Sinusrelationen

Indtil videre, er der kun beskrevet, hvordan man beregner på retvinklede trekanter. Men desværre er det langtfra alle trekanter, som er retvinklede.

Derfor er der behov for en række værktøjer, som kan bruges også til de vilkårlige trekanter.

Her findes bl.a. "Sinusrelationen": $\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$

Sinusrelationen kan også omskrives vha. simpel beregning: $\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c}$, men det bør kun ske i forbindelse med udregninger, hvor denne opstilling er mere hensigtsmæssig for de aktuelle udregninger, forstået på den måde, at ved normal beskrivelse af sinusrelationen, da bør den generelle opskrivning anvendes, dvs. den med sidelængderne i tællerne.

Her kan det nævnes, at sinusrelationen på formen: $\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$ er den form man bør anvende, hvis man vil udregne en sidelængde, hvorimod formen: $\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c}$ er den der er bedst, hvis man vil udregne en vinkel.

I forbindelse med sinusrelationen er der to ting, man absolut skal være opmærksom på.

For det første, skal man være bekendt med, HVORNÅR man kan benytte sinusrelationen.
Kendskabet til forudsætningen for at bruge sinusrelationen er lige så vigtig som at kende til selve sinusrelationen.
Ser man på sinusrelationen, ser man, at der er to lighedstegn. Det kan ikke udregnes på normal vis ad én omgang, så det indses, at sinusrelationen skal deles op, således at der kun optræder to brøker. Det er så muligt at vælge, ud fra den givne situation, hvilke to brøker, man ønsker at regne videre med.

Se på eksemplet: $\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)}$. Heri indgår 4 variable: Sidelængderne a og b samt vinklerne A og B.

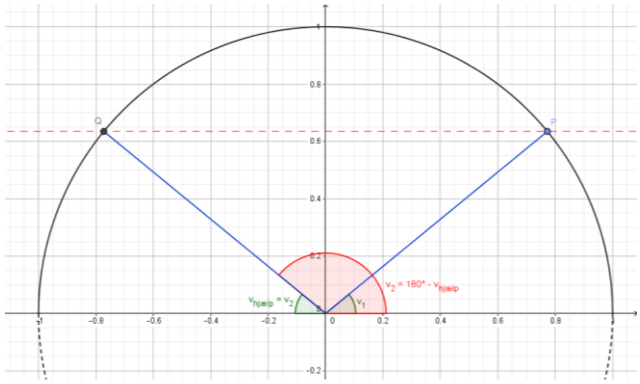
Så uanset, hvilken variabel man ønsker at udregne vha. sinusrelationen, så SKAL man kende de tre andre variable, som indgår i de to brøker.

Da man skal kende tre af de fire variable, indses det hurtigt, at ligegyldigt hvilken variabel man ønsker at udregne, så skal man i forvejen kende:

EN VINKEL OG DENS MODSTÅENDE SIDELÆNGDE PLUS EN EKSTRA OPLYSNING!

En anden meget vigtig ting at være opmærksom på er, at der KAN være to forskellige løsninger, når man udregner en vinkel vha. sinusrelationen.
Det kommer sig af, at hvis man ser på ligningen: $\sin(x) = k$, hvor $k \in [-1;1]$, så vil der være to vinkler (på nær hvis $k = -1$ eller hvis $k = 1$ … Da er der kun én løsning.), som opfylder ligningen.

Som det ses på tegningen til højre, så er vinklen til retningspunktet *P* givet som v_1.



Følger man den vandrette projektion ind på *y*-aksen og videre, indtil man igen rammer enhedscirklens periferi, så rammer man punktet *Q*. Det vil altså sige, at for de to vinkler, som rammer hhv. retningspunkterne *P* eller *Q*, så er sinusværdien den samme.

Det er relativt nemt at finde vinklen v_1.
Enten kender man den, og har dermed benyttet den til at placere retningspunktet *P*, eller også har man beregnet vinklen på baggrund af sinusværdien.

