MATEMATIK

NOTAT 05

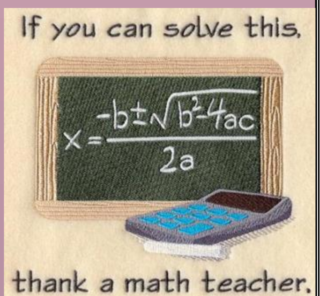
2. GRADSLIGNINGEN

AF:

CAND. POLYT.

MICHEL MANDIX

SIDSTE REVISION: NOVEMBER 2024



Oversigt over græske bogstaver:

Kapitaler	Minuskler	Navn
Α	α	Alfa
Γ	γ	Gamma
Ε	ε	Epsilon
Η	η	Eta
Ι	ι	Jota
Λ	λ	Lambda
Ν	ν	Ny
Ο	o	Omikron
Ρ	ρ	Rho
Τ	τ	Tau
Φ	φ	Phi
Ψ	ψ	Psi

Kapitaler	Minuskler	Navn
Β	β	Beta
Δ	δ	Delta
Ζ	ζ	Zeta
Θ	θ	Theta
Κ	κ	Kappa
Μ	μ	My
Ξ	ξ	Xi
Π	π	Pi
Σ	σ	Sigma
Υ	υ	Ypsilon
Χ	χ	Chi
Ω	ω	Omega

Indholdsfortegnelse:

Introduktion:

En 2. gradsligning kan altid skrives på formen:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0}$$

a må ikke være lig med 0, for hvis det er tilfældet, står der " $bx + c = 0$ *", hvilket ikke er et 2. gradspolynomium, men derimod et 1. gradspolynomium – altså "linjens ligning".*

Koefficienter

Tallene a, b og c kaldes for ligningens **Koefficienter**.

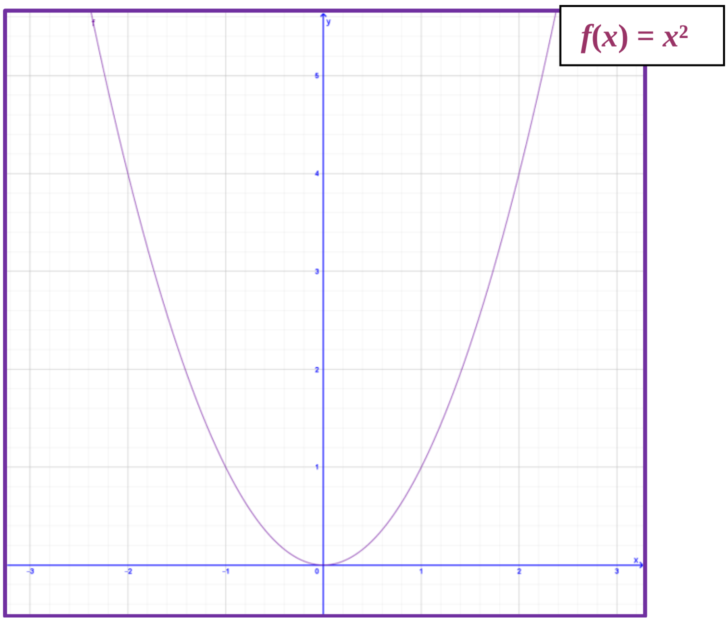
a er koefficienten til 2.grads leddet $\left(x^2\right)$
b er koefficienten til 1.grads leddet $\left(x^1 \text{ – eller bare: } x\right)$
c er koefficienten til 0.grads leddet $\left(x^0 \text{ – eller konstantleddet}\right)$

Bemærk, at alle koefficienter **ALTID** har et fortegn, som skal medregnes! Hvis der ikke står noget fortegn (foran a – eller det første led), regnes den som positiv!

Hvis et led helt mangler **(ikke x^2-leddet)**, **er koefficienten lig med 0!** Det er således kun b og/eller c, som kan være lig med 0. Hvis dette er tilfældet, gælder der specielle regler for løsningen af 2.gradspolynomiet, og disse beskrives senere i dette notat.

Hvis der ikke står et tal foran x^2 eller x, er koefficienten underforstået lig med 1 eller -1, afhængigt af fortegnet.

Den grafiske afbildning af en 2.gradsligning kaldes en **parabel**, og kan f.eks. se ud som i nedenstående figur:



Figur 1: Et eksempel på en parabel. Her er $f(x) = x^2$

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$y=f(x)$	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4

Løsning af 2.gradsligningen:

Som nævnt, kan andengradsligningen skrives på formen:

$$\boxed{ax^2+bx+c=0, \quad a\neq 0}$$

Ligning 1

En lignings **løsninger** kan beskrives som de steder på *x*-aksen, hvor ligningens graf skærer *x*-aksen!

Specielt for 2.gradsligninger, findes der et formelapparat, der kan bruges til at finde ligningens løsninger, som for resten også i daglig tale kaldes ligningens **nulpunkter** eller **rødder**.

Bemærk forskellen! Hvis der er tale om en funktions nulpunkter, refereres der til de *x*-værdier, som opfylder ligningen $f(x)=0$.

Eksempler kan være:

$$f(x)=2x-4 \qquad \left.\begin{array}{c} 2x-4=0 \\ \Updownarrow \\ \underline{\underline{x=2}} \end{array}\right\} \text{Her er nulpunktet: } \underline{\underline{x=2}}$$

$$f(x)=2x^2-3x-2 \qquad \left.\begin{array}{c} 2x^2-3x-2=0 \\ \Updownarrow \\ \underline{\underline{x=-\frac{1}{2} \vee x=2}} \end{array}\right\} \text{Her er nulpunkterne: } \underline{\underline{x=-\frac{1}{2} \text{ eller } x=2}}$$

Man kan altså tale om en lidt knudret sproglig konstruktion, idet der normalt tænkes på et koordinatsæt: $(x;y)=(a;b)$, men nulpunkter er IKKE et koordinatsæt, selvom det hedder et nulpunkt.

Vær altid opmærksom på opgavens ordlyd! Man kan – i forbindelse med funktionsanalyse – blive bedt om at angive koordinater til grafen for funktionens skæringspunkter med de to koordinatakser. Dette refererer til grafen for funktionen og ikke til løsningerne for funktionen. Et spørgsmål som dette skal besvares med et koordinatsæt, men mere om det lidt senere.

Diskriminanten, *d*

Løsningerne findes ved først at udregne **diskriminanten, *d***.

$$\boxed{d=b^2-4\cdot a\cdot c}$$

Ligning 2: (Diskriminantformlen)

Man kan umiddelbart se noget om ligningens løsninger ved at betragte diskriminanten, ***d***:

$d > 0$ (Positiv) : Ligningen har 2 forskellige løsninger.

$d = 0$: Ligningen har 2 ens løsninger.
Normalt siger man, at der findes 1 løsning, da løsningerne er ens.
Man siger også, at løsningen er en **dobbeltrod**. (Der er faktisk to ENS eller IDENTISKE løsninger. Det bliver også forklaret lidt senere i dette notat.)

$d < 0$ (Negativ) : Ligningen har ingen løsninger.
Man siger også, at $L = \varnothing$.

Bemærk, at man stadig sagtens kan bestemme toppunkt, krumning, skæring med y-aksen etc. når d < 0.
Det eneste, som ikke kan bestemmes hvis d < 0, er skæringspunkter med x-aksen, da de ikke eksisterer.

Selve parablen (grafen) eksisterer i bedste velgående – den skærer eller rører bare ikke x-aksen.

Når man har udregnet d, og fundet at $d > 0$ eller at $d = 0$, indsættes d i næste ”trin” i formelapparatet:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2 \cdot a} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{d}}{2 \cdot a} \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{d}}{2 \cdot a} \end{cases}$$

Ligning 3: (Nulpunktsformlen)¨

(Beviset for hele dette formelapparat findes i bilagene.)

Diskriminanten – Igen…

Opsummering af teorien om diskriminanten, *d*:

$$\boxed{d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c}$$

Ligning 4: (Diskriminantformlen)

***d* < 0**

Når d er negativ, kan man ikke udregne $\sqrt{d}$, da man ikke kan tage kvadratroden af et negativt tal.[1]

Derfor er $L = \varnothing$

I princippet betyder det, at hvis man udregner *d* til at være negativ, så kan man allerede her konkludere, at der ikke er nogen reelle løsninger til 2.gradsligningen. I dette tilfælde skal man **IKKE** indsætte værdierne i nulpunktsformlen (Ligning 3).
Bemærk, at det stadig er yderst relevant at udregne toppunkt og vurdere parablens beliggenhed i koordinatsystemet. Det eneste, som *d* indikerer ved at være negativ er, at parablen ikke skærer *x*-aksen.

***d* = 0**

Når *d* er lig med 0, skal man tage kvadratroden af 0.
Det kan man sagtens… $\sqrt{0} = 0$.

Når man så skal indsætte *d* i nulpunktsformlen (Ligning 3), får man:
$x = \dfrac{-b \pm 0}{2 \cdot a}$. Om man lægger 0 til eller trækker 0 fra, det er lige meget, så konklusionen er, at:

$$\boxed{x = \frac{-b}{2 \cdot a}}$$

Ligning 5: (Specielt for *d* = 0)

Det er her, at dobbeltroden kommer ind i billedet. Det er ligegyldigt om man lægger 0 til eller trækker 0 fra,

***d* > 0**

Når *d* er positiv og man tager kvadratroden af diskriminanten, giver det **to** løsninger. En plus- og en minusløsning.

Eksempel: $x^2 = 9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = x = \pm\sqrt{9} = \pm 3,$ da $3 \cdot 3 = 9$ og $(-3) \cdot (-3) = 9$.

Derfor fås to forskellige løsninger, når *d* indsættes i nulpunktsformlen (Ligning 3).

$$\boxed{x_1 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2 \cdot a} \quad \vee \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2 \cdot a}}$$

Ligning 6: (Løsninger for *d* > 0)

[1] En sandhed med modifikationer. Man KAN faktisk godt tage kvadratroden af et negativt tal, men det kræver, at man anvender **komplekse tal**, hvilket ikke er kernestof på gymnasiale uddannelser.

