MATEMATIK

NOTAT

09 - ASYMPTOTER

AF:

CAND. POLYT.

MICHEL MANDIX

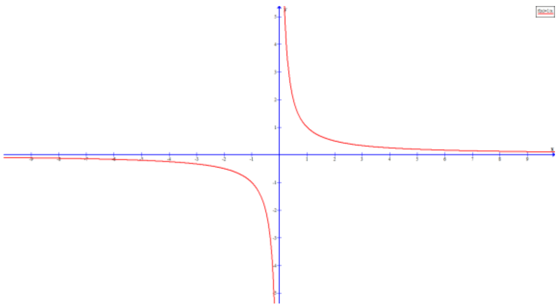
SIDSTE REVISION: AUGUST 2019

Indholdsfortegnelse:

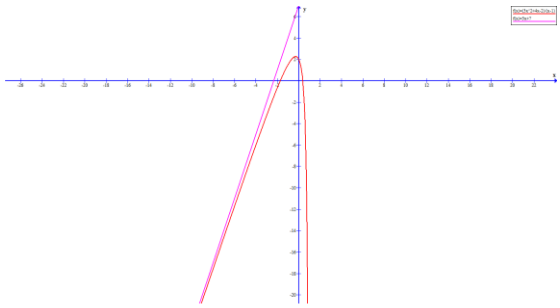
Asymptoter

"En asymptote er en ret linie, som en funktions graf nærmer sig til (afstanden mellem asymptoten og grafen går imod 0), når x går imod $\pm\infty$ *, eller hvis grafen bevæger sig imod en ikke-defineret x-værdi."*

Forudsætningen for at der kan eksistere en asymptote er, at funktionen er en polynomiumsbrøk. Asymptoter findes som vandrette, lodrette og skrå.



Figur 1: Vandret og lodret asymptote.



Figur 2: Skrå og lodret asymptote.

Vandrette asymptoter:

Lad $f(x)=\dfrac{ax^n+\ldots}{bx^m+\ldots}$ være en polynomiumsbrøk.

1) Hvis tællergrad, 'n' er lig med nævnergrad, 'm', så er $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\dfrac{a}{b}$, og dermed er en vandret asymptote.
Tænk på det som at hvis nævner- og tællergrad er lige store, så vil x^n og x^m være voldsomt dominerende i forhold til alle de andre led, når $x\to\pm\infty$. Vi har altså en situation, hvor alle '*x*'-leddene går ud imod hinanden. Til overs er kun faktorerne '*a*' og '*b*', som divideret med hinanden giver den vandrette asymptote: $y=\dfrac{a}{b}$.

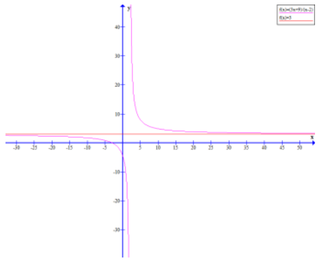
2) Hvis tællergrad, 'n' er mindre end nævnergrad, 'm', så er $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$, og dermed er $y=0$ en vandret asymptote.
Hvis tællergraden er mindre end nævnergraden, er – naturligvis – omvendt også nævnergraden større end tællergraden. Vi må forestille os, at når $x\to\pm\infty$, så vil nævnerens værdi vokse betydeligt i forhold til tællerens værdi. Eller med andre ord: Vi har en brøk, hvor nævneren bliver MEGET større end tælleren, og det giver som bekendt værdien 0.

3) Hvis tællergrad, 'n' er større end nævnergrad, 'm', så er $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$, og dermed er der ingen vandret asymptote.
Hvis tællergraden er større end nævnergraden, kan man dividere tæller med nævner. Dette vil efterlade mindst et led, som indeholder *x*. Når $x\to\pm\infty$, vil ligeledes brøken $\to\pm\infty$, og der er således ingen vandret asymptote.