Det er mere vanskeligt at finde v_2. For at finde v_2 er det nødvendigt at indføre en hjælpevinkel, som kaldes for $v_{hjælp}$. Det er vigtigt at indse at $v_{hjælp} = v_1$, idet punktet *Q* jo er en spejling af punktet *P* over *y*-aksen. Det er vigtigt fordi der ikke umiddelbart er noget at "fæstne" vinklen til punkt *Q* på. Dog er det muligt, fordi $v_{hjælp}$ kendes, og fordi v_2 ligger i forhold til 180°, som v_1 ligger i forhold til 0°.

Derved kan det konkluderes, at $v_2 = 180° - v_{hjælp}$, hvilket betyder at: $\underline{v_2 = 180° - v_1}$.

Da en trekant har vinkelsummen 180° betyder det, at $\sin(x) = k$, hvor $k \in [0;1]$, eller med andre ord, at løsningerne ligger i enhedscirklens 1. og 2. kvadrant. Dette medfører igen, at der ALTID er to løsninger til ligningen $\sin(x) = k$, hvor $k \in]0;1]$, på nær hvis $k = 1$, så er der kun en løsning.. Spørgsmålet er så, om begge løsninger er gyldige eller kun én af dem.

Her er problemet, at begge løsninger, v_1 og v_2, til ligningen $\sin(x) = k$, hvor $k \in]0;1]$ altid vil være beliggende i intervallet: $\{v_1; v_2\} \in]0°;180°[$. Det bemærkes, at vinkelsummen i en trekant netop er 180°, så det følger deraf, at der kan eksistere to løsninger, som begge kan indgå i en trekant.

Så i princippet, så er det nødvendigt hver gang man har beregnet en vinkel vha. sinusrelationen at kontrollere, om der er en yderligere løsning (vinkel) til ligningen.

Der er dog undtagelser, hvor man kan spare kontrollen, (men måske supplere med en passende kommentar for at forklare, hvorfor man ikke har udført den fornødne kontrol):

a) Hvis man allerede kender to vinkler, så er det indlysende at den beregnede vinkel er entydigt bestemt.

b) Hvis summen af den beregnede vinkel og den oprindeligt givne vinkel er større end 90°, så er det også klart, at den beregnede vinkel er entydigt bestemt.

Problematikken kan koges ned til spørgsmålet om, hvorvidt den oprindeligt givne vinkel er mindre end den først beregnede vinkel. Hvis det er tilfældet, så er der to løsninger. Hvis ikke, så er der kun en enkelt løsning.

Bevis:

Givet at (kun) vinkel *A* er kendt, ønskes det bevist at der er to løsninger, såfremt den første beregnede vinkel, B_1 er mindre end vinkel *A*.

Ud fra betragtningen om at en evt. alternativ løsning må være: $B_2 = 180° - B_1$ følger at den tredje vinkel i den alternative løsning, C_2, beregnes som:

$$C_2 = 180° - B_2 - A$$
$$\Updownarrow$$
$$C_2 = 180° - (180° - B_1) - A$$
$$\Updownarrow$$
$$C_2 = 180° - 180° + B_1 - A$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{C_2 = B_1 - A}$$

Hvis der er tale om en gyldig løsning, skal den naturligvis være positiv, da en vinkel ikke kan være mindre end 0. Det er allerede udelukket at vinklen kan være lig med 0°, så derfor opstilles følgende ulighed.

$$B_1 - A > 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{B_1 > A}}$$

Da dette var udregningen af C_2, er det nu blevet bevist, at den anden løsning kun kan eksistere, såfremt den første beregnede vinkel er større end den oprindeligt givne vinkel, fordi hvis B_1 var mindre end *A*, så ville C_2 være negativ, hvilket ikke giver mening.