Øvelse 01:

Identificér a, b og c i nedenstående andengradsudtryk og udregn diskriminanten, d.

a)	$-x^2+2x+2=0$	$a=$	$b=$	$c=$	$d=$
b)	$4x^2+8x-6=0$	$a=$	$b=$	$c=$	$d=$
c)	$x^2+2x+2=0$	$a=$	$b=$	$c=$	$d=$
d)	$3x^2+3x+3=0$	$a=$	$b=$	$c=$	$d=$
e)	$-3x^2-2x-1=0$	$a=$	$b=$	$c=$	$d=$
f)	$4,2x^2+11,6x-6=0$	$a=$	$b=$	$c=$	$d=$
g)	$3x^2+5x=5$	$a=$	$b=$	$c=$	$d=$
h)	$4x^2+2x=0$	$a=$	$b=$	$c=$	$d=$
i)	$-x^2=-8x$	$a=$	$b=$	$c=$	$d=$
j)	$-x^2+9=0$	$a=$	$b=$	$c=$	$d=$
k)	$-2x^2=8$	$a=$	$b=$	$c=$	$d=$
l)	$1,4x^2-3,7x+2=0$	$a=$	$b=$	$c=$	$d=$
m)	$-3x^2-2x+1=0$	$a=$	$b=$	$c=$	$d=$
n)	$2x^2=0$	$a=$	$b=$	$c=$	$d=$
o)	$2x-6=0$	$a=$	$b=$	$c=$	$d=$

2.Gradsligningen – Eksempler

Et par eksempler:

E1 $x^2+8x-9=0 \qquad a=1,\ b=8,\ c=-9$

$$\begin{aligned} d &= b^2-4\cdot a\cdot c \\ &= 8^2-4\cdot 1\cdot(-9) \\ &= 64-(-36) \\ &= 64+36 \\ &\underline{=100} \end{aligned}$$

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{d}}{2\cdot a} = \frac{-8\pm\sqrt{100}}{2\cdot 1} = \frac{-8\pm 10}{2} \Leftrightarrow \left\langle \begin{aligned} x_1 &= \frac{-8-10}{2} = \frac{-18}{2} \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1=-9}} \\ x_2 &= \frac{-8+10}{2} = \frac{2}{2} \Leftrightarrow \underline{\underline{x_2=1}} \end{aligned} \right.$$

E2 $4x^2+8x+4=0 \qquad a=4,\ b=8,\ c=4$

$$\begin{aligned} d &= b^2-4\cdot a\cdot c \\ &= 8^2-4\cdot 4\cdot 4 \\ &= 64-64 \\ &\underline{=0} \end{aligned}$$

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{d}}{2\cdot a} = \frac{-8\pm\sqrt{0}}{2\cdot 4} = \frac{-8\pm 0}{2\cdot 4} = \frac{-8}{8} \Leftrightarrow \underline{\underline{x=-1}} \qquad (\textbf{Dobbeltrod})$$

Husk, at hvis man bliver bedt om **KOORDINATER** til skæringspunkterne med x-aksen, så er det **IKKE NOK** at angive den eller de fundne rødder.

Så skal der svares som følger:

Skæringspunkter med x-aksen er: $(x_1;0)\vee(x_2;0)$ **(Såfremt der er to rødder)**

Skæringspunkt med x-aksen er: $(x;0)$ **(Såfremt der er en dobbeltrod)**

Det vil altid medføre en del strafpoints, hvis der ikke afleveres et koordinat, når der bedes om det!

Øvelse 02:

Betragt følgende andengradsligninger. Udregn for hver af dem, konstanten, *k*, således at andengradsligningen har netop én løsning og angiv denne.

Tip: Husk, at diskriminanten, *d*, har værdien 0, når der kun er en løsning til andengradsligningen.

a)	$kx^2+3x+2=0$	$a=k$	$b=3$	$c=2$	$x=?$
b)	$2x^2+kx+1=0$	$a=2$	$b=k$	$c=1$	$x=?$
c)	$x^2-8x+k=0$	$a=1$	$b=-8$	$c=?$	$x=?$
d)	$kx^2-7x+4=0$	$a=k$	$b=-7$	$c=4$	$x=?$
e)	$2x^2+bx-7=0$	$a=2$	$b=k$	$c=-7$	$x=?$
f)	$4{,}2x^2+11{,}6x-k=0$	$a=4{,}2$	$b=11{,}6$	$c=?$	$x=?$
g)	$3x^2+5x=5$	a = ?	$b=5$	$c=-5$	$x=?$
h)	$4x^2+kx+19=0$	$a=4$	$b=k$	$c=19$	$x=?$
i)	$-x^2+5x+k=0$	$a=-1$	$b=5$	$c=k$	$x=?$

2.Gradsligningen – Løsninger

Øvelse 03:

Bestem for hvert af de nedenstående andengradsligninger nulpunkterne (hvis der er nogen).
Giv desuden en begrundelse for antallet af nulpunkter – baseret på værdien af diskriminanten.

Dvs. at besvarelsen skal indeholde:

- Udregningen af d
- Antallet af løsninger **samt** begrundelse
- Udregning af eventuelle nulpunkter

a)	$x^2+4x-5=0$
b)	$x^2-5x+4=0$
c)	$x^2+2x+1=0$
d)	$-3x^2+3x-9=0$
e)	$-3x^2-2x=1$
f)	$-3,7x^2+6,1x+2,35=0$
g)	$3x^2+5x=5$
h)	$4x^2+2x=0$
i)	$-x^2=-8x$
j)	$-x^2+9=0$
k)	$-2x^2=8$
l)	$1,4x^2-3,7x+2=0$
m)	$-3x^2-2x+1=0$
n)	$2x^2=0$
o)	$2x-6=0$

Specialtilfælde (*b*- eller *c*-koefficienten = 0):

Det kan godt betale sig at lære disse specialtilfælde af 2.gradsligningen udenad, da man derved kan spare en masse tid og besvær.

c = 0

$$c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax^2 + bx = 0$$

Da konstantleddet er 0 og dermed væk, ser man at størrelsen x indgår i alle led. Derfor kan man faktorisere og sætte x udenfor en parentes:

$$\underbrace{x}_{Tal\ 1} \cdot \underbrace{(ax+b)}_{Tal\ 2} = 0$$

Nulreglen

Et produkt er nul, hvis en (eller begge) af faktorerne er nul.
$Dvs.\ a \cdot b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \ \ v \ \ b = 0$

Ligning 7: (Nulreglen)

Derfor vil ovenstående ligning være sand, hvis enten **Tal 1 (*a*) = 0** eller **Tal 2 (*b*) = 0**.
Det er jo ligegyldigt om enten a eller b er 0 – resultatet vil jo altid blive det samme:

$$0 \cdot b = a \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$$

$$Tal1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 0}}$$

$$Tal2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{-b}{a}}}$$

Ligning 8: (Løsning når specielt c = 0)

Øvelse 04:

Bestem nulpunkter for følgende funktioner ved at bruge ”genvejen”:

a) $f(x) = x^2 + 2x$

b) $f(x) = -3x^2 + 6x$

c) $f(x) = -x^2 - 8x$

d) $f(x) = 12x^2 - 36x$

e) $f(x) = 4x^2 + 5x$

f) $f(x) = -2x^2 + 7x$

2.Gradsligningen – Specialtilfælde

$b = 0$

$b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax^2 + c = 0$

Da 1.gradsleddet er 0 og dermed væk, ser man at ligningen kan løses vha. en simpel kvadrat-rodsberegning:

$$ax^2 + c = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$x^2 = \frac{-c}{a}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}}}$$

Ligning 9: (Løsning, når specielt *b* = 0 samt *a* og *c* har modsat fortegn)

Bemærk her, at det er en **ufravigelig betingelse**, at koefficienterne *a* og *c* har modsat fortegn! Hvis de ikke har det, vil $\frac{-c}{a}$ blive en negativ størrelse, som man jo – som bekendt – ikke kan tage kvadratroden af.
(Medmindre man regner med komplekse tal.)

Øvelse 05:

Bestem nulpunkter for følgende funktioner ved at bruge ”genvejen”:

$f(x) = x^2 - 4$

$f(x) = -x^2 + 9$

$f(x) = -2x^2 + 128$

$f(x) = -x^2 - 20$

$f(x) = 3x^2 - 27$

$f(x) = 4x^2 + 25$

$f(x) = -7x^2 + 16$

$f(x) = -x^2 + 20$

Små tips & tricks om 2.gradsligninger:

2.gradsligninger kan forekomme på andre former end ligning 1: $ax^2 + bx + c = 0$.

… Og når de gør det, kan det betale sig at kunne huske disse formler:

2.gradsligningen opløst i faktorer:

$$y = f(x) = a(x - r_1) \cdot (x - r_2) \qquad \text{(Forskellige rødder)}$$

$$y = f(x) = a(x - r)^2 \qquad \text{(Dobbeltrod)}$$

Kontrol af de fundne løsninger

Når man har fundet ligningens rødder, kan man med fordel foretage et par simple tests, for at se, om man har regnet rigtigt:

$$\boxed{r_1 + r_2 = \frac{-b}{a}}$$

Ligning 10

$$\boxed{r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}}$$

Ligning 11

The Berry Method

Berry metoden (The Berry Method) er en procedure til at faktorisere en trinomial (en tre-leddet atørrelse).

Metoden er vidt udbredt i USA, men er ikke særlig kendt i Danmark.

I det følgende beskrives metoden, men dette afsnit vil ikke forventes anvendt i undervisningen, ligesom det her antages, at det gøres for at løse en andengradsligning og ikke bare at faktorisere et tre-leddet udtryk.

Den generelle ”opskrift” på Berry-metoden er:

Trin 1	Udregn $a \cdot c$
Trin 2	Find et talpar, *m* og *n*, hvis produkt er lig med $a \cdot c$, og hvis sum er lig med koefficenten *b*.
Trin 3	Lav produktet: $(ax+m)(ax+n)$ -
Trin 4	For hver toleddet størrelse i trin 3, forkort parenteserne mest muligt og se bort fra enhver fælles faktor. Resultatet er den faktoriserede form.

Når man skal løse en andengradsligning vha. Berry metoden, skal man – som sædvanlig – hvis nødvendigt – omskrive andengradsligningen til formen: $ax^2 + bx + x = 0$.
Dvs. at hvis f.eks. ligningen er givet som: $8x^2 + 2x = 3$, så er det nødvendigt at omskrive udtrykket til: $8x^2 + 2x - 3 = 0$.
Bemærk, at hvis formålet kun var at faktorisere det tre-leddede udtryk – som de gør i USA – så ville der kun stå $8x^2 + 2x - 3$. Men da det her skal bruges til at løse en ligning, kan man ikke nøjes med et udtryk (altså et matematisk udtryk uden lighedstegn), men hvor der er tilføjet et ” = 0 ”. Det er naturligvis fordi, det at løse en ligning betyder, at der undersøges hvornår funktionsværdien (*y*) = 0, og dermed, hvornår grafen for funktionen skærer *x*-aksen. Det erindres, at *y* = 0 på hele *x*-aksen.

Hvis man ikke i forvejen er bekendt med at bestemme koefficienterne *a*, *b* og *c*, så er det et godt tidspunkt at læse op på det nu. Se det første afsnit i dette notat for en beskrivelse af, hvordan man bestemmer de tre koefficienter.

Metoden beskrives ud fra et eksempel. (Eksemplet, som allerede er vist lige ovenfor).

Løs ligningen $8x^2 + 2x - 3 = 0$ vha. Berry metoden.

Trin 01: **Bestem koefficienterne *a*, *b* og *c*:**
a = 8, *b* = 2 og *c* = –3

Trin 02: **Udregn $a \cdot c$.:**
$a \cdot c = 8 \cdot (-3) \Leftrightarrow a \cdot c = -24$.

Trin 03: **Find de to faktorer *m* og *n*, som går op i $a \cdot c$, og som samtidig adderes til resultatet *b*:**
Ved at prøve sig frem (det går hurtigt med øvelsen), ses det, at tallene -4 og 6 ganget sammen giver netop $(-4)\cdot 6 = -24$ og lagt sammen giver $-4+6=2\ (=b)$.

Dvs., at: $\underline{m=-4 \text{ og } n=6}$.

Rækkefølgen er ligegyldig! Det kunne lige så godt være at $\underline{m=6 \text{ og } n=-4}$, men for at blive ved eksemplet fortsættes med det første "gæt".

