet: } \underline{\underline{x = 2}}$$

$$f(x) = 2x^2 - 3x - 2$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x^2 - 3x - 2 = 0 \\ \Downarrow \\ x = -\frac{1}{2} \vee x = 2 \end{array} \right\} \text{ Her er nulpunkterne: } \underline{\underline{x = -\frac{1}{2} \text{ eller } x = 2}}$$

Man kan altså tale om en lidt knudret sproglig konstruktion, idet der normalt tænkes på et koordinatsæt:  $(x; y) = (a; b)$ , men nulpunkter er IKKE et koordinatsæt, selvom det hedder et **nulpunkt**.

Vær altid opmærksom på opgavens ordlyd! Man kan – i forbindelse med funktionsanalyse – blive bedt om at angive koordinater til grafen for funktionens skæringspunkter med de to koordinataksler. Dette refererer til **graf** for funktionen og ikke til **løsningerne** for funktionen. Et spørgsmål som dette skal besvares med et koordinatsæt, men mere om det lidt senere.

### Diskriminanten, $d$

Løsningerne findes ved først at udregne **diskriminanten**,  $d$ .

$$d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

Ligning 2: (Diskriminantformlen)

## 2. Gradsligningen – Løsninger

Man kan umiddelbart se noget om ligningens løsninger ved at betragte  $d$ :

$d > 0$  (Positiv) : Ligningen har 2 forskellige løsninger.

$d = 0$  : Ligningen har 2 ens løsninger.

Normalt siger man, at der findes 1 løsning, da løsningerne er ens.

Man siger også, at løsningen er en **dobbeltrod**.

$d < 0$  (Negativ) : Ligningen har ingen løsninger.

Man siger også, at  $L = \emptyset$ .

*Bemærk, at man stadig sagtens kan bestemme toppunkt, krumning, skæring med y-aksen etc.*

*Det eneste, som ikke kan bestemmes hvis  $d < 0$ , er skæringspunkter med x-aksen, da de ikke eksisterer.*

*Selve parablen (grafen) eksisterer i bedste velgående.*

Når man har udregnet  $d$ , og fundet at  $d > 0$  eller at  $d = 0$ , indsættes  $d$  i næste ”trin” i formelapparatet:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2 \cdot a} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2 \cdot a} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2 \cdot a} \end{cases}$$

Ligning 3: (Nulpunktsformlen)

*(Beviset for hele dette formelapparat findes i bilag 1 og i bilag 2.)*

## 2. Gradsligningen – Løsninger

Side 7 af 33

Et par eksempler:

**E1**

$$x^2 + 8x - 9 = 0 \quad a = 1, \quad b = 8, \quad c = -9$$

$$\begin{aligned} d &= b^2 - 4 \cdot a \cdot c \\ &= 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9) \\ &= 64 - (-36) \\ &= 64 + 36 \\ &= \underline{100} \end{aligned}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2 \cdot a} = \frac{-8 \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = \frac{-8 \pm 10}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-8-10}{2} = \frac{-18}{2} \Leftrightarrow \underline{x_1 = -9} \\ x_2 = \frac{-8+10}{2} = \frac{2}{2} \Leftrightarrow \underline{x_2 = 1} \end{cases}$$

**E2**

$$4x^2 + 8x + 4 = 0 \quad a = 4, \quad b = 8, \quad c = 4$$

$$\begin{aligned} d &= b^2 - 4 \cdot a \cdot c \\ &= 8^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4 \\ &= 64 - 64 \\ &= \underline{0} \end{aligned}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2 \cdot a} = \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 4} = \frac{-8 \pm 0}{2 \cdot 4} = \frac{-8}{8} \Leftrightarrow \underline{x = -1} \quad (\text{Dobbeltrod})$$

Husk, at hvis man bliver bedt om **KOORDINATER** til skæringspunkterne med x-aksen, så er det **IKKE NOK** at angive den eller de fundne rødder.

Så skal der svares som følger:

Skæringspunkter med x-aksen er:  $(x_1; 0) \vee (x_2; 0)$

(Såfremt der er to rødder)

Skæringspunkt med x-aksen er:  $(x; 0)$

(Såfremt der er en dobbeltrod)

*Det vil altid medføre en del strafpoints, hvis der ikke afleveres et koordinat, når der bedes om det!*

## 2. Gradsligningen – Diskriminanten

### Diskriminanten – Igen...

Opsummering af teorien om diskriminanten,  $d$ :

$$d < 0$$

$$d < 0$$

Når  $d$  er negativ, kan man ikke udregne  $\sqrt{d}$ , da man ikke kan tage kvadratroden af et negativt tal.

Derfor er  $L = \emptyset$

I princippet betyder det, at hvis man udregner  $d$  til at være negativ, så kan man allerede her konkludere, at der ikke er nogen reelle løsninger til 2. gradsligningen. I dette tilfælde skal man **IKKE** indsætte værdierne i nulpunktsformlen (Ligning 3).

**Bemærk, at det stadig er yderst relevant at udregne toppunkt og vurdere parablens beliggenhed i koordinatsystemet.** Det eneste, som  $d$  indikerer ved at være negativ er, at parablen ikke skærer  $x$ -aksen.

$$d = 0$$

$$d = 0$$

Når  $d$  er lig med 0, skal man tage kvadratroden af 0.

Det kan man sagtens...  $\sqrt{0} = 0$ .

Når man så skal indsætte  $d$  i nulpunktsformlen (Ligning 3), får man:

$x = \frac{-b \pm 0}{2 \cdot a}$ . Om man lægger 0 til eller trækker 0 fra, det er lige meget, så konklusionen er, at:

$$x = \frac{-b}{2 \cdot a}$$

Ligning 4: (Specielt for  $d = 0$ )

$$d > 0$$

$$d > 0$$

Når  $d$  er positiv og man tager kvadratroden af tallet, giver det jo **to** løsninger. En plus- og en minusløsning.

Eksempel:  $x^2 = 9 \Leftrightarrow \sqrt{9} = \pm 3$ , da  $3 \cdot 3 = 9$  og  $(-3) \cdot (-3) = 9$ .

Derfor fås to forskellige løsninger, når  $d$  indsættes i nulpunktsformlen (Ligning 3).

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2 \cdot a} \quad \vee \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2 \cdot a}$$

Ligning 5: (Løsninger for  $d > 0$ )



## 2. Gradsligningen – Specialtilfælde

Side 9 af 33

### Specialtilfælde ( $b$ - eller $c$ -koefficienten = 0):

Det kan godt betale sig at lære disse specialtilfælde af 2.gradsligningen udenad, da man derved kan spare en masse tid og besvær.

$$c = 0$$

$$c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax^2 + bx = 0$$

Da konstantleddet er 0 og dermed væk, ser man at størrelsen  $x$  indgår i alle led. Derfor kan man faktorisere og sætte  $x$  udenfor en parentes:

$$\underbrace{x}_{\text{Tal 1}} \cdot \underbrace{(ax + b)}_{\text{Tal 2}} = 0$$

### Nulreglen

*Et produkt er nul, hvis en (eller begge) af faktorerne er nul.*

$$\text{Dvs. } a \cdot b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \vee b = 0$$

Ligning 6: (Nulreglen)

Derfor vil ovenstående ligning være sand, hvis enten **Tal 1 = 0** eller **Tal 2 = 0**.

$$\text{Tal 1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x = 0}$$

$$\text{Tal 2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x = \frac{-b}{a}} \quad \text{Ligning 7: (Løsning når specielt } c = 0)$$

$$b = 0$$

$$b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax^2 + c = 0$$

Da 1.gradsleddet er 0 og dermed væk, ser man at ligningen kan løses vha. en simpel kvadratrodsberegning:

$$\begin{aligned} ax^2 + c &= 0 \\ \Updownarrow \\ x^2 &= \frac{-c}{a} && \text{Ligning 8: (Løsning, når specielt } b = 0 \text{ samt } a \text{ og } c \text{ har modsat fortegn)} \\ \Updownarrow \\ \underline{x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}} \end{aligned}$$

Bemærk her, at det er en **ufravigelig betingelse**, at koefficienterne  $a$  og  $c$  har

**modsat fortegn**! Hvis de ikke har det, vil  $\frac{-c}{a}$  blive en negativ størrelse, som man jo – som bekendt – ikke kan tage kvadratroden af. (Medmindre man regner med komplekse tal.)