$\boxed{\textbf{Q.E.D}}$

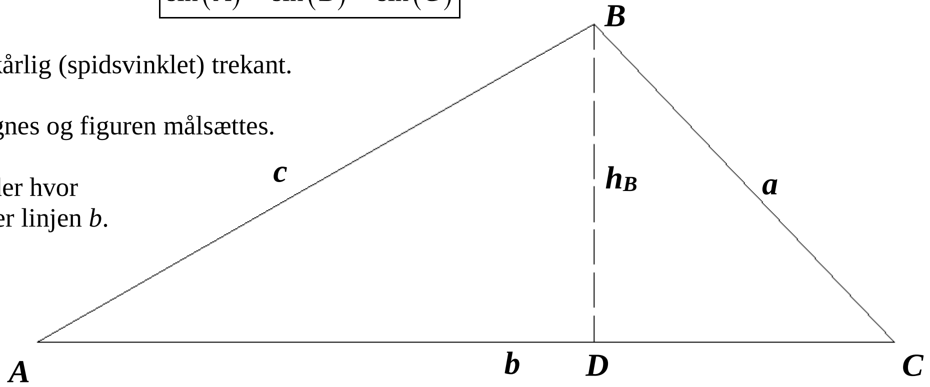
Sinusrelationen

Følgende sætning ønskes bevist: $\boxed{\dfrac{a}{\sin(A)} = \dfrac{b}{\sin(B)} = \dfrac{c}{\sin(C)}}$

Først tegnes en vilkårlig (spidsvinklet) trekant.

Højden fra *B* indtegnes og figuren målsættes.

Punkt *D* indføres, der hvor højden fra *B* rammer linjen *b*.



Som det ses, inddeler højden fra pkt. *B*, h_B, den vilkårlige trekant i to retvinklede trekanter.

Hvis den ”venstre” retvinklede trekant, trekant *ABD* betragtes, opstilles følgende ligning med de sædvanlige ”værktøjer” for den retvinklede trekant:

$$\sin(A) = \frac{\text{Modstående Katete}}{\text{Hypotenusen}} = \frac{h_B}{c}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{h_B = c \cdot \sin(A)}$$

Tilsvarende betragtes den ”højre” retvinklede trekant, trekant *BCD*, og der fremkommer et lignende udtryk:

$$\sin(C) = \frac{\text{Modstående Katete}}{\text{Hypotenusen}} = \frac{h_B}{a}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{h_B = a \cdot \sin(C)}$$

Det er den samme h_B i de to ligninger. Der er jo ikke tegnet en ny trekant i mellemtiden. Derfor kan følgende skrives:

$$c \cdot \sin(A) = a \cdot \sin(C)$$

$$\Updownarrow \qquad \text{Almindelig division giver:}$$

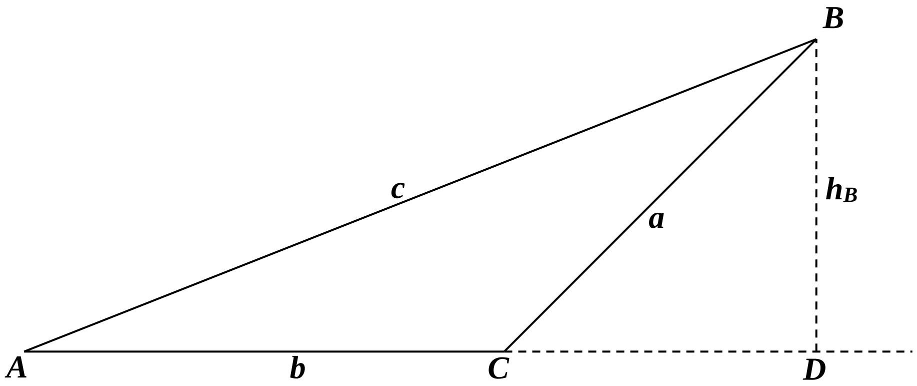
$$\frac{c}{\sin(C)} = \frac{a}{\sin(A)}$$