Trin 04: **Opret produktet:** $(\boldsymbol{ax}+\boldsymbol{m})\cdot(\boldsymbol{ax}+\boldsymbol{n})$ (Husk at *a* er en af koefficienterne)

$(ax+m)\cdot(ax+n)=\underline{(8x-4)\cdot(8x+6)}$

Bemærk, at *a* er faktoren foran *x* i begge parenteser!
Bemærk, at dette ikke nødvendigvis er en logisk konstruktion. Det er en del af løsnings metoden, men giver ikke på nuværende tidspunkt et brugbart resultat.
Det erindres at $(x-r_1)\cdot(x-r_2)$, hvor r_1 og r_2 er løsningerne til andengradsligningen giver resultatet $ax^2+bx+x=0$ – altså den oprindelige andengradsligning, men dette må ikke forveksles med det, der skal udføres her i trin 04.
Brug kogebogen slavisk og tænk ikke på at finde sammenhængen i dette trin.

Trin 05: **Nu forkortes HVER AF PARENTESERNE med største fælles divisor (SFD).**
Største fælles divisor er det største tal, som går op i begge led i parentesen.

$\underline{(2x-1)\cdot(4x+3)}$

Mangler der noget? Ja, det gør der. Strengt taget, foretages en faktorisering af hver af de to parenteser. Dvs. at SFD sættes uden for en parentes. Da det er målet at løse ligningen – dvs. sætte udtrykket lig med 0, tænkes det, at man dividerer med de faktorer, som sættes udenfor parenteserne. Eller med andre ord: De forsvinder, da der står 0 på den anden side af lighedstegnet, og at man således dividerer 0 med de respektive faktorer. Men da denne metode er et "værktøj" til at finde løsninger på en andengradsligning, så ignoreres de manglende små mellemregninger.

Trin 06: **HVER AF PARENTESERNE sættes lig med 0 og løses:**

$$2x-1=0 \quad\Updownarrow\quad 2x=1 \quad\Updownarrow\quad \underline{x=\frac{1}{2}}$$

$$4x+3=0 \quad\Updownarrow\quad 4x=-3 \quad\Updownarrow\quad \underline{x=-\frac{3}{4}}$$

Trin 07: **Løsningerne konkluderes på baggrund af ovenstående:**

Løsningen til ligningen: $8x^2+2x-3=0$ er: $\underline{\underline{x=\frac{1}{2} \text{ eller } x=-\frac{3}{4}}}$

Et par eksempler:

Eksempel 01:

Løs andengradsligningen $x^2 + 8x - 9 = 0$ vha. Berry metoden.

Trin 01: **Bestem koefficienterne *a*, *b* og *c*:**
$a = 1$, $b = 8$ og $c = -9$

Trin 02: **Udregn $a \cdot c$.:**
$a \cdot c = 1 \cdot (-9) = -9$

Trin 03: **Find de to faktorer *m* og *n*, som går op i $a \cdot c$., og som samtidig adderes til resultatet *b*:**
$m = -1$ og $n = 9$, da $(-1) \cdot 9 = -9$ og $(-1) + 9 = 8\ (= b)$

Med lidt øvelse, er det nemt at vurdere værdierne og fortegnene på *m* og *n*.
I dette tilfælde er $b = 8$. Hvilke tal ganget sammen giver –9? Det gør 1 og –9, men
også –1 og 9. Ligeledes giver 3 ganget med –3 resultatet –9 og sluttelig giver –3 ganget med 3 også resultatet –9.
De to tal: 3 og –3 kan på ingen måde manipuleres hverken vha. addition eller subtraktion til at give resultatet 8 – uanset rækkefølgen. Men 1 og 9 kan godt give 8, hvis man trækker 1 fra 9.
$+9 - 1 = 8$, så $\underline{m = 9}$ og $\underline{n = -1}$. (Eller omvendt. Pointen er, at de to talværdier er hhv. –1 og 9).

Trin 04: **Opret produktet: $(ax + m) \cdot (ax + n)$**
$(ax + m) \cdot (ax + n) = (x + 9) \cdot (x - 1)$

Trin 05: **Nu forkortes HVER AF PARENTESERNE med største fælles divisor (SFD).**
Da koefficienten $a = 1$, er der ikke nogen grund til at faktorisere udtrykkene, så der står fortsat: $(x + 9) \cdot (x - 1)$

Trin 06: **HVER AF PARENTESERNE sættes lig med 0 og løses:**

$x + 1 = 0$	$x - 9 = 0$
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$\underline{x = -1}$	$\underline{x = 9}$

Trin 07: **Løsningerne konkluderes på baggrund af ovenstående:**

Løsningen til ligningen: $x^2 + 8x - 9 = 0$ er: $\underline{\underline{x = -1 \text{ eller } x = 9}}$

Eksempel 02:

Løs andengradsligningen $4x^2+4x-3=0$ vha. Berry metoden.

Trin 01: **Bestem koefficienterne *a, b* og *c*:**
$a = 4$, $b = 4$ og $c = –3$

Trin 02: **Udregn $a \cdot c.$:**
$a \cdot c = 4 \cdot (–3) = –12$

Trin 03: **Find de to faktorer *m* og *n*, som går op i $a \cdot c.$, og som samtidig adderes til resultatet *b*:**
$m=6$ og $n=–2$, da $6\cdot(-2)=-12$ og $6-2=4\ (=b)$
Mulige tal, som ganget sammen giver –12:

1 og –12	–1 og 12
2 og –6	–2 og 6
3 og –4	–3 og 4

Her ses det hurtigt, at den eneste talkombination, som kan adderes til 4 er: –2 og 6.

Trin 04: **Opret produktet: $(ax+m)\cdot(ax+n)$**
$(ax+m)\cdot(ax+n)=(x+1)\cdot(x-9)$

Trin 05: **Nu forkortes HVER AF PARENTESERNE med største fælles divisor (SFD).**
Da koefficienten $a = 1$, er der ikke nogen grund til at faktorisere udtrykkene, så der står fortsat:
$(x+1)\cdot(x-9)$

Trin 06: **HVER AF PARENTESERNE sættes lig med 0 og løses:**

$x+1=0 \Leftrightarrow \underline{x=-1}$

$x-9=0 \Leftrightarrow \underline{x=9}$

Trin 07: **Løsningerne konkluderes på baggrund af ovenstående:**

Løsningen til ligningen: $x^2+8x-9=0$ er: $\underline{\underline{x=-1 \text{ eller } x=9}}$

2.Gradsligningen – Berry metoden

Eksempel 03: Løs andengradsligningen: $4x^2 - 15x - 25 = 0$

Berry method anvendes:

$a = 4, \; b = -15$ og $c = -25$

Trin 1 $a \cdot c = 4 \cdot (-25) \Leftrightarrow \underline{a \cdot c = -100}$

Trin 2 $m = 5$ og $n = -20$ er faktorer til produktet -100, og summen af $m = 5$ og $n = -20 = -15$

Trin 3 $(4x + 5)(4x - 20) = 0$

Trin 4 Parenteserne forkortes: $(4x + 5)(x - 5) = 0$

Ved at benytte nulreglen, indses det nemt, at løsningerne til andengradsligningen er:

$4x + 5 = 0$, eller

$\Updownarrow$

$4x = -5$

$\Updownarrow$

$\underline{\underline{x = -\frac{5}{4} \; (x \approx -1{,}25)}}$

$x - 5 = 0$

$\Updownarrow$

$\underline{\underline{x = 5}}$

Øvelse 06:

Løs følgende andengradsligninger ved at bruge ”Berry Metoden”:

a) $x^2 + 5x + 6 = 0$

b) $x^2 - 4x - 12 = 0$

c) $x^2 + x - 6 = 0$

d) $3x^2 - 20x + 28 = 0$

e) $6x^2 + 19x - 7 = 0$

f) $8x^2 - 10x - 3 = 0$

Om definitionsmængder og værdimængder…

Definitionsmængden, $Dm(f)$
Definitionsmængden er mængden af værdier af x, som man kan sætte ind i en given ligning.
Man kalder det også for forbrugsmængden. Definitionsmængden skrives: $Dm(f)$.

Generelt gælder for en 2.gradsfunktion, at definitionsmængden: $\boxed{Dm(f) = \mathbb{R}}$

Dette gælder naturligvis kun, såfremt der ikke er andre ikke-matematiske begrænsninger. Dette kunne f.eks. være i fysikken, hvor der kun kastes ”fremad” og ikke tilbage. Da er x kun defineret for den strækning, som er ”foran” kasteren.
Et andet eksempel kan hentes fra økonomien, hvor en parabel beskriver en økonomisk gevinst. Så længe parablen er over x-aksen, er der overskud, og når parablen er under x-aksen, så er der underskud. Da man ikke er interesseret i at køre en forretning med underskud, sættes definitionsmængden til udelukkende at ligge imellem rødderne - forudsat at a er negativ – hvor der er overskud.

Værdimængden, $Vm(f)$
En funktions værdimængde er den mængde af funktionsværdier (y-værdier), som en funktion er i stand til at returnere, når den gennemløber hele definitionsmængden
$Dm(f)$. Funktionen f's værdimængde skrives som $Vm(f)$.

I et koordinatsystem sættes tallene tilhørende værdimængden op ad y-aksen.
Altså er værdimængden den samlede mængde af alle de y-værdier, som en funktion kan antage.

Huskeregel:
Definitionsmængden sættes altid ud ad 1.-aksen, og værdimængden sættes altid op ad 2.-aksen. En huskeregel for dette er at et fodboldhold skal deltage i DM (Danmarksmesterskabet), før det kan komme til VM (Verdensmesterskabet). Altså DM før VM! Eller bare i alfabetisk rækkefølge.

Specielt for 2.gradsligninger:

Da en 2.gradsfunktion afbildes som en parabel, der jo som bekendt ”vender”, således at funktionen går fra faldende til voksende – eller fra voksende til faldende – afhængigt af a's fortegn, og at der derved skabes et toppunkt, vil værdimængden være begrænset således at:

For $a > 0$: $$Vm(f) = \left[\frac{-d}{4 \cdot a}\ ;\ +\infty\right[$$

For $a < 0$: $$Vm(f) = \left]-\infty\ ;\ \frac{-d}{4 \cdot a}\right]$$

Her skal der skrives noget om monotoniforhold.

Ligninger og uligheder:

Det bliver ofte nødvendigt at løse ligninger og uligheder, hvor et eller flere led i ligningen er opløftet i anden potens – altså en andengradsligning.

Eksempler på dette kan være:

1. $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = d \cdot x^2 + e \cdot x + f$

I dette tilfælde er der grafisk tale om to parabler. Når de stilles op som vist lige overfor, er det faktisk en undersøgelse af, om hvorvidt de to parabler skærer hinanden, og i så fald hvor mange gange (1 eller 2) og hvor.

Ved hjælp af almindelig algebra, kan leddene på venstre side "flyttes over", således at højre side af ligningen ender med at være lig med 0.

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = d \cdot x^2 + e \cdot x + f$$
$$\Updownarrow$$
$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c - d \cdot x^2 - e \cdot x - f = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$a \cdot x^2 - d \cdot x^2 + b \cdot x - e \cdot x + c - f = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$(a-d) \cdot x^2 + (b-e) \cdot x + c - f = 0$$

$(a-d)$ samles til ét led, $(b-e)$ samles til ét led og $(c-f)$ samles til ét led.

Så er problemet tilbage til en andengradsligning på grundform, og ligningen kan løses, som tidligere vist.

Betragtes igen det grafiske eksempel, vil de fundne løsninger være de
x-værdier, hvor parablerne skærer hinanden – hvis der er nogen – eller med andre ord – "De x-værdier hvor funktionsværdien er lig med 0".