## 2.Gradsligningen – Tips & Tricks

### Små tips & tricks om 2.gradsligninger:

2.gradsligninger kan forekomme på andre former end ligning 1:  $ax^2 + bx + c = 0$ .

... Og når de gør det, kan det betale sig at kunne huske disse formler:

2.gradsligningen opløst i faktorer:

$$y = f(x) = a(x - r_1) \cdot (x - r_2) \quad (\text{Forskellige rødder})$$

$$y = f(x) = a(x - r)^2 \quad (\text{Dobbeltrod})$$

### Kontrol af de fundne løsninger

Når man har fundet ligningens rødder, kan man med fordel foretage et par simple tests, for at se, om man har regnet rigtigt:

$$r_1 + r_2 = \frac{-b}{a}$$

Ligning 9

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}$$

Ligning 10

## 2. Gradsligningen – $Dm(f)$ og $Vm(f)$

Side 11 af 33

### Om definitions­mængder og værdimængder...

#### Definitions­mængden, $Dm(f)$

Definitions­mængden er mængden af værdier af  $x$ , som man kan sætte ind i en given ligning. Man kalder det også for **forbrugsmængden**. Definitions­mængden skrives:  $Dm(f)$ .

Generelt gælder for en 2.­gradsfunktion, at definitions­mængden:  $Dm(f) = \mathbb{R}$

Dette gælder naturligvis kun, såfremt der ikke er andre ikke-matematiske begrænsninger. Dette kunne f.eks. være i fysikken, hvor der kun kastes "fremad" og ikke tilbage. Da er  $x$  kun defineret for den strækning, som er "foran" kasteren.

Et andet eksempel kan hentes fra økonomien, hvor en parabel beskriver en økonomisk gevinst. Så længe parabelen er over  $x$ -aksen, er der overskud, og når parabelen er under  $x$ -aksen, så er der underskud. Da man ikke er interesseret i at køre en forretning med underskud, sættes definitions­mængden til udelukkende at ligge imellem rødderne – forudsat at  $a$  er negativ – hvor der er overskud.

#### Værdimængden, $Vm(f)$

En funktions værdimængde er den mængde af funktions­værdier ( $y$ -værdier), som en funktion er i stand til at returnere, når den gennemløber hele definitions­mængden  $Dm(f)$ . Funktionen  $f$ 's værdimængde skrives som  $Vm(f)$ .

I et koordinatsystem sættes tallene tilhørende værdimængden op ad  $y$ -aksen.

Altså er værdimængden den samlede mængde af alle de  $y$ -værdier, som en funktion kan antage.

Huskeregler:

Definitions­mængden sættes altid ud ad 1.-aksen, og værdimængden sættes altid op ad 2.-aksen. En huskeregel for dette er at et fodboldhold skal deltage i DM (Danmarksmesterskabet), før det kan komme til VM (Verdensmesterskabet). Altså DM før VM! Eller bare i alfabetisk rækkefølge.

#### Specielt for 2.­gradsligninger:

Da en 2.­gradsfunktion afbildes som en parabel, der jo som bekendt "vender", således at funktionen går fra faldende til voksende – eller fra voksende til faldende – afhængigt af  $a$ 's fortegn, og at der derved skabes et toppunkt, vil værdimængden være begrænset således at:

|               |                                                         |
|---------------|---------------------------------------------------------|
| For $a > 0$ : | $Vm(f) = \left[ \frac{-d}{4 \cdot a} ; +\infty \right[$ |
| For $a < 0$ : | $Vm(f) = \left] -\infty ; \frac{-d}{4 \cdot a} \right]$ |

## 2. Gradsligningen – Ligninger og uligheder

### Ligninger og uligheder:

Det bliver ofte nødvendigt at løse ligninger og uligheder, hvor et eller flere led i ligningen er opløftet i anden potens – altså en andengradsligning.

Eksempler på dette kan være:

$$1. \quad a \cdot x^2 + b \cdot x + c = d \cdot x^2 + e \cdot x + f$$

I dette tilfælde er der grafisk tale om to parabler. Når de stilles op som vist lige overfor, er det faktisk en undersøgelse af, om hvorvidt de to parabler skærer hinanden, og i så fald hvor mange gange (1 eller 2) og hvor.

Ved hjælp af almindelig algebra, kan leddene på venstre side ”flyttes over”, således at højre side af ligningen ender med at være lig med 0.

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = d \cdot x^2 + e \cdot x + f$$

$$\Downarrow$$

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c - d \cdot x^2 - e \cdot x - f = 0$$

$$\Downarrow$$

$$a \cdot x^2 - d \cdot x^2 + b \cdot x - e \cdot x + c - f = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(a - d) \cdot x^2 + (b - e) \cdot x + c - f = 0$$

$(a - d)$  samles til ét led,  $(b - e)$  samles til ét led og  $(c - f)$  samles til ét led.

Så er problemet tilbage til en andengradsligning på grundform, og ligningen kan løses, som tidligere vist.

Betragtes igen det grafiske eksempel, vil de fundne løsninger være de  $x$ -værdier, hvor parablerne skærer hinanden – hvis der er nogen – eller med andre ord – ”De  $x$ -værdier hvor funktionsværdien er lig med 0”.

De evt. fundne  $x$ -værdier indsættes i en af de oprindelige ligninger for at finde de tilhørende  $y$ -værdier. Det er lige meget om man vælger den højre eller venstre side af ligningen, men et godt tip er, altid at vælge ligningen med de pæneste tal, som giver den nemmeste udregning.

2. Et andet eksempel kan være, hvis man har en parabel og en ret linje, og man søger de eventuelle skæringspunkter – ganske som i forrige eksempel:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = d \cdot x + e$$

Ved hjælp af almindelig algebra, kan leddene på venstre side igen ”flyttes over”, således at højre side af ligningen ender med at være lig med 0.

## 2. Gradsligningen – Ligninger og uligheder

Side 13 af 33

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = d \cdot x + e$$

$$\Downarrow$$

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c - d \cdot x - e = 0$$

$$\Downarrow$$

$$a \cdot x^2 + b \cdot x - d \cdot x + c - e = 0$$

$$\Downarrow$$

$$a \cdot x^2 + (b - d) \cdot x + c - e = 0$$

$(b - d)$  samles til ét led og  $(c - e)$  samles til ét led. Derved er problemet igen en andengradsligning på grundform, og ligningen kan løses som tidligere vist.

Igen betragtes det grafiske eksempel, og de fundne løsninger er de  $x$ -værdier, hvor parablen og linjen skærer hinanden – såfremt der findes skæringspunkter.

De evt. fundne  $x$ -værdier indsættes i en af de oprindelige ligninger for at finde de tilhørende  $y$ -værdier. Det er principielt set lige meget om man vælger parablens eller linjens side af ligningen, men et godt tip er, altid at vælge at sætte  $x$ -værdierne ind i linjens ligning, da det som regel er nemmere at løse en førstegradsligning end en andengradsligning.

Det er klart at løsningerne til de to viste eksempler – såfremt der er nogen, vil bestå af punkter, nemlig der, hvor de pågældende funktioner skærer hinanden.

Anderledes er det, hvis der er tale om **andengradsuligheder**.

Udgangspunktet for en andengradsulighed kan være de samme, som allerede vist – to parabler eller en parabel og en linje. Men det, som er det interessante her er primært, hvilken af de to funktioner, som er størst og hvilken funktion, som er mindst.

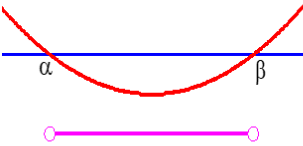
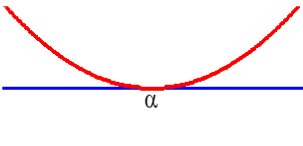
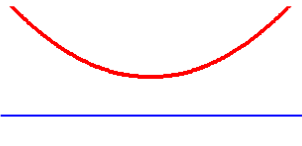
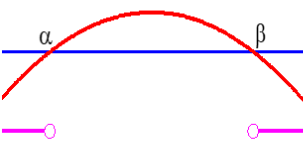
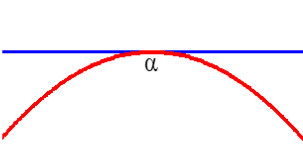
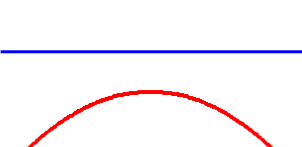
Naturligvis er det også her vigtigt at finde skæringspunkterne (hvis der er nogen), for ellers kan man jo ikke finde ud af, hvilken funktion som er størst – og hvornår.