Det er ganske vist kun en del af sinusrelationen (den hedder jo egentlig: $\dfrac{a}{\sin(A)} = \dfrac{b}{\sin(B)} = \dfrac{c}{\sin(C)}$), men resten kan nemt indses ved at tegne højden fra enten pkt. *A* eller pkt. *C*, og så køre beviset igen. (I princippet, kan man blot nøjes med at ændre navnene på trekantens hjørner og køre beviset igen. Da kan man undlade at ”dreje” hele figuren og tegne nye højder…)

Q.E.D

Hvad nu hvis trekanten er stumpvinklet i stedet for spidsvinklet?

Det viser sig, at beviset er fuldstændig analogt med det allerede viste bevis for den spidsvinklede trekant:



Som det ses, danner højden fra pkt. *B* den vilkårlige trekant to retvinklede trekanter, *ABD* og *BCD*.

Hvis den "venstre" retvinklede trekant, trekant *ABD*, betragtes, opstilles følgende ligning med de sædvanlige "værktøjer" for den retvinklede trekant:

$$\sin(A) = \frac{\text{Modstående Katete}}{\text{Hypotenusen}} = \frac{h_B}{c}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{h_B = c \cdot \sin(A)}$$

Og betragtes tilsvarende den "højre" retvinklede trekant, trekant *BCD*, fås et lignende udtryk:

$$\sin(C) = \frac{\text{Modstående Katete}}{\text{Hypotenusen}} = \frac{h_B}{a}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{h_B = a \cdot \sin(C)}$$

Det er den samme h_B i de to ligninger. Der er jo ikke tegnet en ny trekant i mellemtiden. Derfor kan følgende skrives:

$$c \cdot \sin(A) = a \cdot \sin(C)$$

$$\Updownarrow \qquad \text{Almindelig division giver:}$$

$$\frac{c}{\sin(C)} = \frac{a}{\sin(A)}$$

Det er ganske vist kun en del af sinusrelationen (den hedder jo egentlig: $\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$), men resten kan nemt indses ved at tegne højden fra enten pkt. A eller pkt. C, og så køre beviset igen. (I princippet, kan man blot nøjes med at ændre navnene på trekantens hjørner og køre beviset igen. Da kan man undlade at "dreje" hele figuren og tegne nye højder…)

Q.E.D

Eksempel 1:

Givet: En vilkårlig trekant $\triangle ABC$, hvor $A=35°$, $a=9$ og $B=87°$.

Først og fremmest bemærkes det, at der er givet vinkel *A* og side *a* samt vinkel *B*, altså et vinkel/side par samt en ekstra oplysning – i dette tilfælde vinkel *B*. Der er således opfyldt alle kriterier, for at kunne anvende sinusrelationen. Da der er givet to vinkler i opgaven, er det ikke nødvendigt at udføre kontrol for alternative løsninger!

$$\frac{a}{\sin(A)}=\frac{b}{\sin(B)} \qquad \text{(Grundformel)}$$

$\Updownarrow$

$$b=\frac{a\cdot\sin(B)}{\sin(A)} \qquad \text{(Omskrevet grundformel)}$$

$\Updownarrow$

$$b=\frac{9\cdot\sin(87°)}{\sin(35°)}=\frac{9\cdot 0,9986}{0,5736} \qquad \text{(Indsætter talværdier)}$$

$\Updownarrow$

$$b=\frac{8,9877}{0,5736} \qquad \text{(Reducerer)}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{b=15,7}} \qquad \text{(Udregner facit)}$$

Da der allerede er givet to vinkler i opgaven, findes den sidste vinkel vha. formlen for vinkelsummen i en trekant. Dette kunne også være udregnet som det første.

$$\sum_{i=1}^{3} v_i=180° \Leftrightarrow v_1+v_2+v_3=180° \qquad \text{(Grundformel)}$$