De evt. fundne x-værdier indsættes i en af de oprindelige ligninger for at finde de tilhørende y-værdier. Det er lige meget om man vælger den højre eller venstre side af ligningen, men et godt tip er, altid at vælge ligningen med de pæneste tal, som giver den nemmeste udregning.

2. Et andet eksempel kan være, hvis man har en parabel og en ret linje, og man søger de eventuelle skæringspunkter – ganske som i forrige eksempel:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = d \cdot x + e$$

Ved hjælp af almindelig algebra, kan leddene på venstre side igen "flyttes over", således at højre side af ligningen ender med at være lig med 0.

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = d \cdot x + e$$
$$\Updownarrow$$
$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c - d \cdot x - e = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$a \cdot x^2 + b \cdot x - d \cdot x + c - e = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$a \cdot x^2 + (b - d) \cdot x + c - e = 0$$

$(b-d)$ samles til ét led og $(c-e)$ samles til ét led. Derved er problemet igen en andengradsligning på grundform, og ligningen kan løses som tidligere vist.

Igen betragtes det grafiske eksempel, og de fundne løsninger er de *x*-værdier, hvor parablen og linjen skærer hinanden – såfremt der findes skæringspunkter.

De evt. fundne *x*-værdier indsættes i en af de oprindelige ligninger for at finde de tilhørende *y*-værdier. Det er principielt set lige meget om man vælger parablens eller linjens side af ligningen, men et godt tip er, altid at vælge at sætte *x*-værdierne ind i linjens ligning, da det som regel er nemmere at løse en førstegradsligning end en andengradsligning.

Det er klart at løsningerne til de to viste eksempler – såfremt der er nogen, vil bestå af punkter, nemlig der, hvor de pågældende funktioner skærer hinanden.

Anderledes er det, hvis der er tale om **andengradsuligheder**.

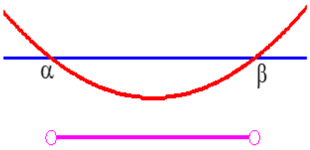
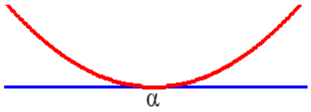
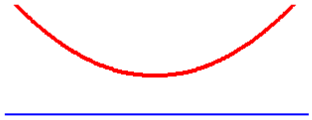
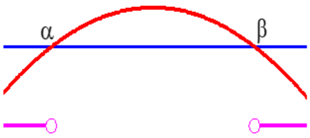
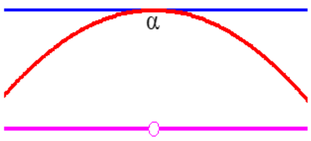
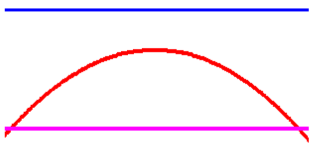
Udgangspunktet for en andengradsulighed kan være de samme, som allerede vist – to parabler eller en parabel og en linje. Men det, som er det interessante her er primært, hvilken af de to funktioner, som er størst og hvilken funktion, som er mindst.

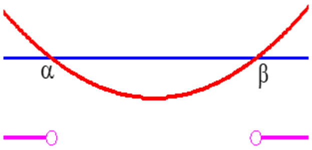
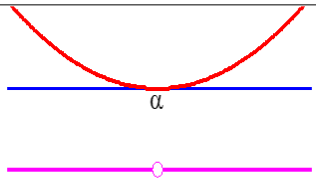
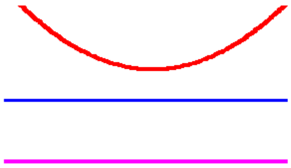
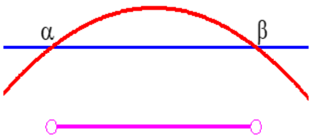
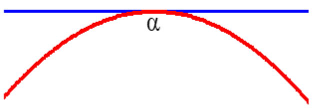
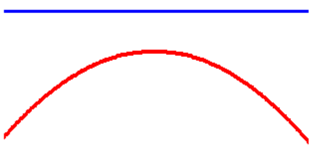
Naturligvis er det også her vigtigt at finde skæringspunkterne (hvis der er nogen), for ellers kan man jo ikke finde ud af, hvilken funktion som er størst – og hvornår.

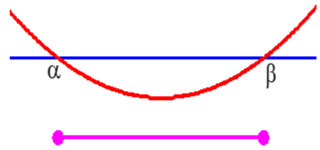
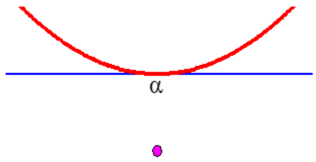
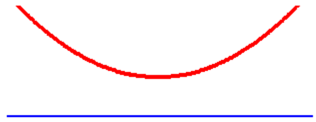
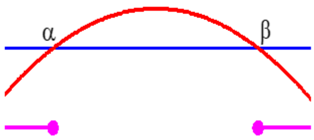
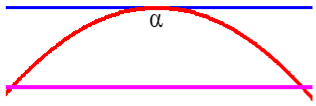
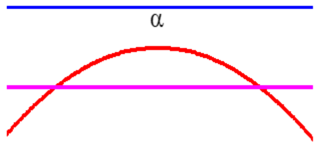
Derfor begynder man – som altid – med at reducere andengradsligningen til normalform. Men når det er en ulighed, er der jo i sagens natur ikke noget lighedstegn, men derimod et ulighedstegn.

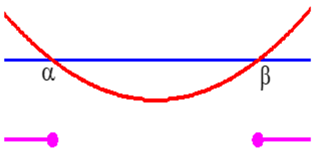
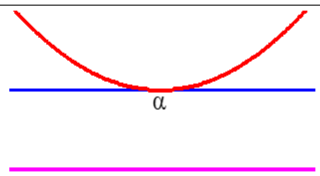
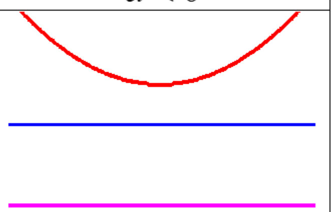
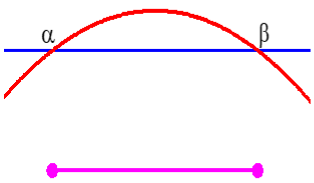
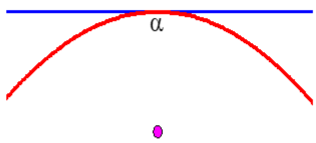
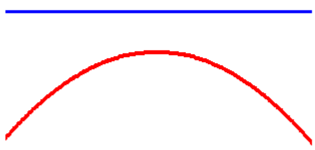
Måske er det nemmest at overskue de forskellige løsningstyper i de følgende skemaer, hvor andengradsligningen er sat på normalform, og hvor løsningerne vises både som tallinjer og som mængder. Løsningerne til selve andengradsligningen – altså der hvor funktionens graf skærer *x*-aksen, kaldes hhv. α og β .

Husk, at løsningen til enhver ulighed beskrives vha. en løsningsmængde (interval) eller en mængde! En undtagelse er, hvis løsningen begrænses til ét punkt.

$a \cdot x^2 + b \cdot x + c < 0$			$d = b^2 - 4ac$
	$d > 0$	$d = 0$	$d < 0$
$a > 0$	 $\underline{\underline{L = \left]\alpha ; \beta\right[}}$	 $\underline{\underline{L = \varnothing}}$	 $\underline{\underline{L = \varnothing}}$
$a < 0$	 $\underline{\underline{L = \left]-\infty ; \alpha\right[\wedge \left]\beta ; \infty\right[}}$	 $\underline{\underline{L = \mathbb{R} \backslash \{0\}}}$	 $\underline{\underline{L = \mathbb{R}}}$

$a \cdot x^2 + b \cdot x + c > 0$			$d = b^2 - 4ac$
	$d > 0$	$d = 0$	$d < 0$
$a > 0$	 $\underline{\underline{L = \left]-\infty ; \alpha\right[\wedge \left]\beta ; \infty\right[}}$	 $\underline{\underline{L = \mathbb{R} \backslash \{0\}}}$	 $\underline{\underline{L = \mathbb{R}}}$
$a < 0$	 $\underline{\underline{L = \left]\alpha ; \beta\right[}}$	 $\underline{\underline{L = \varnothing}}$	 $\underline{\underline{L = \varnothing}}$

$a \cdot x^2 + b \cdot x + c \leq 0$			$d = b^2 - 4ac$
	$d > 0$	$d = 0$	$d < 0$
$a > 0$	 $\underline{\underline{L = [\,\alpha\,;\beta\,]}}$	 $\underline{\underline{L = \alpha}}$	 $\underline{\underline{L = \varnothing}}$
$a < 0$	 $\underline{\underline{L = \,]-\infty;\alpha\,] \wedge [\,\beta;\infty\,[}}$	 $\underline{\underline{L = \mathbb{R}}}$	 $\underline{\underline{L = \mathbb{R}}}$

$a \cdot x^2 + b \cdot x + c \geq 0$			$d = b^2 - 4ac$
	$d > 0$	$d = 0$	$d < 0$
$a > 0$	 $\underline{\underline{L = \,]-\infty;\alpha\,] \wedge [\,\beta;\infty\,[}}$	 $\underline{\underline{L = \mathbb{R}}}$	 $\underline{\underline{L = \mathbb{R}}}$
$a < 0$	 $\underline{\underline{L = [\,\alpha\,;\beta\,]}}$	 $\underline{\underline{L = \alpha}}$	 $\underline{\underline{L = \varnothing}}$

Lidt om differentialkvotienter for en 2.gradsligning:

Reglen om differentiering af potensfunktioner giver:

Differentialkvotient af en potensfunktion

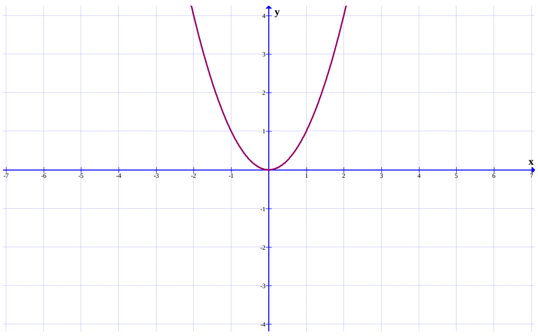
$$\boxed{f(x) = ax^n \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = anx^{(n-1)}}$$

Ligning 12: (Differentialkvotient af en potensfunktion)

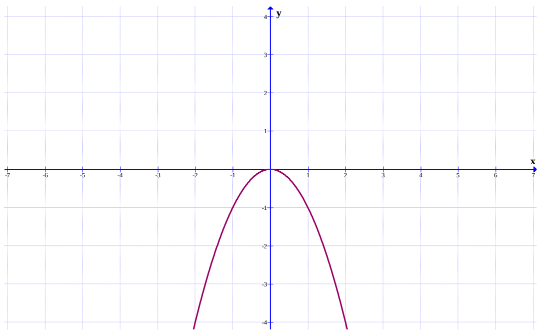
Ud fra denne regel ses det, at et 2.gradspolynomium ALTID vil resultere i et 1.gradspolynomium, når det differentieres.

Og det passer jo også meget fint, da differentialkvotienten altid beskriver hældningen for en funktion. Betragtes en parabel, vil den jo – som allerede nævnt – være voksende og så faldende – eller omvendt.