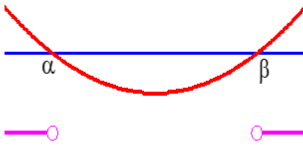
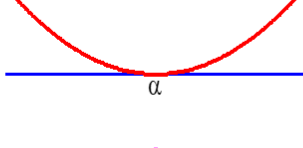
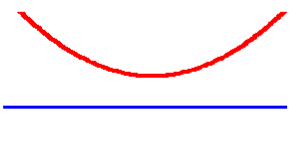
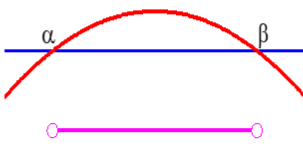
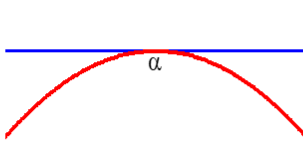
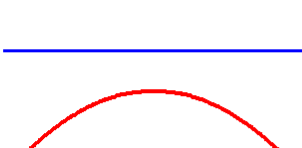
Derfor begynder man – som altid – med at reducere andengradsligningen til normalform. Men når det er en ulighed, er der jo i sagens natur ikke noget lighedstegn, men derimod et ulighedstegn.

Måske er det nemmest at overskue de forskellige løsningstyper i de følgende skemaer, hvor andengradsligningen er sat på normalform, og hvor løsningerne vises både som tallinjer og som mængder. Løsningerne til selve andengradsligningen – altså der hvor funktionens graf skærer  $x$ -aksen, kaldes hhv.  $\alpha$  og  $\beta$ .

**Husk, at løsningen til enhver ulighed beskrives vha. en løsningsmængde (interval) eller en mængde! En undtagelse er, hvis løsningen begrænses til ét punkt.**

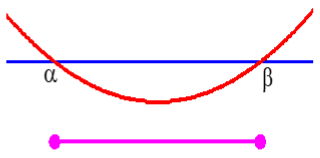
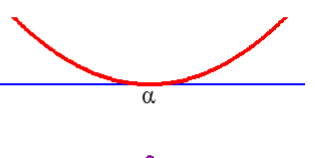
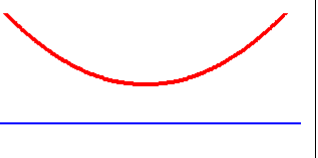
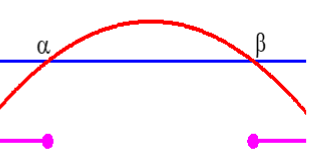
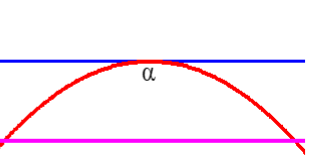
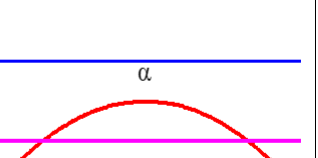
## 2. Gradsligningen – Ligninger og uligheder

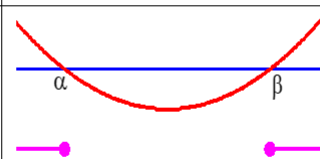
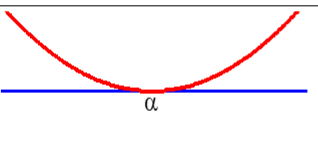
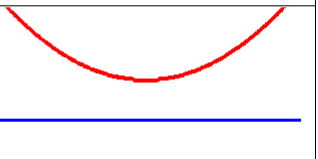
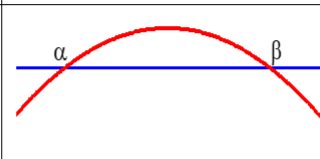
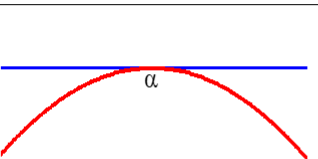
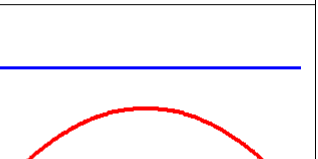
| $a \cdot x^2 + b \cdot x + c < 0$ |                                                                                                                                                           | $d = b^2 - 4ac$                                                                                                                               |                                                                                                                                |
|-----------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                   | $d > 0$                                                                                                                                                   | $d = 0$                                                                                                                                       | $d < 0$                                                                                                                        |
| $a > 0$                           | <br>$\underline{\underline{L = ]\alpha; \beta[}}$                        | <br>$\underline{\underline{L = \emptyset}}$                  | <br>$\underline{\underline{L = \emptyset}}$  |
| $a < 0$                           | <br>$\underline{\underline{L = ]-\infty; \alpha[ \cup ]\beta; \infty[}}$ | <br>$\underline{\underline{L = \mathbb{R} \setminus \{0\}}}$ | <br>$\underline{\underline{L = \mathbb{R}}}$ |

| $a \cdot x^2 + b \cdot x + c > 0$ |                                                                                                                                                             | $d = b^2 - 4ac$                                                                                                                                 |                                                                                                                                  |
|-----------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                   | $d > 0$                                                                                                                                                     | $d = 0$                                                                                                                                         | $d < 0$                                                                                                                          |
| $a > 0$                           | <br>$\underline{\underline{L = ]-\infty; \alpha[ \cup ]\beta; \infty[}}$ | <br>$\underline{\underline{L = \mathbb{R} \setminus \{0\}}}$ | <br>$\underline{\underline{L = \mathbb{R}}}$ |
| $a < 0$                           | <br>$\underline{\underline{L = ]\alpha; \beta[}}$                        | <br>$\underline{\underline{L = \emptyset}}$                  | <br>$\underline{\underline{L = \emptyset}}$  |

## 2. Gradsligningen – Ligninger og uligheder

Side 15 af 33

| $a \cdot x^2 + b \cdot x + c \leq 0$ |                                                                                                                                                        | $d = b^2 - 4ac$                                                                                                             |                                                                                                                              |
|--------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                      | $d > 0$                                                                                                                                                | $d = 0$                                                                                                                     | $d < 0$                                                                                                                      |
| $a > 0$                              |  $\underline{\underline{L = [\alpha; \beta]}}$                        |  $\underline{\underline{L = \alpha}}$     |  $\underline{\underline{L = \emptyset}}$  |
| $a < 0$                              |  $\underline{\underline{L = ]-\infty; \alpha] \cup [\beta; \infty[}}$ |  $\underline{\underline{L = \mathbb{R}}}$ |  $\underline{\underline{L = \mathbb{R}}}$ |

| $a \cdot x^2 + b \cdot x + c \geq 0$ |                                                                                                                                                          | $d = b^2 - 4ac$                                                                                                               |                                                                                                                                |
|--------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                      | $d > 0$                                                                                                                                                  | $d = 0$                                                                                                                       | $d < 0$                                                                                                                        |
| $a > 0$                              |  $\underline{\underline{L = ]-\infty; \alpha] \cup [\beta; \infty[}}$ |  $\underline{\underline{L = \mathbb{R}}}$ |  $\underline{\underline{L = \mathbb{R}}}$ |
| $a < 0$                              |  $\underline{\underline{L = [\alpha; \beta]}}$                        |  $\underline{\underline{L = \alpha}}$     |  $\underline{\underline{L = \emptyset}}$  |

## 2. Gradsligningen – Differentialkvotienter

### Lidt om differentialkvotienter for en 2.gradsligning:

Reglen om differentiering af potensfunktioner giver:

**Differentialkvotient af en potensfunktion**

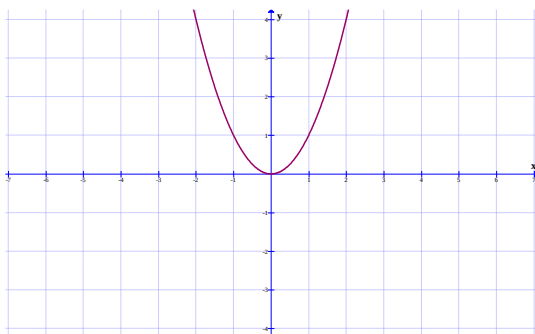
$$f(x) = ax^n \Leftrightarrow f'(x) = anx^{(n-1)}$$

Ligning 11: (Differentialkvotient af en potensfunktion)

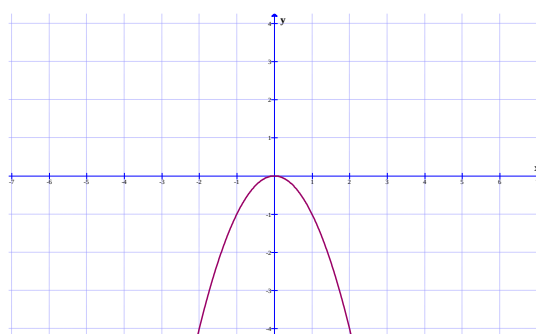
Ud fra denne regel ses det, at et 2.gradspolynomium ALTID vil resultere i et 1.gradspolynomium, når det differentieres.