$\Updownarrow$

$$v_3=180°-v_1-v_2 \qquad \text{(Omskrevet grundformel)}$$

$\Updownarrow$

$$C=180°-A-B \qquad \text{(Erstatter med egne variabelnavne)}$$

$\Updownarrow$

$$C=180°-35°-87° \qquad \text{(Indsætter talværdier)}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{C=58°}} \qquad \text{(Udregner facit)}$$

Den sidste sidelængde findes vha. sinusrelationen i dette tilfælde. Den kunne også være fundet vha. cosinusrelationerne, men da dette afsnit omhandler sinusrelationen, anvendes denne som træning. Der indgår også færre variable i sinusrelationen, så eksemplet er realistisk nok. Dog er det vigtigt at indse, at der stadig er behov for et vinkel/side par samt en ekstra oplysning.

$$\frac{a}{\sin(A)}=\frac{c}{\sin(C)} \qquad \text{(Grundformel)}$$

$\Updownarrow$

$$c=\frac{a\cdot\sin(C)}{\sin(A)} \qquad \text{(Omskrevet grundformel)}$$

$\Updownarrow$

$$c=\frac{9\cdot\sin(58°)}{\sin(35°)}=\frac{9\cdot 0,8480}{0,5736} \qquad \text{(Indsætter talværdier)}$$

$\Updownarrow$

$$c=\frac{7,6324}{0,5736} \qquad \text{(Reducerer)}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{c=13,3}} \qquad \text{(Udregner facit)}$$

Eksempel 2:

Givet: En vilkårlig trekant $\triangle ABC$, hvor $A = 40°$, $a = 8$ og $b = 7$.

Først og fremmest bemærkes det, at der er givet vinkel A og side a samt sidelængden b, altså et vinkel/side par samt en ekstra oplysning – i dette tilfælde sidelængden b. Der er således opfyldt alle kriterier, for at kunne anvende sinusrelationen. Da der kun er givet en vinkel i opgaven, er det nødvendigt at udføre kontrol for alternative løsninger!

Først udregnes vinkel B.

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} \qquad (\text{Grundformel})$$
$$\Updownarrow$$
$$\sin(B) = \frac{b \cdot \sin(A)}{a} \Leftrightarrow B = \arcsin\left(\frac{b \cdot \sin(A)}{a}\right) \qquad (\text{Omskrevet grundformel})$$
$$\Updownarrow$$
$$B = \arcsin\left(\frac{7 \cdot \sin(40°)}{8}\right) \qquad (\text{Indsætter talværdier})$$
$$\Updownarrow$$
$$B = \arcsin\left(\frac{7 \cdot 0{,}6428}{8}\right) \Leftrightarrow B = \arcsin\left(\frac{4{,}4995}{8}\right) \qquad (\text{Reducerer})$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{B = 34{,}2°}} \qquad (\text{Udregner facit})$$

Da den udregnede vinkel er mindre end den givne vinkel i opgaven, er der kun en løsning.

Nu kendes to vinkler. Derfor findes den sidste vinkel vha. formlen for vinkelsummen i en trekant.

$$\sum_{i=1}^{3} v_i = 180° \Leftrightarrow v_1 + v_2 + v_3 = 180° \qquad (\text{Grundformel})$$
$$\Updownarrow$$
$$v_3 = 180° - v_1 - v_2 \qquad (\text{Omskrevet grundformel})$$
$$\Updownarrow$$
$$C = 180° - A - B \qquad (\text{Erstatter med egne variabelnavne})$$
$$\Updownarrow$$
$$C = 180° - 40° - 34{,}2° \qquad (\text{Indsætter talværdier})$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{C = 105{,}8°}} \qquad (\text{Udregner facit})$$

Den sidste sidelængde findes vha. sinusrelationen i dette tilfælde. Den kunne også være fundet vha. cosinusrelationerne, men da dette afsnit omhandler sinusrelationen, anvendes denne som træning. Der indgår også færre variable i sinusrelationen, så eksemplet er realistisk nok. Dog er det vigtigt at indse, at der stadig er behov for et vinkel/side par samt en ekstra oplysning.