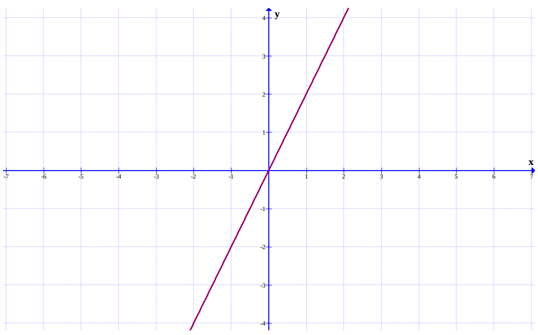
Den differentierede (eller afledte) funktion $f'(x)$ eller $\frac{d}{dx}$ vil da have udseende af en linje, der (i hele $Dm(f)$), vil skære x-aksen én gang og dermed gå fra positivt fortegn til negativt fortegn – eller omvendt.



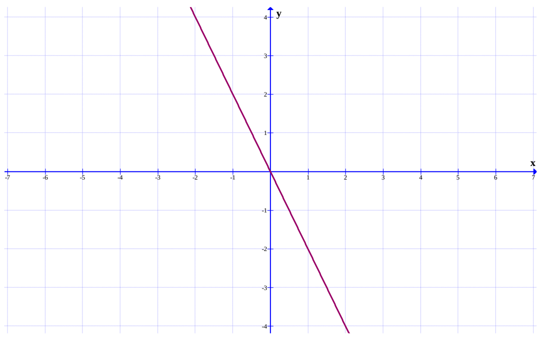
Figur 2: ($f(x) = x^2$)



Figur 3: ($f(x) = -x^2$)



Figur 2a: ($f'(x) = 2x$)



Figur 3a: ($f'(x) = -2x$)

Det kan i forbifarten nævnes, at hvis man differentierer differentialkvotienten for et andengradspolynomium, så differentierer man jo på en funktion, der afbilder en ret linje. (Se ovenstående figurer 2a og 3a.) Denne differentialkvotient vil – som det jo vides fra differentialregningen – give en konstant!
Hvis denne konstant er positiv er den oprindelige funktion konveks (en glad parabel) og hvis den er negativ er den oprindelige funktion konkav (en sur parabel).

Et par små eksempler på andre typer opgaver i forbindelse med 2.gradsligninger:

Givet andengradsligningen: $x^2 + 2x + k = 0$.

a) **Bestem *k* således, at der er netop én løsning til andengradsligningen.**

Hvis der skal være netop én løsning, betyder det at diskriminanten skal være lig med 0. *a* genkendes som 1, *b* genkendes som 2 og sluttelig er *c* = *k*.

Diskriminanten opskrives som: $d = 0 \Leftrightarrow b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0 \Leftrightarrow 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot k = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot k = 4 \Leftrightarrow \underline{\underline{k = 1}}$

b) ***k* sættes nu til -3. Find den nye parabels toppunkt og skæringer med de to akser, opgivet som koordinater.**

Da *k* er lig med -3, kan ligningen nu skrives som: $x^2 + 2x - 3 = 0$.

Diskriminanten opskrives som: $d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 \Leftrightarrow \underline{\underline{d = 16}}$

Der sættes ind i toppunktsligningen: $TP = (x; y) = \left(\frac{-b}{2a}; \frac{-d}{4a}\right) = \left(\frac{-2}{2 \cdot 1}; \frac{-16}{4 \cdot 1}\right) \Leftrightarrow \underline{\underline{TP = (-1; -4)}}$

Der sættes ind i nulpunktsligningen: $r = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2 \cdot a} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} \Leftrightarrow \underline{r_1 = -3} \\ r_2 = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} \Leftrightarrow \underline{r_2 = 1} \end{cases}$

Dette laves om til koordinater: Skæringer med *x*-aksen er: $\underline{\underline{(x_1; 0) = (-3; 0) \vee (x_2; 0) = (1; 0)}}$

Skæring med *y*-aksen svarer til koefficienten *c*: Skæring med *y*-aksen er: $\underline{\underline{(0; c) = (0; -3)}}$

c) **For hvilken værdi af *k*, er en af løsningerne til andengradsligningen *x* = 0?**

Hvis en løsning er lig med 0, betyder det, at *x*-aksen skæres når *x* er lig med 0, eller rettere i origo.
Det betyder samtidig, at *c* er lig med 0, da parablen jo altid skærer *y*-aksen i *c*.
Da *c* i dette tilfælde er lig med *k* findes: $\underline{\underline{k = 0}}$ **(Ligning 6 og 7 – Nulreglen).**

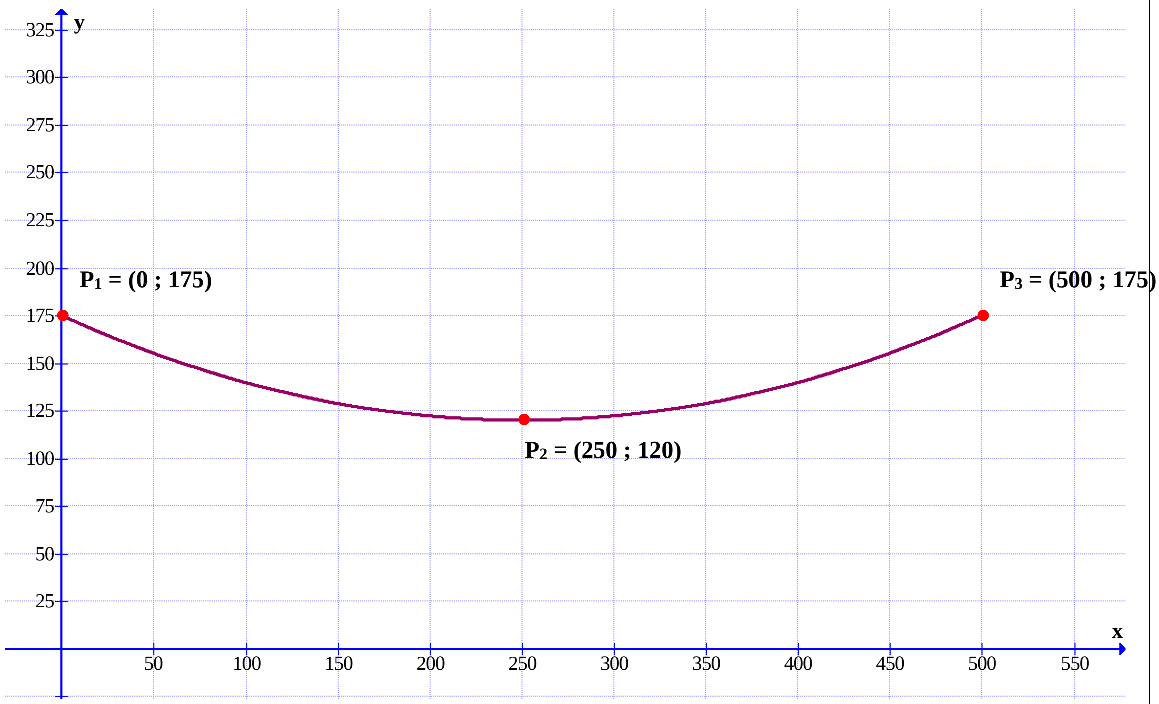
d) **Bestem den anden løsning til andengradsligningen bestemt i spm. c).**

Igen benyttes **Ligning 6 og 7 – Nulreglen**, og det konkluderes at den anden løsning kan skrives på formen:

$x = \frac{-b}{a} = \frac{-2}{1} \Leftrightarrow \underline{\underline{x = -2}}$

Et par små eksempler på andre typer opgaver i forbindelse med 2.gradsligninger:

Der skal føres en vej, som på et stykke kan beskrives som en parabel.
(Alle koordinatmål er beskrevet i meter, målt fra koordinatsystemets origo.)



Givet tre punkter P_1, P_2 og P_3! Find forskriften for den parabel, som traverserer (går igen-nem) de tre punkter.

De kendte *x*- og *y*-værdier indsættes i tre forskellige 2.gradsligninger. Der skal jo som bekendt tre ligninger til at finde tre ubekendte, og det er jo netop hvad der er til rådighed – *a, b* og *c* er de tre ubekendte.

$I)\quad a\cdot x^2+b\cdot x+c=0 \quad\Leftrightarrow\quad a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=175 \quad\Leftrightarrow\quad 0+0+c=175 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{c=175}$

$II)\quad a\cdot x^2+b\cdot x+c=0 \quad\Leftrightarrow\quad a\cdot 250^2+b\cdot 250+c=120 \quad\Leftrightarrow\quad a\cdot 62500+b\cdot 250+175=120$

$III)\quad a\cdot x^2+b\cdot x+c=0 \quad\Leftrightarrow\quad a\cdot 500^2+b\cdot 500+c=175 \quad\Leftrightarrow\quad a\cdot 250000+b\cdot 500\cancel{+175}=\cancel{175}$

$III)$ giver: $a\cdot 250000+b\cdot 500 \quad\Leftrightarrow\quad b=-\dfrac{a\cdot 250000}{500} \quad\Leftrightarrow\quad \underline{b=-500\cdot a}$

Sætter ind i $II)$: $\quad a\cdot 250^2+(-500)\cdot a\cdot 250+175=120 \quad\Leftrightarrow\quad 62500\cdot a-125000\cdot a+175=120$

$\Leftrightarrow\quad -62500\cdot a=120-175 \quad\Leftrightarrow\quad -62500\cdot a=-55$

$\Leftrightarrow\quad a=\dfrac{-55}{-62500} \quad\Leftrightarrow\quad \underline{a=\dfrac{11}{12500}}$

Sætter ind i $III)$: $\quad b=-500\cdot a \quad\Leftrightarrow\quad b=-500\cdot\dfrac{11}{12500}$

$\Leftrightarrow\quad b=-\dfrac{5500}{12500} \quad\Leftrightarrow\quad \underline{b=-\dfrac{11}{25}}$

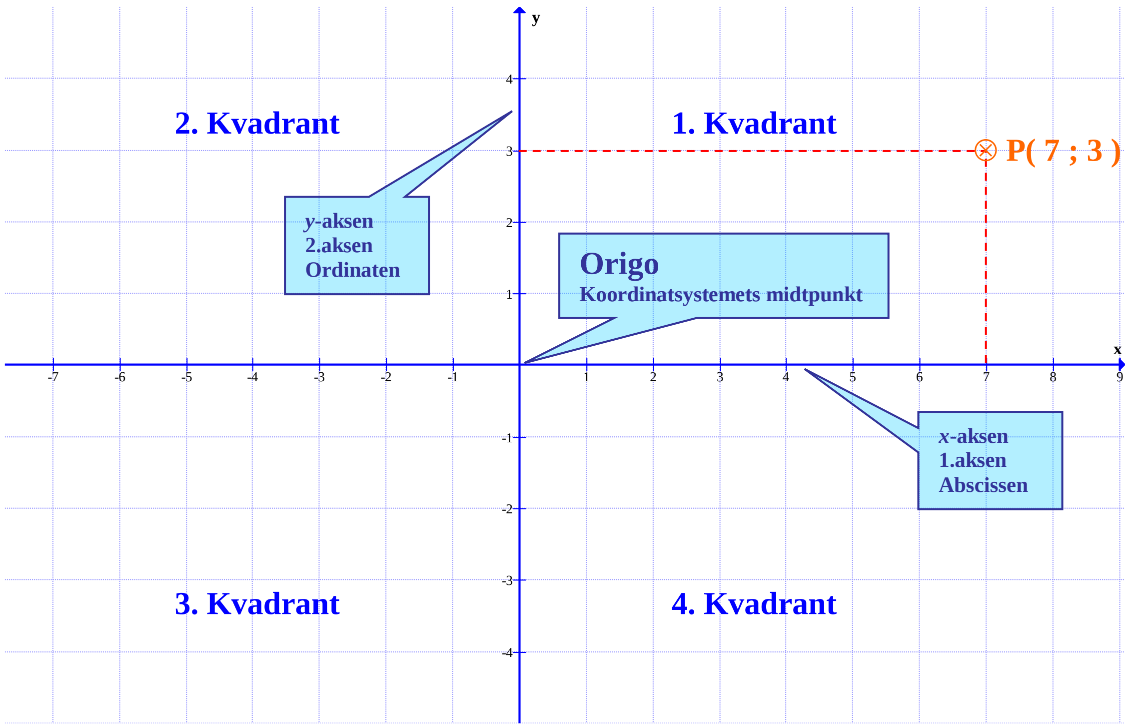
Da man nu har udregnet - og dermed kender - *a*, *b* og *c*, indsættes de tre værdier i 2.gradsligningen hvilket giver:

$$\underline{\underline{\frac{11}{12500}\cdot x^2-\frac{11}{25}\cdot x+175=0}}$$

Koordinatsystemet – en arbejdsplads…

Koordinatsystemets opbygning / nyt eller repetition?:

Et kartesisk koordinatsystem er et retvinklet koordinatsystem. Det betyder at de to (eventuelt tre) akser er ortogonale (vinkelrette) på hinanden. Dermed forstås, at alle punkter i koordinatsystemet opfattes som en skæring mellem linjer parallelle med akserne, hvorved der opstår en ret vinkel for alle punkter.



I den rummelige geometri, kommer der også en tredje akse – *z*-aksen på. Dette rummelige koordinatsystem beskrives i et andet notat …

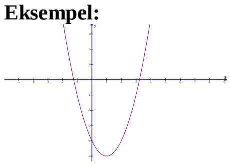
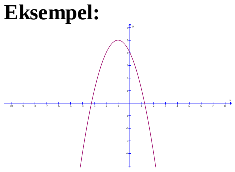
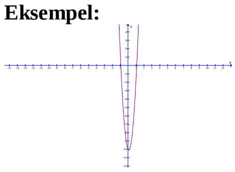
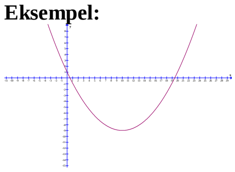
Når man skal tegne ligningens/funktionens graf (parablen), kan man altid lave en tabel med en række støttepunkter ved at indsætte forskellige værdier af *x* i funktionen og derved beregne de tilhørende funktionsværdier (et "sildeben") og udregne et antal funktionsværdier og dermed være i stand til at tegne parablen. (Som på p.1 i dette notat).

Det anbefales at man til eksamen undgår udtrykket "sildeben".
For at citere en kær kollega henleder det tankerne på en person, som sidder og svinger en død fisk over hovedet, og derefter på mirakuløs vis nedkommer med det rigtige resultat.
Benyt i stedet sætningen: "Der laves en tabel med en række støttepunkter ved at indsætte forskellige værdier af *x* i funktionen og derved beregne de tilhørende funktionsværdier".

Der findes en lang række huskeregler, som gør at man kan forestille sig parablen – dens form og placering i koordinatsystemet – uden at udregne et eneste støttepunkt.

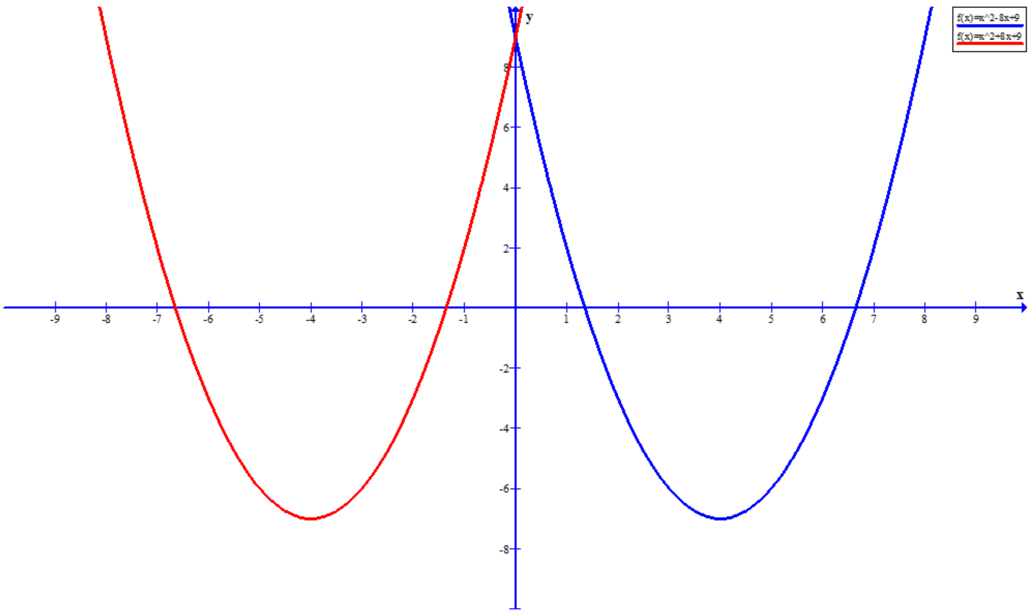
Den grafiske afbildning:

Ting man kan se ved at betragte *a*:

***a* positiv ⇒**	**”Glad” parabel** **Konvekst kurveforløb**	**Eksempel:** 
***a* negativ ⇒**	**”Sur” parabel** **Konkavt kurveforløb**	**Eksempel:** 
***a* relativt stor ⇒ Smal og spids parabel**		**Eksempel:** 
***a* relativt lille ⇒ Bred og stump parabel**		**Eksempel:** 

Ting man kan se ved at betragte *b*:

Skifter man fortegn på *b*-koefficienten, spejles parablen om *y*-aksen. Dette indses nemt ved at betragte formlen for toppunktet.



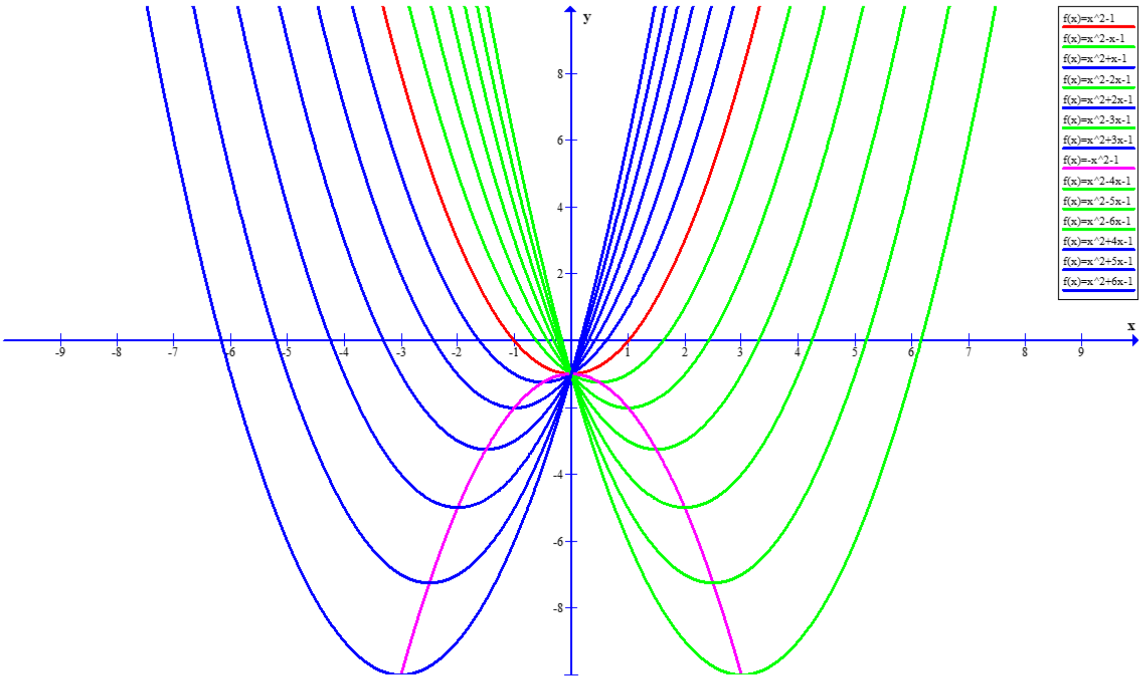
En anden ting, som afhænger af *b*-koefficienten er grafens placering i koordinatsystemet.

Man skal her forestille sig, at parablen altid er den samme… Parablens form, afhænger jo – som tidligere nævnt – af *a*-koefficienten, dvs. hvor spids parablen er.

Skæringspunktet med *y*-aksen afhænger af *c*-koefficienten (beskrives i et senere afsnit i dette kapitel).

Tilbage er selve parablens placering. Dvs. man skal forestille sig, at parablen forskydes således at formen altid er den samme, og at skæringspunktet med *y*-aksen forbliver den samme – nemlig '*c*'.

Nedenstående tegning viser en parabel, hvor de grønne og de blå parabler er næsten ens. Kun *b*-koefficienten er ændret. Den røde parabel er udgangspunktet.



Man ser, at alle parablerne går igennem det samme punkt på *y*-aksen, og at de alle har nøjagtig den samme form.

Det kan for sjovs skyld bemærkes, at hvis man tegner en kurve igennem de – ved at ændre *b*-koefficienten – frembragte parablers toppunkter, så vil denne kurve selv være en parabel. Dette er her vist ved den lilla kurve.

Hvis parablen er symmetrisk om *y*-aksen, så er $b = 0$.

Endelig kan man sige, at koefficienten *b* er grafens hældning, når $x=0$, dvs. med andre ord, grafens hældning der, hvor den skærer *y*-aksen.

Forklaringen på dette skal/kan findes i differentialregningen (se afsnittet om differentialkoefficienter tidligere i dette notat).

En andengradsfunktion har det generelle funktionsudtryk: $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$.

Differentieres dette udtryk fås den afledede funktion: $\underline{f'\left(x\right)=2ax+b}$.

Den afledede funktion er, som tidligere beskrevet, et udtryk for en funktions hældning.

Sættes $x=0$ i den afledede funktion, fås:

$$f'\left(0\right)=2\cdot a\cdot 0+b$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{f'\left(0\right)=b}$$

idet det første led udgår, pga. faktoren 0.

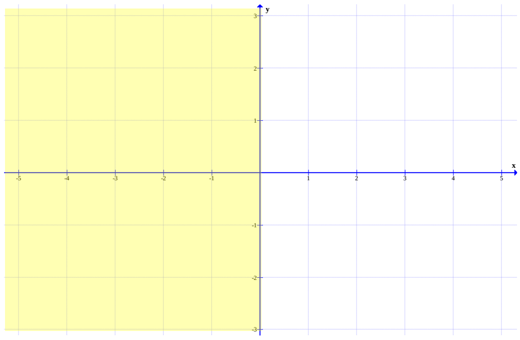
Således er det vist, at koefficienten *b* er lig med funktionens hældning der, hvor den skærer *y*-aksen.