Fremgangsmåden ved at bruge det ovenstående skema er altså generelt effektiv. Hvis man vil overbevise sig om gyldigheden af de tre udsagn, kan man dividere alle led i både tæller og nævner med den største potens af *x*.

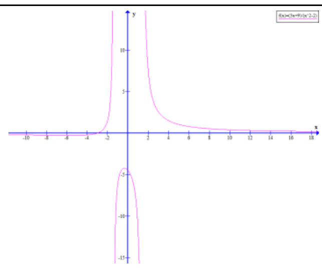
Eksempel:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x+9}{x-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{3x}{x}+\frac{9}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{2}{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3+9\cdot\frac{1}{x}}{1-2\cdot\frac{1}{x}}=\frac{3+0}{1-0}=3$$



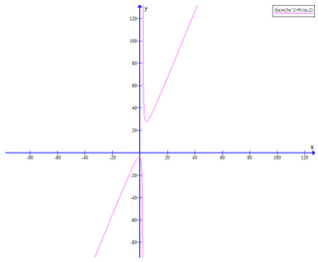
Dvs. at der eksisterer en vandret asymptote med ligningen: $y=3$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x+9}{x^2-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{3x}{x^2}+\frac{9}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3\cdot\frac{1}{x}+9\cdot\frac{1}{x^2}}{1-2\cdot\frac{1}{x^2}}=\frac{0+0}{1-0}=0$$



Dvs. at der eksisterer en vandret asymptote med ligningen: $y=0$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2+9}{x-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{9}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3+9\cdot\frac{1}{x^2}}{1\cdot\frac{1}{x}-2\cdot\frac{1}{x^2}}=\frac{3+0}{0-0}=+\infty$$



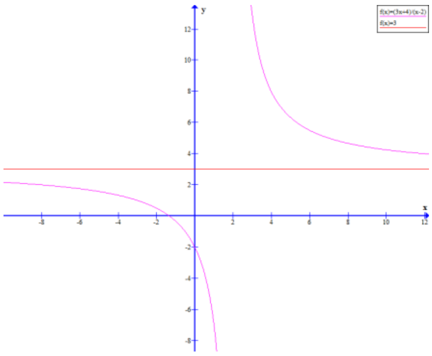
Dvs. at der ikke eksisterer en vandret asymptote

OBS! P. Madsen angiver metoden ”at dividere med største potens af *x*. Dette er for så vidt ok, men det er en metode, som tager lang tid. Den logiske metode i boksen på forrige side er hurtigere, og når man har forstået logikken, lige så god eller bedre.

Eksempler på vandrette asymptoter.

(Der kan være lodrette asymptoter også i disse eksempler, men de bliver først gennemgået i næste afsnit).

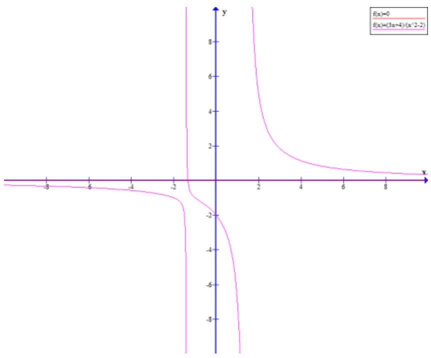
Givet polynomiumsbrøken: $f\left(x\right)=\dfrac{3x+4}{x-2}$



Da både tællergrad og nævnergrad er 1, må der eksistere en vandret asymptote: $y=3$.

(Ønskes bevis, kan man dividere hele udtrykket med *x* og derefter lade $x\rightarrow\infty$.

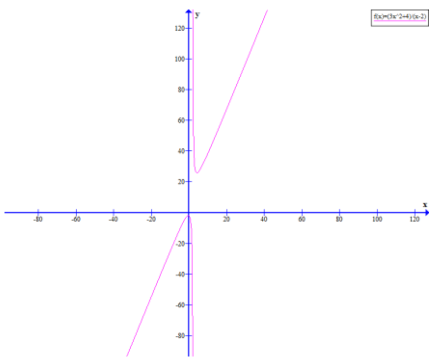
Givet polynomiumsbrøken: $f\left(x\right)=\dfrac{3x+4}{x^2-2}$



Da tællergrad er 1 og nævnergrad er 2, så er nævnergraden større end tællergraden, og der må eksistere en vandret asymptote: $y=0$.