Og det passer jo også meget fint, da differentialkvotienten altid beskriver hældningen for en funktion. Betragtes en parabel, vil den jo – som allerede nævnt – være voksende og så faldende – eller omvendt.

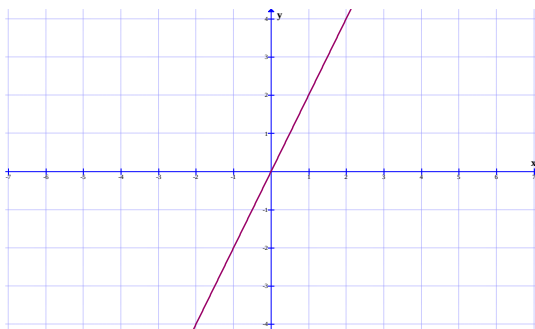
Den differentierede (eller afledte) funktion  $f'(x)$  eller  $\frac{d}{dx}$  vil da have udseende af en linje, der (i hele  $DM(f)$ ), vil skære  $x$ -aksen én gang og dermed gå fra positivt fortegn til negativt fortegn – eller omvendt.



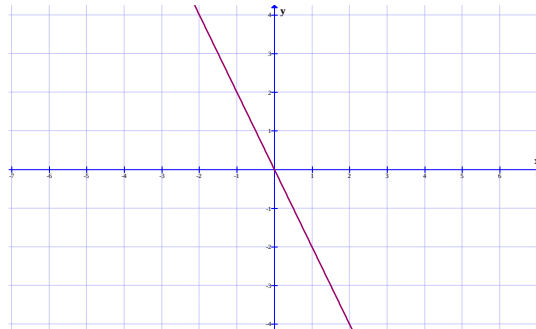
Figur 2: ( $f(x) = x^2$ )



Figur 3: ( $f(x) = -x^2$ )



Figur 2a: ( $f'(x) = 2x$ )



Figur 3a: ( $f'(x) = -2x$ )

Det kan i forbifarten nævnes, at hvis man differentierer differentialkvotienten for et andengrads-polynomium, så differentierer man jo på en funktion, der afbilder en ret linje. (Se ovenstående figurer 2a og 3a.) Denne differentialkvotient vil – som det jo vides fra differentialregningen – give en konstant!

Hvis denne konstant er positiv er den oprindelige funktion konveks (en glad parabel) og hvis den er negativ er den oprindelige funktion konkav (en sur parabel).



## 2. Gradsligningen – Den grafiske afbildning

Side 17 af 33

### Et par små eksempler på andre typer opgaver i forbindelse med 2. gradsligninger:

Givet andengradsligningen:  $x^2 + 2x + k = 0$ .

- a) **Bestem  $k$  således, at der er netop én løsning til andengradsligningen.**

Hvis der skal være netop én løsning, betyder det at diskriminanten skal være lig med 0.  $a$  genkendes som 1,  $b$  genkendes som 2 og sluttelig er  $c = k$ .

Diskriminanten opskrives som:  $d = 0 \Leftrightarrow b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0 \Leftrightarrow 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot k = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot k = 4 \Leftrightarrow \underline{k=1}$

- b)  **$k$  sættes nu til -3. Find den nye parabels toppunkt og skæringer med de to akser, opgivet som koordinater.**

Da  $k$  er lig med -3, kan ligningen nu skrives som:  $x^2 + 2x - 3 = 0$ .

Diskriminanten opskrives som:  $d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 \Leftrightarrow \underline{d=16}$

Der sættes ind i toppunktsligningen:  $TP = (x; y) = \left( \frac{-b}{2a}; \frac{-d}{4a} \right) = \left( \frac{-2}{2 \cdot 1}; \frac{-16}{4 \cdot 1} \right) \Leftrightarrow \underline{TP = (-1; -4)}$

Der sættes ind i nulpunktsligningen:  $r = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2 \cdot a} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} \Leftrightarrow \underline{r_1 = -3} \\ r_2 = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} \Leftrightarrow \underline{r_2 = 1} \end{cases}$

Dette laves om til koordinater: Skæringer med x-aksen er:  $\underline{(x_1; 0) = (-3; 0) \vee (x_2; 0) = (1; 0)}$

Skæring med y-aksen svarer til koefficienten  $c$ : Skæring med y-aksen er:  $\underline{(0; c) = (0; -3)}$

- c) **For hvilken værdi af  $k$ , er en af løsningerne til andengradsligningen  $x = 0$ ?**

Hvis en løsning er lig med 0, betyder det, at x-aksen skæres når  $x$  er lig med 0, eller rettere i origo.

Det betyder samtidig, at  $c$  er lig med 0, da parablen jo altid skærer y-aksen i  $c$ .

Da  $c$  i dette tilfælde er lig med  $k$  findes:  $\underline{k=0}$  (Ligning 6 og 7 – Nulreglen).

- d) **Bestem den anden løsning til andengradsligningen bestemt i spm. c).**

Igen benyttes **Ligning 6 og 7 – Nulreglen**, og det konkluderes at den anden løsning kan skrives på formen:

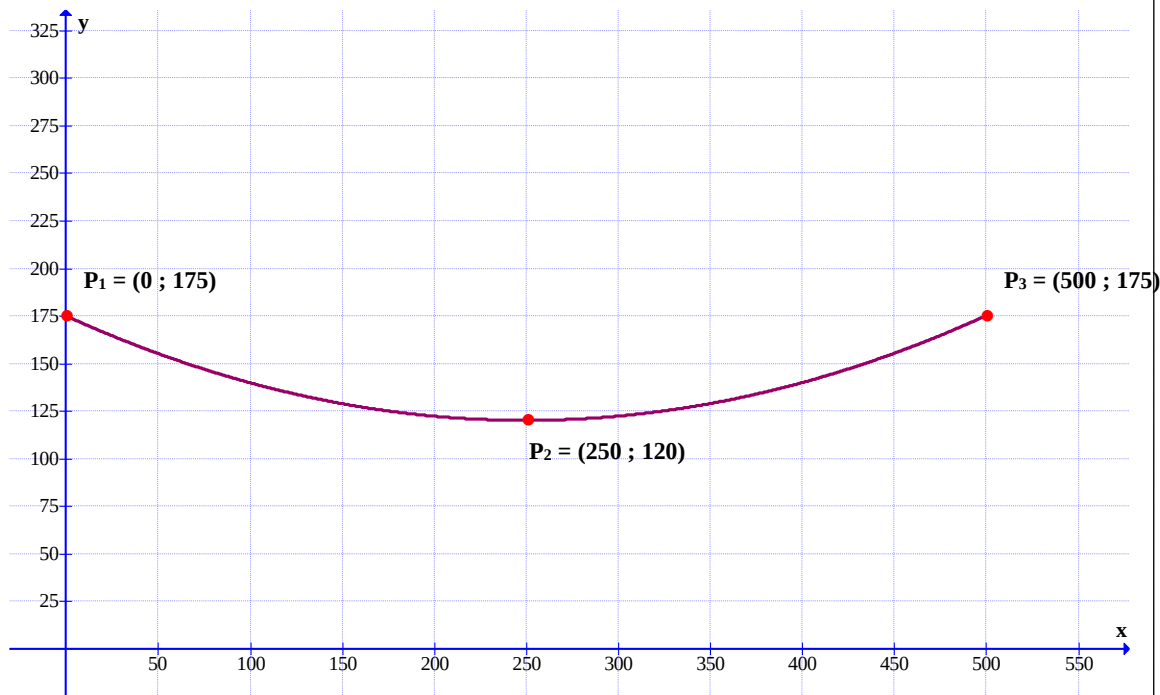
$$x = \frac{-b}{a} = \frac{-2}{1} \Leftrightarrow \underline{x = -2}$$

## 2. Gradsligningen – Andre opgavetyper

### Et par små eksempler på andre typer opgaver i forbindelse med 2. gradsligninger:

Der skal føres en vej, som på et stykke kan beskrives som en parabel.