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{c}{\sin(C)} \qquad (\text{Grundformel})$$
$$\Updownarrow$$
$$c = \frac{a \cdot \sin(C)}{\sin(A)} \qquad (\text{Omskrevet grundformel})$$
$$\Updownarrow$$
$$c = \frac{8 \cdot \sin(105{,}8°)}{\sin(40°)} = \frac{8 \cdot 0{,}9622}{0{,}6428} \qquad (\text{Indsætter talværdier})$$
$$\Updownarrow$$
$$c = \frac{7{,}6978}{0{,}6428} \qquad (\text{Reducerer})$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{c = 12{,}0}} \qquad (\text{Udregner facit})$$

Eksempel 3:

Givet: En vilkårlig trekant $\triangle ABC$, hvor $A = 45°$, $a = 5$ og $b = 6$.

Først og fremmest bemærkes det, at der er givet vinkel *A* og side *a* samt sidelængden *b*, altså et vinkel/side par samt en ekstra oplysning – i dette tilfælde sidelængden *b*. Der er således opfyldt alle kriterier, for at kunne anvende sinusrelationen. Da der kun er givet en vinkel i opgaven, er det nødvendigt at udføre kontrol for alternative løsninger!

Først udregnes vinkel *B*.

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} \qquad (\text{Grundformel})$$

$$\Updownarrow$$

$$\sin(B) = \frac{b \cdot \sin(A)}{a} \Leftrightarrow B = \arcsin\left(\frac{b \cdot \sin(A)}{a}\right) \qquad (\text{Omskrevet grundformel})$$

$$\Updownarrow$$

$$B = \arcsin\left(\frac{6 \cdot \sin(45°)}{5}\right) \qquad (\text{Indsætter talværdier})$$

$$\Updownarrow$$

$$B = \arcsin\left(\frac{6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{5}\right) \Leftrightarrow B = \arcsin\left(\frac{6 \cdot \sqrt{2}}{10}\right) \qquad (\text{Reducerer})$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{B_1 = 58,05°}} \qquad (\text{Udregner facit})$$

Da den udregnede vinkel er større end den givne vinkel i opgaven, er der to løsninger i henhold til den tidligere beskrevne regel. Derfor er den udregnede vinkel *B* blevet kaldt for vinkel B_1.

Da der er to løsninger, skal resten af resultaterne findes for BEGGE løsninger.

$$B_2 = 180° - B_1$$

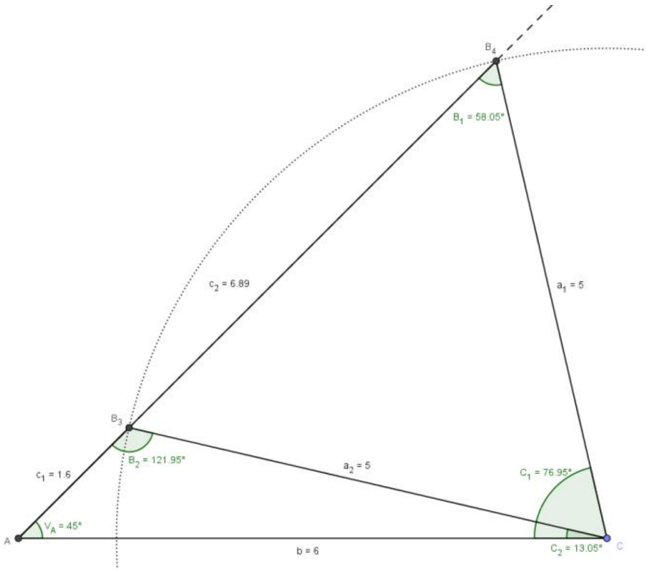
$$\Updownarrow$$

$$B_2 = 180° - 58,05°$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{B_2 = 121,95°}}$$

Ser man på nedenstående figur, er det tydeligt at se, hvorfor der er to løsninger.