En anden måde at indse dette på er, at

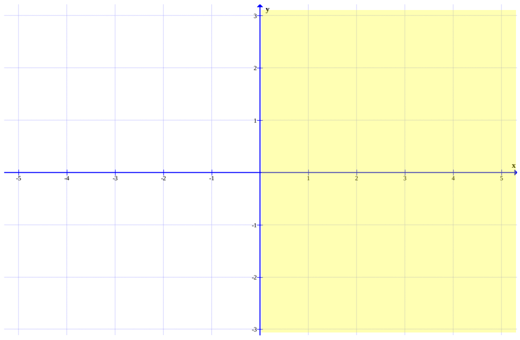
Ting man kan se ved at betragte *a* og *b*:

Eksempel:

***a* og *b* har samme fortegn**
⇳
Toppunkt ligger i 2. eller 3. kvadrant
(Altså til venstre for *y*-aksen).



***a* og *b* har modsat fortegn**
⇳
Toppunkt ligger i 1. eller 4. kvadrant
(Altså til højre for *y*-aksen).



Ting man kan se ved at betragte *c*:

Som det også er tilfældet med næsten alle andre funktionstyper, så er konstantleddet her lig med skæringen med *y*-aksen.

Her kan man jo forestille sig, at $x = 0$. Det er jo tilfældet uanset hvor på *y*-aksen man befinder sig!

Sættes *x* lig med 0 ’forsvinder’ de to første led – nemlig dem, som indeholder faktoren *x*.

Skæring med *y*-aksen = (*x* ; *y*) = (0 ; *c*)

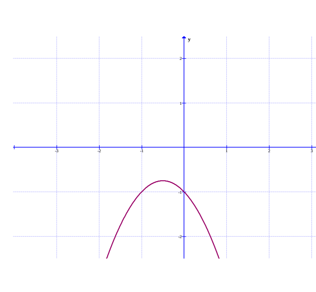
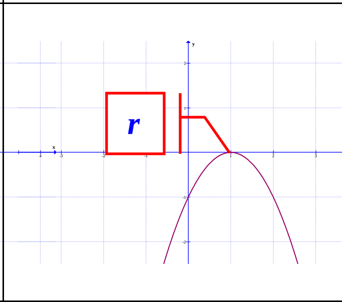
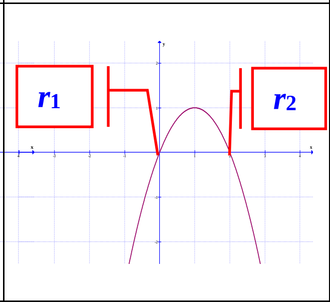
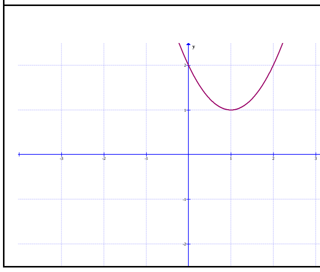
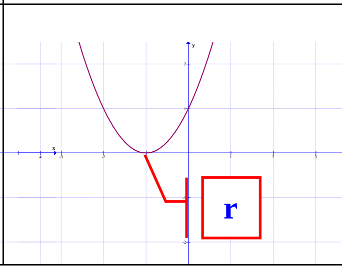
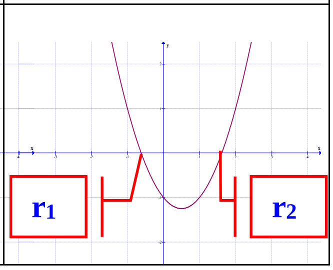
Som det er tilfældet med 2.gradsligningens rødder, så er det **ikke nok** at svare med koefficienten c’s talværdi, hvis der bliver spurgt om **koordinatet** til skæringen med *y*-aksen.

Husk desuden, at der **ALTID** vil være et skæringspunkt med *y*-aksen – uanset hvordan parablen er placeret i koordinatsystemet. Hvis $c = 0$, går parablen gennem origo.

2.Gradsligningen – Diskriminanten – igen

Diskriminanten – igen…

Som allerede nævnt er størrelsen af diskriminanten, *d*, ensbetydende med antallet af løsninger. Men hvordan ser det ud grafisk?

	$d < 0$ ↓	$d = 0$ ↓	$d > 0$ ↓
a negativ			
a positiv			

Parablens Toppunkt:

Skal man udregne toppunktet for parablen – altså det sted hvor kurvens hældning er vandret og at grafen skifter fra at være stigende til at være faldende (eller omvendt), da bruger man **top-punktsformlen**: (Beviset for denne formel findes i bilag 3.)

$$\boxed{TP = (\ x\ ;\ y\ ) = \left(\frac{-b}{2 \cdot a}\ ;\ \frac{-d}{4 \cdot a} \right)}$$

Ligning 13: (Toppunktsformlen)

Bemærk, at også her skal man udregne diskriminanten, $d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$, hvorfor det som regel er en god idé at begynde med at udregne netop denne størrelse!

Symmetriakse:

Den lodrette linje, som går igennem parablens toppunkt, kaldes for parablens symmetri-linje/akse eller spejlingsaksen, da parablen er symmetrisk omkring netop denne akse.

Husker man på dette, kan man nøjes med at udregne halvdelen af støttepunkterne.

Det er allerede vist, at symmetriaksen går igennem parablens toppunkt.

En lodret linje kan skrives på formen: $\boxed{x = k}$ da hældningen ikke er defineret for en lodret linje. Der kan ikke være tale om en funktion, da der ikke kan være mere end én funktionsværdi for hver *x*-værdi.

Da symmetriaksen er en lodret linje, kan ligningen for symmetriaksen skrives på generel form.

$$\boxed{x = \frac{-b}{2 \cdot a}}$$

Ligning 14: (Forskrift for symmetriakse)

Nogle genveje, hvis 2.gradsfunktionen omskrives:

$f(x) = ax^2$	Symmetri om linjen:	$x = 0$
	Toppunkt:	$(x;y) = (0;0)$
	a positiv: $\cup$	*a* negativ: $\cap$

$f(x) = a(x - x_0)^2$	Symmetri om linjen:	$x = x_0$
	Toppunkt:	$(x;y) = (x_0;0)$
	a positiv: $\cup$	*a* negativ: $\cap$

$f(x) = ax^2 + y_0$	Symmetri om linjen:	$x = 0$
	Toppunkt:	$(x;y) = (0;y_0)$
	a positiv: $\cup$	*a* negativ: $\cap$

$f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$	Symmetri om linjen:	$x = x_0$
	Toppunkt:	$(x;y) = (x_0;y_0)$
	a positiv: $\cup$	*a* negativ: $\cap$

Bilag 1 – Beviset:

Beviset for at løsningerne til $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$ kan udregnes som: $r=\dfrac{-b\pm\sqrt{d}}{2\cdot a}$, hvor $d=b^2-4\cdot a\cdot c$:

$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$

$\Updownarrow$ Gang med $4a$ på begge sider

$4\cdot a^2\cdot x^2+4\cdot a\cdot b\cdot x+4\cdot a\cdot c=0$

$\Updownarrow$ Læg $b^2-4\cdot a\cdot c$ til på begge sider

$\underbrace{4\cdot a^2\cdot x^2+2\cdot 2\cdot a\cdot x\cdot b+b^2}_{(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2}=b^2-4\cdot a\cdot c$ (Bemærk, at der byttes om på faktorerne 'b' og 'x' i det midterste led)

$\Updownarrow$ Kvadratsætning

$(2\cdot a\cdot x+b)^2=b^2-4\cdot a\cdot c$

$\Updownarrow$ $d=b^2-4\cdot a\cdot c$

$\underline{(2\cdot a\cdot x+b)^2=d}$ $\leftarrow$ Ligning 1

Her er indført størrelsen $d=b^2-4\cdot a\cdot c$, som også kaldes for andengradsligningens diskriminant.
Det viser sig, at den videre løsning af ligningen afhænger af fortegnet for d.

$d < 0$

I ligning 1, vil højre side da være negativ, mens venstre side er positiv (eller 0).
('Noget' i anden potens vil altid være positivt eller 0).
Derfor findes der ingen værdier af x, der opfylder ligningen.

$d = 0$

Ligning 1 har i dette tilfælde udseendet:

$(2\cdot a\cdot x+b)^2=d$

$\Updownarrow$

$(2\cdot a\cdot x+b)\cdot(2\cdot a\cdot x+b)=0$

$\Updownarrow$

$(2\cdot a\cdot x+b)=0$

$\Updownarrow$

$2\cdot a\cdot x=-b$

$\Updownarrow$

$\underline{x=\dfrac{-b}{2\cdot a}}$ - Altså har ligningen netop 1 løsning.

$d > 0$

Ligning 1 kan videre omskrives således:

$(2\cdot a\cdot x+b)^2=d$

$\Updownarrow$

$2\cdot a\cdot x+b=\pm\sqrt{d}$

$\Updownarrow$

$2\cdot a\cdot x=-b\pm\sqrt{d}$

$\Updownarrow$

$\underline{x=\dfrac{-b\ \pm\ \sqrt{d}}{2\cdot a}}$ - Altså har ligningen 2 løsninger.

Q.E.D.

Bilag 2 – Alternativt bevis:

En anden alternativ metode til at eftervise andengradsligningens løsninger, er en metode, som til dels også benyttes til udledning af toppunktsfomlen. I modsætning til det forrige bevis, anskueliggøres de forskellige antal løsninger ikke her. Udelukkende selve formlen udledes.

Et andengradspolynomium har forskriften: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Nulpunktsformlen ønskes bevist: $\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2 \cdot a}}$.

Koordinaterne til toppunktet kan udledes af følgende omskrivning:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Sætter a udenfor parentesen

$$= a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right)$$

Lægger $\frac{b^2}{4a^2}$ til og trækker $\frac{b^2}{4a^2}$ fra inde i parentesen

$$= a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right)$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{bx}{a} \quad (\text{Kvadratsætning})$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)$$

De to sidste led sættes på fælles brøkstreg

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right)$$

Der skiftes fortegn i det andet led

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{-4ac + b^2}{4a^2}\right)$$

Bytter om på leddene i tælleren i det andet led

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$$

$d = b^2 - 4ac$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{d}{4a^2}\right)$$

Det andet led sættes udenfor parentesen

$$\underline{= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{d}{4a}}$$

2.Gradsligningen – Alternativt bevis

Eventuelle nulpunkter vil forekomme for $y = f(x) = 0$, hvilket ifølge ovenstående omskrivning er det samme som:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{d}{4a} = 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{d}{4a} = 0$$

$\Updownarrow$ Flytter det andet led over på den anden side

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{d}{4a}$$

$\Updownarrow$ Dividerer med a

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{d}{4a^2}$$

$\Updownarrow$ Tager kvadratroden på begge sider

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{d}{4a^2}}$$

$\Updownarrow$ Isolerer x ved at flytte $\frac{b}{2a}$ over på den anden side og reducerer

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{d}}{2a}$$

$\Updownarrow$ Sætter på fælles brøkstreg

$$\underline{\underline{x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}}}$$

Q.E.D.