(Alle koordinatmål er beskrevet i meter, målt fra koordinatsystemets origo.)



Givet tre punkter  $P_1$ ,  $P_2$  og  $P_3$ ! Find forskriften for den parabel, som traverserer (går igennem) de tre punkter.

De kendte  $x$ - og  $y$ -værdier indsættes i tre forskellige 2. gradsligninger. Der skal jo som bekendt tre ligninger til at finde tre ubekendte, og det er jo netop hvad der er til rådighed –  $a$ ,  $b$  og  $c$  er de tre ubekendte.

$$I) \quad a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 175 \quad \Leftrightarrow \quad 0 + 0 + c = 175 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{c = 175}$$

$$II) \quad a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot 250^2 + b \cdot 250 + c = 120 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot 62500 + b \cdot 250 + 175 = 120$$

$$III) \quad a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot 500^2 + b \cdot 500 + c = 175 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot 250000 + b \cdot 500 + 175 = 175$$

$$III) \text{ giver: } a \cdot 250000 + b \cdot 500 \quad \Leftrightarrow \quad b = -\frac{a \cdot 250000}{500} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{b = -500 \cdot a}$$

$$\begin{aligned} \text{Sætter ind i II):} \quad & a \cdot 250^2 + (-500) \cdot a \cdot 250 + 175 = 120 \quad \Leftrightarrow \quad 62500 \cdot a - 125000 \cdot a + 175 = 120 \\ & \Leftrightarrow -62500 \cdot a = 120 - 175 \quad \Leftrightarrow \quad -62500 \cdot a = -55 \\ & \Leftrightarrow a = \frac{-55}{-62500} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{a = \frac{11}{12500}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sætter ind i III):} \quad & b = -500 \cdot a \quad \Leftrightarrow \quad b = -500 \cdot \frac{11}{12500} \\ & \Leftrightarrow b = -\frac{5500}{12500} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{b = -\frac{11}{25}} \end{aligned}$$

Da man nu har udregnet - og dermed kender -  $a$ ,  $b$  og  $c$ , indsættes de tre værdier i 2. gradsligningen hvilket giver:

$$\underline{\underline{\frac{11}{12500} \cdot x^2 - \frac{11}{25} \cdot x + 175 = 0}}$$

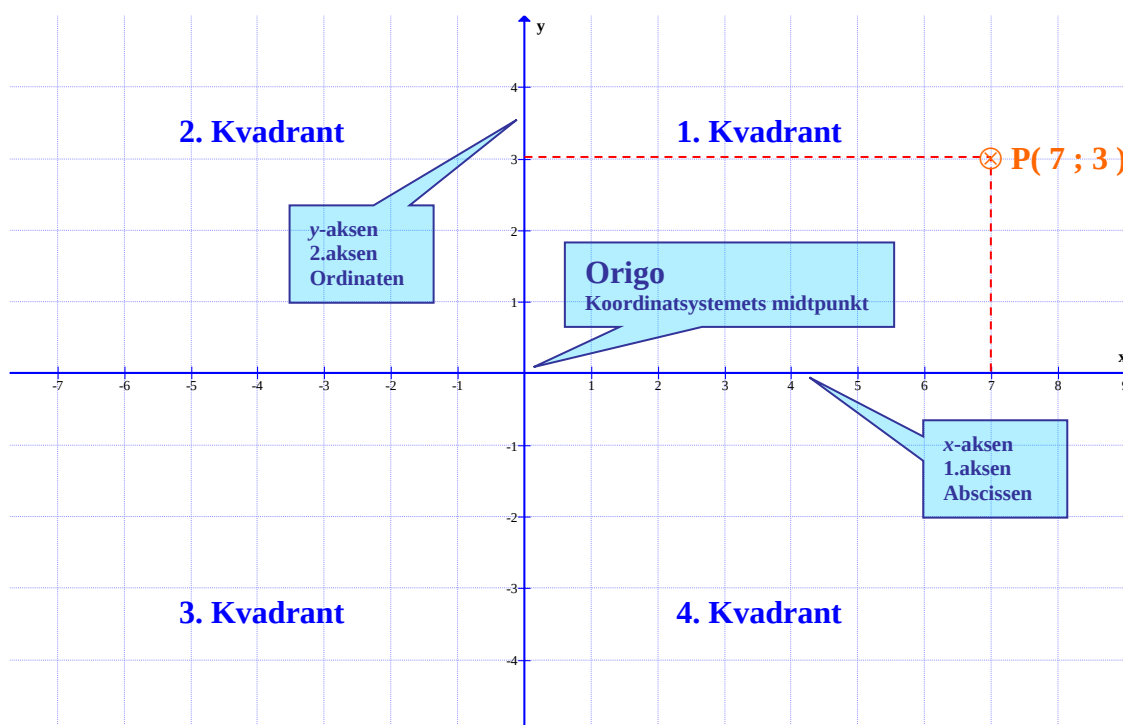
## 2. Gradsligningen – Koordinatsystemet

Side 19 af 33

### Koordinatsystemet – en arbejdsplads...

#### Koordinatsystemets opbygning / nyt eller repetition?:

Et kartesisk koordinatsystem er et retvinklet koordinatsystem. Det betyder at de to (eventuelt tre) akser er ortogonale (vinkelrette) på hinanden. Dermed forstås, at alle punkter i koordinatsystemet opfattes som en skæring mellem linjer parallelle med akserne, hvorved der opstår en ret vinkel for alle punkter.



I den rummelige geometri, kommer der også en tredje akse – z-aksen på. Dette rummelige koordinatsystem beskrives i et andet notat...

Når man skal tegne ligningens/funktionens graf (parablen), kan man altid lave en tabel med en række støttepunkter ved at indsætte forskellige værdier af  $x$  i funktionen og derved beregne de tilhørende funktionsværdier (et "sildeben") og udregne et antal funktionsværdier og dermed være i stand til at tegne parablen. (Som på p.1 i dette notat).

Det anbefales at man til eksamen undgår udtrykket "sildeben".

For at citere en kær kollega henleder det tankerne på en person, som sidder og svinger en død fisk over hovedet, og derefter på mirakuløs vis nedkommer med det rigtige resultat.

Benyt i stedet sætningen: "Der laves en tabel med en række støttepunkter ved at indsætte forskellige værdier af  $x$  i funktionen og derved beregne de tilhørende funktionsværdier".

Der findes en lang række huskereglere, som gør at man kan forestille sig parablen – dens form og placering i koordinatsystemet – uden at udregne et eneste støttepunkt.

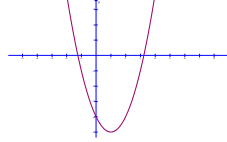
## 2. Gradsligningen – Den grafiske afbildning

### Den grafiske afbildning:

Ting man kan se ved at betragte  $a$ :

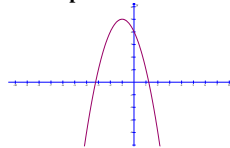
$a$  positiv  $\Rightarrow$  "Glad" parabel  
Konvekst kurveforløb

Eksempel:



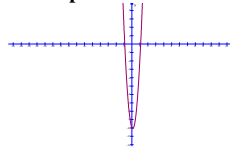
$a$  negativ  $\Rightarrow$  "Sur" parabel  
Konkavt kurveforløb

Eksempel:



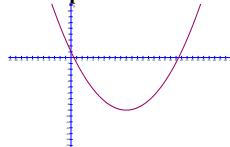
$a$  relativt stor  $\Rightarrow$  Smal og spids parabel

Eksempel:



$a$  relativt lille  $\Rightarrow$  Bred og stump parabel

Eksempel:

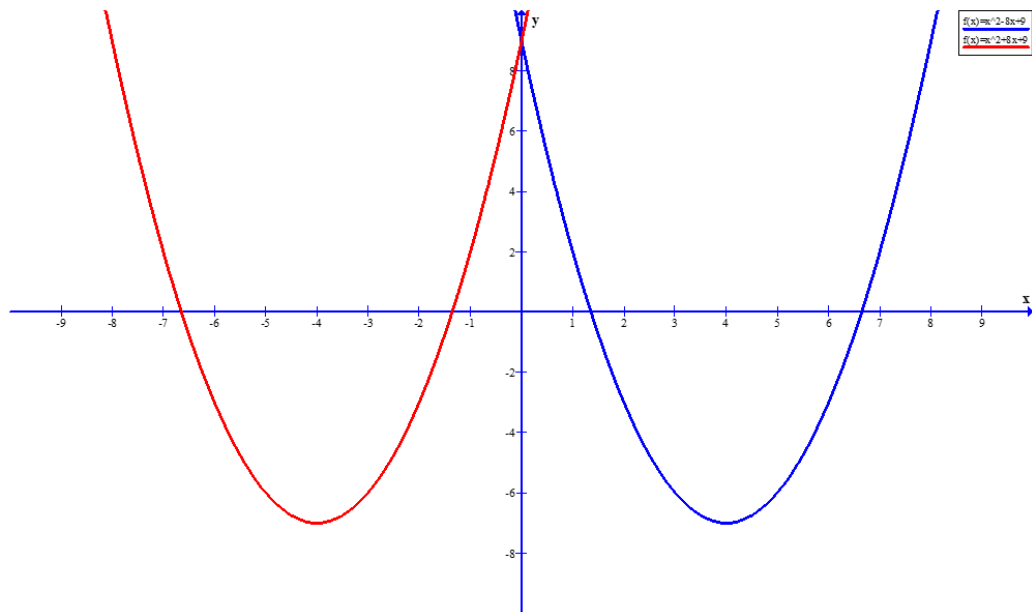


Ting man kan se ved at betragte  $b$ :

Skifter man fortegn på  $b$ -koefficienten, spejles parablen om  $y$ -aksen. Dette indses nemt ved at betragte formelen for toppunktet.

## 2. Gradsligningen – Den grafiske afbildning

Side 21 af 33



En anden ting, som afhænger af  $b$ -koefficienten er grafens placering i koordinatsystemet.

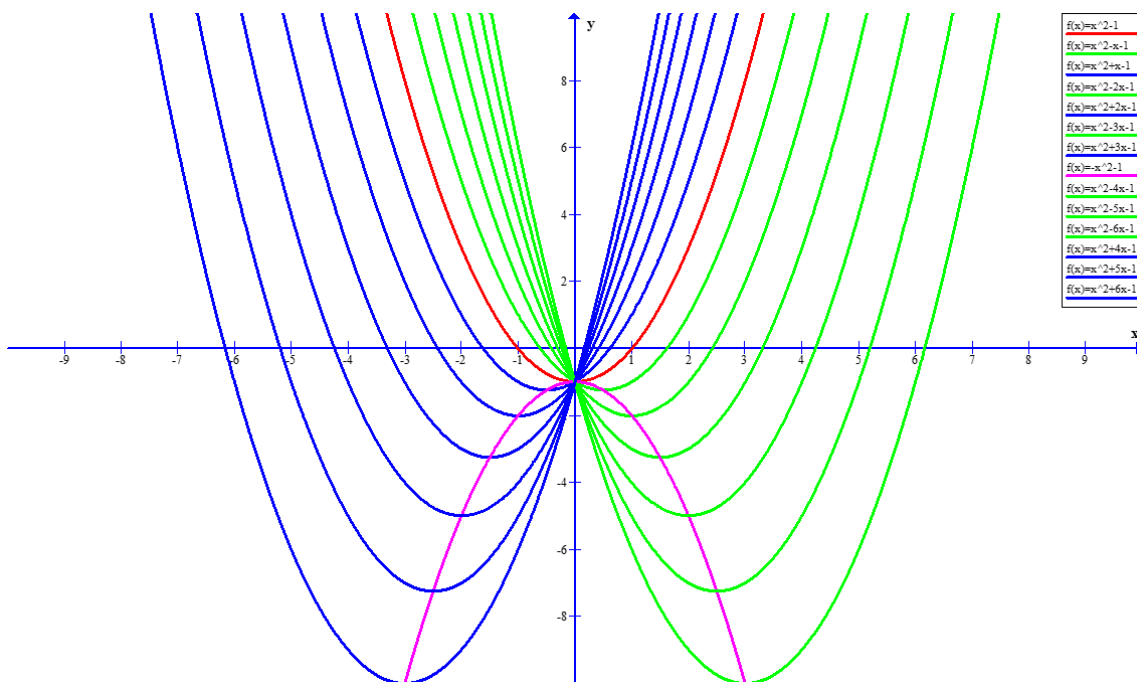
Man skal her forestille sig, at parablen altid er den samme... Parablen form, afhænger jo – som tidligere nævnt – af  $a$ -koefficienten, dvs. hvor spids parablen er.

Skæringspunktet med  $y$ -aksen afhænger af  $c$ -koefficienten (beskrives i et senere afsnit i dette kapitel).

Tilbage er selve parablens placering. Dvs. man skal forestille sig, at parablen forskydes således at formen altid er den samme, og at skæringspunktet med  $y$ -aksen forbliver den samme – nemlig ' $c$ '.

Nedenstående tegning viser en parabel, hvor de grønne og de blå parabler er næsten ens. Kun  $b$ -koefficienten er ændret. Den røde parabel er udgangspunktet.

## 2. Gradsligningen – Den grafiske afbildning



Man ser, at alle parablerne går igennem det samme punkt på y-aksen, og at de alle har nøjagtig den samme form.

Det kan for sjovs skyld bemærkes, at hvis man tegner en kurve igennem de – ved at ændre  $b$ -koefficienten – frembragte parablers toppunkter, så vil denne kurve selv være en parabel. Dette er her vist ved den lilla kurve.

**Hvis parablen er symmetrisk om y-aksen, så er  $b = 0$ .**

## 2. Gradsligningen – Den grafiske afbildning

Side 23 af 33

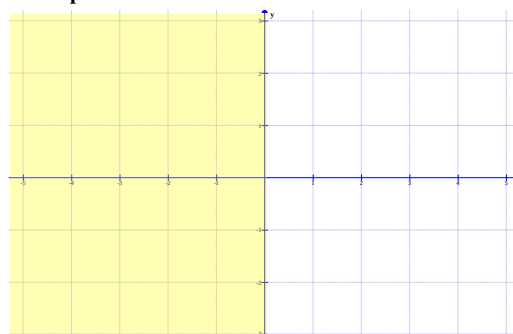
**Ting man kan se ved at betragte  $a$  og  $b$ :**

Eksempel:

$a$  og  $b$ , samme fortegn



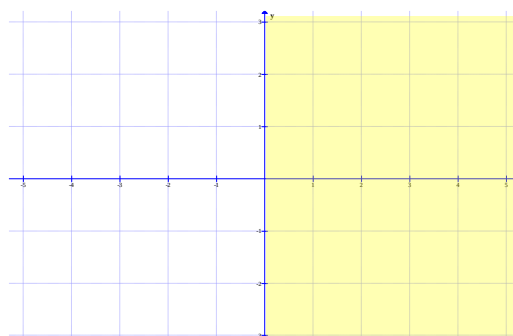
Toppunkt ligger i 2. eller 3. kvadrant



$a$  og  $b$ , modsat fortegn



Toppunkt ligger i 1. eller 4. kvadrant



**Ting man kan se ved at betragte  $c$ :**

Som det også er tilfældet med næsten alle andre funktionstyper, så er konstantleddet her lig med skæringen med  $y$ -aksen.

Her kan man jo forestille sig, at  $x = 0$ . Det er jo tilfældet uanset hvor på  $y$ -aksen man befinder sig!

Sættes  $x$  lig med 0 'forsvinder' de to første led – nemlig dem, som indeholder  $x$ .