Skal man tegne denne figur i hånden, er man nødt til at begynde med grundlinjen, *b*. Derefter afsættes vinkel *A*, men da man ikke ved, hvor lang sidelængden *c* er, må man tegne en lang stiplet linje, som repræsenterer sidelængden *c*.

Det er givet, at sidelængden *a* har længden 5. Derfor afsættes en cirkel med centrum i pkt. *C* med radius 5.

Det observeres, at hvis man tegner HELE cirklen, så vil den skære den stiplede linje (siden *c*) TO steder, nemlig i punkterne B_1 og B_2.

Det er nu etableret, at der eksisterer to løsninger – med andre ord, kan der dannes to trekanter, som tilfredsstiller de originale værdier.

Ikke som en nødvendighed, men mere som en pædagogisk oversigt, opstilles et skema for et øget overblik over de opnåede resultater. Røde værdier er givet i opgaven.

Trekant:	AB_1C_1	AB_2C_2
A	45°	45°
B	58,05°	121,95°
C		
a	5	5
b	6	6
c		

De resterende resultater udregnes. Der er ikke noget svært i det, nu er det blot ligesom to adskilte opgaver, med to næsten ens trekanter.

De to manglende vinkler findes vha. reglen om vinkelsummen i en trekant:

$$\sum_{i=1}^{3} v_i = 180° \Leftrightarrow v_1 + v_2 + v_3 = 180°$$
$$\Updownarrow$$
$$v_3 = 180° - v_1 - v_2$$
$$\Updownarrow$$
$$C_1 = 180° - A - B_1$$
$$\Updownarrow$$
$$C_1 = 180° - 45° - 58,05°$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{C_1 = 76,95°}}$$

$$\sum_{i=1}^{3} v_i = 180° \Leftrightarrow v_1 + v_2 + v_3 = 180°$$
$$\Updownarrow$$
$$v_3 = 180° - v_1 - v_2$$
$$\Updownarrow$$
$$C_2 = 180° - A - B_2$$
$$\Updownarrow$$
$$C_2 = 180° - 45° - 121,95°$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{C_2 = 13,05°}}$$

Den sidste sidelængde findes vha. sinusrelationen i dette tilfælde. Den kunne også være fundet vha. cosinusrelationerne, men da dette afsnit omhandler sinusrelationen, anvendes denne som træning. Der indgår også færre variable i sinusrelationen, så eksemplet er realistisk nok. Dog er det vigtigt at indse, at der stadig er behov for et vinkel/side par samt en ekstra oplysning.

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{c_1}{\sin(C_1)}$$
$$\Updownarrow$$
$$c_1 = \frac{a \cdot \sin(C_1)}{\sin(A)}$$
$$\Updownarrow$$
$$c_1 = \frac{5 \cdot \sin(76,95°)}{\sin(45°)} = \frac{5 \cdot 0,9742}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{10 \cdot 0,9742}{\sqrt{2}}$$
$$\Updownarrow$$
$$c_1 = \frac{9,742}{1,4142}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{c_1 = 6,89}}$$

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{c_2}{\sin(C_2)}$$
$$\Updownarrow$$
$$c_2 = \frac{a \cdot \sin(C_2)}{\sin(A)}$$
$$\Updownarrow$$
$$c_2 = \frac{5 \cdot \sin(13,05°)}{\sin(45°)} = \frac{5 \cdot 0,2258}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{10 \cdot 0,2258}{\sqrt{2}}$$
$$\Updownarrow$$
$$c_1 = \frac{2,258}{1,4142}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{c_1 = 1,60}}$$

Trekant:	AB_1C_1	AB_2C_2
A	45°	45°
B	58,05°	121,95°
C	76,95°	13,05°
a	5	5
b	6	6
c	6,89	1,60