Bilag 3 – Alternativt bevis 2:

Endnu en alternativ metode til at eftervise andengradsligningens løsninger er ved hjælp af kvadratkomplettering. Denne metode til at bevise andengradsligningen, kan – i modsætning til det først beskrevne bevis – også velegnet til at finde rødderne i en given andengradsligning.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$\Updownarrow$ Dividerer med a

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$\Updownarrow$ Trækker $\frac{c}{a}$ fra på begge sider

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = -\frac{c}{a}$$

$x^2 + \frac{b}{a}x$ omskrives vha. kvadratkomplettering til $\left(x + \frac{b}{2a}^2\right) - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$

$\Updownarrow$

Generelt: $\boxed{x^2 \pm \varphi x \;=\; \left(x \pm \left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2 - \left(\frac{\varphi}{2}\right)^2}$ (Se Notat om Kvadratkomplettering)

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a}$$

$\Updownarrow$ Lægger $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ til på begge sider, kvadrerer brøken og bytter om på leddene på højre side

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$\Updownarrow$ Tager kvadratroden på begge sider

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

$\Updownarrow$ Forlænger det andet led under rodtegnet med $4a$ og trækker $\frac{b}{2a}$ fra på begge sider

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}} \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$\Updownarrow$ Sætter på fælles brøkstreg og flytter minustegnet, da $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$

$$x = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}}$$

Q.E.D.

Bilag 4 – Alternativt bevis 3:

Den ”omvendte” – dvs. begynd med nulpunktsformlen og afslut med grundformlen.

Bilag 5 – Bevis for toppunktsformlen:

Et andengradspolynomium har forskriften: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Toppunktsformlen ønskes bevist: $\boxed{TP = (x;y) = \left(\frac{-b}{2a};\frac{-d}{4a}\right)}$.

Koordinaterne til toppunktet kan udledes af følgende omskrivning:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Sætter a udenfor parentesen

$$= a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right)$$

Lægger $\frac{b^2}{4a^2}$ til og trækker $\frac{b^2}{4a^2}$ fra

$$= a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right)$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{bx}{a} \quad (\text{Kvadratsætning})$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)$$

De to sidste led sættes på fælles brøkstreg

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right)$$

Der skiftes fortegn i det andet led

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{-4ac + b^2}{4a^2}\right)$$

Bytter om på leddene i tælleren i det andet led

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$$

$d = b^2 - 4ac$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{d}{4a^2}\right)$$

Det andet led sættes udenfor parentesen

$$= \underline{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{d}{4a}}$$

2.Gradsligningen – Bevis for toppunktsformlen

Den inderste parentes i det andet led er opløftet i 2. potens, så derfor vil den altid være positiv eller mindst lig med nul.

Da hele udtrykket er en funktion, hvor *x* er den uafhængige variabel, og da det sidste led ikke indeholder *x* er det dermed det første led, som primært dikterer funktionsværdien.

Men parentesen er jo positiv eller nul, og dermed er det *a*¸ som er den styrende faktor.

Så hvis *a* er positiv, vil $f(x)$ antage sin **mindste** værdi når parentesen er lig med 0. Dvs. når $\left(x+\frac{b}{2a}\right)=0$, hvilket kun er muligt når $\underline{x=\frac{-b}{2a}}$.

På samme måde – hvis *a* er negativ – vil $f(x)$ antage sin **største** værdi når parentesen er lig med 0, og dermed når $\underline{x=\frac{-b}{2a}}$, hvilket ses at være det samme, som for når *a* er positiv.

I begge tilfælde, vil det første led være lig med 0, og funktionsværdien bliver derfor:

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right)=\frac{-d}{4a},$$

hvilket vil sige, at toppunktet, *TP*, forekommer for $\underline{x=\frac{-b}{2a}}$ og $\underline{y=\frac{-d}{4a}}$.

$$\underline{\underline{TP=(x;y)=\left(\frac{-b}{2a};\frac{-d}{4a}\right)}}$$

Q.E.D.

Bilag 6 – Bevis for toppunktsformlen (Alternativ):

Et andengradspolynomium har forskriften: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Toppunktsformlen ønskes bevist: $\boxed{TP = (x;y) = \left(\frac{-b}{2a};\frac{-d}{4a}\right)}$.

Det er kendt, at hvis $d = 0$, så har andengradsligningen én og kun en løsning.

Denne løsning er: $\frac{-b}{2a}$.

Det er relativt nemt at indse, at den for toppunktet fundne *x*-værdi, også er sand, hvis toppunktet ikke er beliggende på *x*-aksen. Det er således "sikkert" at påstå, at *x*-værdien i toppunktet altid kan beregnes som $\frac{-b}{2a}$.

Det kan også beregnes ved at differentiere $f(x) = ax^2 + bx + c$ og derefter sætte differentialkvotienten lig med 0.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$\Updownarrow$$
$$f'(x) = 2ax + b$$

$$f'(x) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$2ax + b = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$2ax = -b$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{x = \frac{-b}{2a}}$$

Det er normalt ikke noget problem at indsætte en *x*-værdi i et funktionsudtryk.

F.eks. er:

$$f(x) = 2x^2 - 6x + 4$$

$$f(4) = 2\cdot 4^2 - 6\cdot 2 + 4 = 2\cdot 16 - 12 + 4 = 32 - 12 + 4 \underline{= 24}$$

… og på fuldstændig samme måde, indsættes nu $x = \frac{-b}{2a}$ i det generelle funktionsudtryk:

2.Gradsligningen – Bevis for toppunktsformlen

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c$$

$\Updownarrow$ Kvadrerer det første led på højresiden

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c$$

$\Updownarrow$ Distribuerer hhv. a og b ind i parenteserne

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{a \cdot b^2}{4a^2} + \left(\frac{-b^2}{2a}\right) + c$$

$\Updownarrow$ Flytter minustegnet i parentesen udenfor og hæver parentesen

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{a \cdot b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$\Updownarrow$ Forkorter første led med a

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$\Updownarrow$ Forlænger de to sidste led for at få $4a$ i nævneren

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}$$

$\Updownarrow$ Rydder op i tælleren

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

$\Updownarrow$ Det ses, at $\left(-b^2 + 4ac\right) = -d$, idet $d = b^2 - 4ac$

$$\underline{\underline{f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-d}{4a}}}$$

Det er således bevist for en andengradsfunktion, at funktionsværdien y er lig med $\frac{-d}{4a}$, når $x = \frac{-b}{2a}$.

En hurtig betragtning giver, at $\boxed{\underline{\underline{TP = (x;y); \left(\frac{-b}{2a}; \frac{-d}{4a}\right)}}}$

Q.E.D.

Facitliste

Øvelse 01:

Identificér *a*, *b* og *c* i nedenstående andengradsudtryk og udregn diskriminanten, *d*.

a)	$-x^2+2x+2=0$	$a=-1$	$b=2$	$c=2$	$d=12$
b)	$4x^2+8x-6=0$	$a=4$	$b=8$	$c=-6$	$d=160$
c)	$x^2+2x+2=0$	$a=1$	$b=2$	$c=2$	$d=-4$
d)	$3x^2+3x+3=0$	$a=3$	$b=3$	$c=3$	$d=-27$
e)	$-3x^2-2x-1=0$	$a=-3$	$b=-2$	$c=-1$	$d=-8$
f)	$4{,}2x^2+11{,}6x-6=0$	$a=4{,}2$	$b=11{,}6$	$c=-6$	$d=235{,}36$
g)	$3x^2+5x=5$	$a=3$	$b=5$	$c=-5$	$d=85$
h)	$4x^2+2x=0$	$a=4$	$b=2$	$c=0$	$d=4$
i)	$-x^2=-8x$	$a=-1$	$b=8$	$c=0$	$d=64$
j)	$-x^2+9=0$	$a=-1$	$b=0$	$c=9$	$d=36$
k)	$-2x^2=8$	$a=-2$	$b=0$	$c=-8$	$d=-64$
l)	$1{,}4x^2-3{,}7x+2=0$	$a=1{,}4$	$b=-3{,}7$	$c=2$	$d=2{,}49$
m)	$-3x^2-2x+1=0$	$a=-3$	$b=-2$	$c=1$	$d=16$
n)	$2x^2=0$	$a=2$	$b=0$	$c=0$	$d=$
o)	$2x-6=0$	$a=0$ (N.A.)	$b=(2)$	$c=(-6)$	$d=$ N.A.

Øvelse 02:

Betragt følgende andengradsligninger. Udregn for hver af dem, konstanten, *k*, således at andengradsligningen har netop én løsning.

Tip: Husk, at diskriminanten, *d*, har værdien 0, når der kun er en løsning til andengradsligningen.

a)	$kx^2+3x+2=0$	$a=k$ $k=1{,}125$	$b=3$	$c=2$	$x=?$ $x=-1{,}33$
b)	$2x^2+kx+1=0$	$a=2$	$b=k$ $k=\pm 2{,}82$	$c=1$	$x=?$ $x=-0{,}71$
c)	$x^2-8x+k=0$	$a=1$	$b=-8$	$c=?$ $k=5{,}33$	$x=?$ $x=1{,}33$
d)	$kx^2-7x+4=0$	$a=k$ $k=3{,}063$	$b=-7$	$c=4$	$x=?$ $x=1{,}14$
e)	$2x^2+bx-7=0$ x	$a=2$	$b=k$ $k=\pm 7{,}48$	$c=-7$	$x=?$ $x=1{,}87$
f)	$4{,}2x^2+11{,}6x-k=0$	$a=4{,}2$	$b=11{,}6$	$c=?$ $k=8{,}01$	$x=?$ $x=-1{,}38$
g)	$3x^2+5x=5$	$a=?$ $k=-1{,}25$	$b=5$	$c=-5$	$x=?$ x = 2
h)	$4x^2+kx+19=0$	$a=4$	$b=k$ $k=\pm 17{,}44$	$c=19$	$x=?$ $x=-2{,}18$
i)	$-x^2+5x+k=0$	$a=-1$	$b=5$	$c=k$ $k=-6{,}25$	$x=?$ $x=2{,}5$

Øvelse 03:

Bestem for hvert af de nedenstående andengradsligninger nulpunkterne (hvis der er nogen).
Giv desuden en begrundelse for antallet af nulpunkter – baseret på værdien af diskriminanten.

Dvs. at besvarelsen skal indeholde:

- Udregningen af *d*
- Antallet af løsninger **samt** begrundelse
- Udregning af eventuelle nulpunkter

a)	$x^2+4x-5=0$
b)	$x^2-5x+4=0$
c)	$x^2+2x+1=0$
d)	$-3x^2+3x-9=0$
e)	$-3x^2-2x=1$
f)	$-3,7x^2+6,1x+2,35=0$
g)	$3x^2+5x=5$
h)	$4x^2+2x=0$
i)	$-x^2=-8x$
j)	$-x^2+9=0$
k)	$-2x^2=8$
l)	$1,4x^2-3,7x+2=0$
m)	$-3x^2-2x+1=0$
n)	$2x^2=0$
o)	$2x-6=0$

Øvelse 04:

Bestem nulpunkter for følgende funktioner ved at bruge ”genvejen”:

g) $f(x)=x^2+2x$

h) $f(x)=-3x^2+6x$

i) $f(x)=-x^2-8x$

j) $f(x)=12x^2-36x$

k) $f(x)=4x^2+5x$

l) $f(x)=-2x^2+7x$

Øvelse 05:

Bestem nulpunkter for følgende funktioner ved at bruge ”genvejen”:

g) $f(x) = x^2 - 4$

h) $f(x) = -x^2 + 9$

i) $f(x) = -2x^2 + 128$

j) $f(x) = -x^2 - 20$

k) $f(x) = 3x^2 - 27$

l) $f(x) = 4x^2 + 25$

m) $f(x) = -7x^2 + 16$

n) $f(x) = -x^2 + 20$