Skæring med  $y$ -aksen =  $(x ; y) = (0 ; c)$

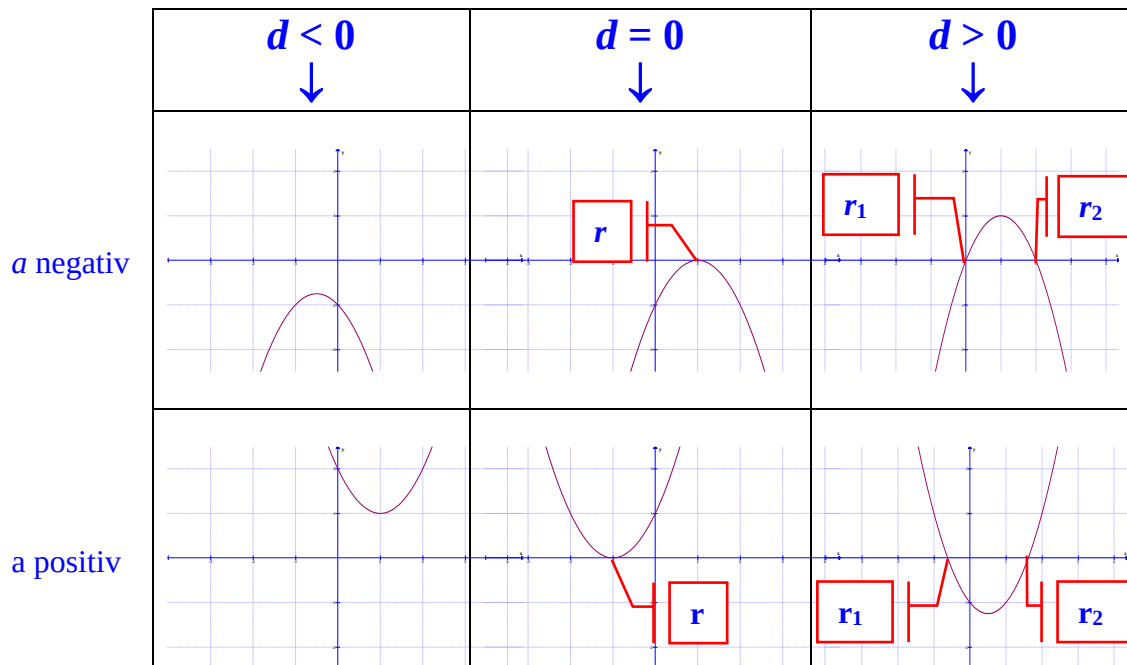
Som det er tilfældet med 2.gradsligningens rødder, så er det **ikke nok** at svare med koefficienten  $c$ 's talværdi, hvis der bliver spurgt om **koordinatet** til skæringen med  $y$ -aksen.

Husk desuden, at der **ALTID** vil være et skæringspunkt med  $y$ -aksen – uanset hvordan parablen er placeret i koordinatsystemet. Hvis  $c = 0$ , traverserer parablen gennem origo.

## 2. Gradsligningen – Den grafiske afbildning

### Diskriminanten – igen...

Som allerede nævnt er størrelsen af diskriminanten,  $d$ , ensbetydende med antallet af løsninger. Men hvordan ser det ud grafisk?



### Parablens Toppunkt:

Skal man udregne toppunktet for parabeln – altså det sted hvor kurvens hældning er vandret og at grafen skifter fra at være stigende til at være faldende (eller omvendt), da bruger man **toppunktsformlen**: (Beviset for denne formel findes i bilag 3.)

$$TP = (x; y) = \left( \frac{-b}{2 \cdot a}; \frac{-d}{4 \cdot a} \right)$$

Ligning 12: (Toppunktsformlen)

Bemærk, at også her skal man udregne diskriminanten,  $d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ , hvorfor det som regel er en god idé at begynde med at udregne netop denne størrelse!

### Symmetriakse:

Den lodrette linje, som går igennem parablens toppunkt, kaldes for parablens symmetri-linje/akse eller spejlingsaksen, da parabeln er symmetrisk omkring netop denne akse.

Husker man på dette, kan man nøjes med at udregne halvdelen af støttepunkterne.

Det er allerede vist, at symmetriaksen går igennem parablens toppunkt.



## 2.Gradsligningen – Den grafiske afbildning

Side 25 af 33

En lodret linje kan skrives på formen:  $x = k$  da hældningen ikke er defineret for en lodret linje. Der kan ikke være tale om en funktion, da der ikke kan være mere end én funktionsværdi for hver  $x$ -værdi.

Da symmetriaksen er en lodret linje, kan ligningen for symmetriaksen skrives på generel form.

$$x = \frac{-b}{2 \cdot a}$$

Ligning 13: (Forskrift for symmetriakse)

### Nogle genveje, hvis 2.gradsfunktionen omskrives:

|                             |                     |                       |
|-----------------------------|---------------------|-----------------------|
| $f(x) = ax^2$               | Symmetri om linjen: | $x = 0$               |
|                             | Toppunkt:           | $(x; y) = (0; 0)$     |
|                             | $a$ positiv: $\cup$ | $a$ negativ: $\cap$   |
| $f(x) = a(x - x_0)^2$       | Symmetri om linjen: | $x = x_0$             |
|                             | Toppunkt:           | $(x; y) = (x_0; 0)$   |
|                             | $a$ positiv: $\cup$ | $a$ negativ: $\cap$   |
| $f(x) = ax^2 + y_0$         | Symmetri om linjen: | $x = 0$               |
|                             | Toppunkt:           | $(x; y) = (0; y_0)$   |
|                             | $a$ positiv: $\cup$ | $a$ negativ: $\cap$   |
| $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$ | Symmetri om linjen: | $x = x_0$             |
|                             | Toppunkt:           | $(x; y) = (x_0; y_0)$ |
|                             | $a$ positiv: $\cup$ | $a$ negativ: $\cap$   |

## 2.Gradsligningen – Bevis

### Bilag 1 – Beviset:

Beviset for at løsningerne til  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$  kan udregnes som:  $r = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2 \cdot a}$ , hvor  $d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ :

$$\begin{aligned}
 &a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \\
 &\Downarrow \quad \text{Gang med } 4a \text{ på begge sider} \\
 &4 \cdot a^2 \cdot x^2 + 4 \cdot a \cdot b \cdot x + 4 \cdot a \cdot c = 0 \\
 &\Downarrow \quad \text{Læg } b^2 - 4 \cdot a \cdot c \text{ til på begge sider} \\
 &\quad \quad \quad \text{(Bemærk, at der byttes om på faktorerne 'b' og 'x' i det midterste led)} \\
 &\quad \quad \quad \text{(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2} \\
 &4 \cdot a^2 \cdot x^2 + 2 \cdot 2 \cdot a \cdot x \cdot b + b^2 = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \\
 &\Downarrow \quad \text{Kvadratsætning} \\
 &(2 \cdot a \cdot x + b)^2 = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \\
 &\Downarrow \quad d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \\
 &\underline{(2 \cdot a \cdot x + b)^2 = d} \quad \leftarrow \text{Ligning 1}
 \end{aligned}$$

Her er indført størrelsen  $d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ , som også kaldes for andengradsligningens **diskriminant**.  
Det viser sig, at den videre løsning af ligningen afhænger af fortegnet for  $d$ .

**$d < 0$**

I [ligning 1](#), vil højre side da være negativ, mens venstre side er positiv (eller 0).  
('Noget' i anden potens vil altid være positivt eller 0).  
Derfor findes der **ingen** værdier af  $x$ , der opfylder ligningen.

**$d = 0$**

[Ligning 1](#) har i dette tilfælde udseendet:

$$\begin{aligned}
 &(2 \cdot a \cdot x + b)^2 = d \\
 &\Downarrow \\
 &(2 \cdot a \cdot x + b) \cdot (2 \cdot a \cdot x + b) = 0 \\
 &\Downarrow \\
 &(2 \cdot a \cdot x + b) = 0 \\
 &\Downarrow \\
 &2 \cdot a \cdot x = -b \\
 &\Downarrow \\
 &x = \frac{-b}{2 \cdot a} \quad \text{- Altså har ligningen netop 1 løsning.}
 \end{aligned}$$

**$d > 0$**

[Ligning 1](#) kan videre omskrives således:

$$\begin{aligned}
 &(2 \cdot a \cdot x + b)^2 = d \\
 &\Downarrow \\
 &2 \cdot a \cdot x + b = \pm \sqrt{d} \\
 &\Downarrow \\
 &2 \cdot a \cdot x = -b \pm \sqrt{d} \\
 &\Downarrow \\
 &x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2 \cdot a} \quad \bigcirc \quad \text{- Altså har ligningen 2 løsninger.}
 \end{aligned}$$

**Q.E.D.**

## 2. Gradsligningen – Alternativt bevis

Side 27 af 33

### Bilag 2 – Alternativt bevis:

En anden alternativ metode til at eftervise andengradsligningens løsninger, er en metode, som til dels også benyttes til udledning af toppunktsformlen. I modsætning til det forrige bevis, anskueliggøres de forskellige antal løsninger ikke her. Udelukkende selve formelen udledes.

Et andengradspolynomium har forskriften:  $f(x) = ax^2 + bx + c$

Nulpunktsformlen ønskes bevist:  $x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2 \cdot a}$ .

Koordinaterne til toppunktet kan udledes af følgende omskrivning:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Sætter  $a$  udenfor parentesen

$$= a \left( x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} \right)$$

Lægger  $\frac{b^2}{4a^2}$  til og trækker  $\frac{b^2}{4a^2}$  fra inde i parentesen

$$= a \left( x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} \right)$$

$\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 = x^2 + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{bx}{a}$  (Kvadratsætning)

$$= a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right)$$

De to sidste led sættes på fælles brøkstreg

$$= a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right)$$

Der skiftes fortegn i det andet led

$$= a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{-4ac + b^2}{4a^2} \right)$$

Bytter om på leddene i tælleren i det andet led

$$= a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)$$

$d = b^2 - 4ac$

$$= a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{d}{4a^2} \right)$$

Det andet led sættes udenfor parentesen

$$= a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{d}{4a}$$

**2. Gradsligningen – Alternativt bevis**

Eventuelle nulpunkter vil forekomme for  $y = f(x) = 0$ , hvilket ifølge ovenstående omskrivning er det samme som:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{d}{4a} = 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{d}{4a} = 0$$

⇕ Flytter det andet led over på den anden side

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{d}{4a}$$

⇕ Dividerer med  $a$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{d}{4a^2}$$

⇕ Tager kvadratroden på begge sider

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{d}{4a^2}}$$

⇕ Isolerer  $x$  ved at flytte  $\frac{b}{2a}$  over på den anden side og reducerer

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{d}}{2a}$$

⇕ Sætter på fælles brøkstreg

$$\underline{\underline{x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}}}$$

**Q.E.D.**

## 2. Gradsligningen – Alternativt bevis

Side 29 af 33

### Bilag 3 – Alternativt bevis 2:

Endnu en alternativ metode til at eftervise andengradsligningens løsninger er ved hjælp af kvadratkomplettering. Denne metode til at bevise andengradsligningen, kan – i modsætning til det først beskrevne bevis – også velegnet til at finde rødderne i en given andengradsligning.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

⇕ Dividerer med  $a$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

⇕ Trækker  $\frac{c}{a}$  fra på begge sider

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x \text{ omskrives vha. kvadratkomplettering til } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

⇕

Generelt:  $x^2 \pm \varphi x = \left(x \pm \left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2 - \left(\frac{\varphi}{2}\right)^2$  (Se Notat om Kvadratkomplettering)

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a}$$

⇕

Lægger  $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$  til på begge sider, kvadrerer brøken og bytter om på leddene på højre side

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

⇕

Tager kvadratroden på begge sider

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

⇕

Forlænger det andet led under rodtegnet med  $4a$  og trækker  $\frac{b}{2a}$  fra på begge sider

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}} \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

⇕

Sætter på fælles brøkstreg og flytter minustegnet, da  $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$

$$x = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow x = \underline{\underline{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}}$$

**Q.E.D.**

## 2. Gradsligningen – Alternativt bevis

### Bilag 3 – Bevis for toppunktsformlen:

Et andengradspolynomium har forskriften:  $f(x) = ax^2 + bx + c$

Toppunktsformlen ønskes bevist:  $TP = (x; y) = \left( \frac{-b}{2a}; \frac{-d}{4a} \right)$ .

Koordinaterne til toppunktet kan udledes af følgende omskrivning:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Sætter  $a$  udenfor parentesen

$$= a \left( x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} \right)$$

Lægger  $\frac{b^2}{4a^2}$  til og trækker  $\frac{b^2}{4a^2}$  fra

$$= a \left( x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} \right)$$

$$\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 = x^2 + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{bx}{a} \quad (\text{Kvadratsætning})$$

$$= a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right)$$

De to sidste led sættes på fælles brøkstreg

$$= a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right)$$

Der skiftes fortegn i det andet led

$$= a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{-4ac + b^2}{4a^2} \right)$$

Bytter om på leddene i tælleren i det andet led

$$= a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)$$

$$d = b^2 - 4ac$$

$$= a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{d}{4a^2} \right)$$

Det andet led sættes udenfor parentesen

$$= a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{d}{4a}$$

## 2. Gradsligningen – Bevis for toppunktsformlen

Side 31 af 33

Den inderste parentes i det andet led er opløftet i 2. potens, så derfor vil den altid være positiv eller mindst lig med nul.

Da hele udtrykket er en funktion, hvor  $x$  er den uafhængige variabel, og da det sidste led ikke indeholder  $x$  er det dermed det første led, som primært dikterer funktionsværdien.

Men parentesen er jo positiv eller nul, og dermed er det  $a$ , som er den styrende faktor.

Så hvis  $a$  er positiv, vil  $f(x)$  antage sin **mindste** værdi når parentesen er lig med

0. Dvs. når  $\left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0$ , hvilket kun er muligt når  $x = \underline{\underline{\frac{-b}{2a}}}$ .

På samme måde – hvis  $a$  er negativ – vil  $f(x)$  antage sin **største** værdi når parentesen er lig med 0, og dermed når  $x = \underline{\underline{\frac{-b}{2a}}}$ , hvilket ses at være det samme, som for når  $a$  er positiv.

I begge tilfælde, vil det første led være lig med 0, og funktionsværdien bliver derfor:

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-d}{4a},$$

hvilket vil sige, at toppunktet,  $TP$ , forekommer for  $x = \underline{\underline{\frac{-b}{2a}}}$  og  $y = \underline{\underline{\frac{-d}{4a}}}$ .

$$\underline{\underline{TP = (x; y) = \left(\frac{-b}{2a}; \frac{-d}{4a}\right)}}$$

Q.E.D.

## 2. Gradsligningen – Bevis for toppunktsformlen

### Bilag 4 – Bevis for toppunktsformlen (Alternativ):

Et andengradspolynomium har forskriften:  $f(x) = ax^2 + bx + c$

Toppunktsformlen ønskes bevist:  $TP = (x; y) = \left( \frac{-b}{2a}; \frac{-d}{4a} \right)$ .

Det er kendt, at hvis  $d = 0$ , så har andengradsligningen én og kun en løsning.

Denne løsning er:  $\frac{-b}{2a}$ .

Det er relativt nemt at indse, at den for toppunktet fundne  $x$ -værdi, også er sand, hvis toppunktet ikke er beliggende på  $x$ -aksen. Det er således "sikkert" at påstå, at

$x$ -værdien i toppunktet altid kan beregnes som  $\frac{-b}{2a}$ .

Det kan også beregnes ved at differentiere  $f(x) = ax^2 + bx + c$  og derefter sætte differentialkvotienten lig med 0.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$\Downarrow$

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$f'(x) = 0$$

$\Downarrow$

$$2ax + b = 0$$

$\Downarrow$

$$2ax = -b$$

$\Downarrow$

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Det er normalt ikke noget problem at indsætte en  $x$ -værdi i et funktionsudtryk.

F.eks. er:

$$f(x) = 2x^2 - 6x + 4$$

$$f(4) = 2 \cdot 4^2 - 6 \cdot 2 + 4 = 2 \cdot 16 - 12 + 4 = 32 - 12 + 4 = \underline{24}$$

... og på fuldstændig samme måde, indsættes nu  $x = \frac{-b}{2a}$  i det generelle funktionsudtryk:



## 2. Gradsligningen – Bevis for toppunktsformlen

Side 33 af 33

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c$$

⇕ Kvadrerer det første led på højresiden

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c$$

⇕ Distribuerer hhv.  $a$  og  $b$  ind i parenteserne

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{a \cdot b^2}{4a^2} + \left(\frac{-b^2}{2a}\right) + c$$

⇕ Flytter minustegnet i parentesen udenfor og hæver parentesen

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{a \cdot b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c$$

⇕ Forkorter første led med  $a$

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

⇕ Forlænger de to sidste led for at få  $4a$  i nævneren

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}$$

⇕ Rydder op i tælleren

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

⇕ Det ses, at  $(-b^2 + 4ac) = -d$ , idet  $d = b^2 - 4ac$

$$\underline{\underline{f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-d}{4a}}}$$

Det er således bevist for en andengradsfunktion, at funktionsværdien  $y$  er lig med  $\frac{-d}{4a}$ , når  $x = \frac{-b}{2a}$ .

En hurtig betragtning giver, at  $TP = (x; y); \left(\frac{-b}{2a}; \frac{-d}{4a}\right)$

**Q.E.D.**