(Ønskes bevis, kan man dividere hele udtrykket med x^2 og derefter lade $x\rightarrow\infty$.

Givet polynomiumsbrøken: $f\left(x\right)=\dfrac{3x^2+4}{x-2},\ \ x\neq 2$



Da tællergrad er 2 og nævnergrad er 1, så er tællergraden større end nævnergraden, og der findes ingen vandret asymptote.

(Ønskes bevis, kan man dividere hele udtrykket med x^2 og derefter lade $x\rightarrow\infty$.

Opgaver med vandrette asymptoter:

Bestem eventuelle vandrette asymptoter for de følgende funktioner:

$a)$ $f(x)=\dfrac{3x+6}{2x-1}$

$b)$ $g(x)=\dfrac{-x^2-x+1}{2x^2+x}$

$c)$ $h(x)=\dfrac{5x-3}{x^2+1}$

$d)$ $i(x)=2-\dfrac{x}{x^2+1}$

$e)$ $j(x)=\dfrac{2x-4}{x^2+1}$

$f)$ $k(x)=\dfrac{3x-1}{x-1}$

$g)$ $l(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{x+2}$

$h)$ $m(x)=\dfrac{2x^2-x+1}{3x^2+2x-3}$

Lodrette asymptoter:

Lad $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ være en polynomiumsbrøk.

1) Hvis *a* ikke er et nævnernulpunkt (rod i $h(x)$), så er $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$, og dermed er $x=a$ IKKE en asymptote.
   Hvis der er en lodret asymptote, sker det ved en *x*-værdi, som ikke er defineret. Det er typisk fordi man ved denne *x*-værdi vil komme til at dividere med 0. Hvis *a* IKKE er et nulpunkt i nævneren, så vil nævneren ikke give 0 for *x* = *a*, og funktionen er defineret i den pågældende *x*-værdi. Der vil altså ikke være nogen lodret asymptote.

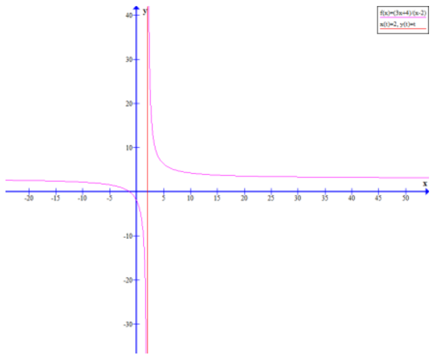
2) Hvis *a* er et nævnernulpunkt, men ikke et tællernulpunkt, så er $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$, og dermed er *x* = *a* en lodret asymptote.
   Hvis *a* er et nævnernulpunkt, så vil man i princippet komme til at dividere med 0, når *x* = *a*. Det betyder, at funktionsværdien vil gå imod $(\pm)\infty$, og det betyder, at *x* = *a* er en lodret asymptote.

3) Hvis *a* er både nævner- og tællernulpunkt, kan brøken forkortes med $(x-a)$ ved hjælp af polynomiers division, hvorefter den reducerede brøk igen undersøges med hensyn til $x\to a$.

Eksempler på lodrette asymptoter.

(Der kan være vandrette eller skrå asymptoter også i disse eksempler, men de er ikke i fokus i dette afsnit).

Givet polynomiumsbrøken: $f\left(x\right)=\dfrac{3x+4}{x-2},\ x\neq 2$



Det ses, at definitionsmængden er lig med: $Dm\left(f\right)=\mathbb{R}\setminus\left\{2\right\}$, hvilket vil sige, at der ikke eksisterer en funktionsværdi for $x=2$ og derfor heller ikke noget grafpunkt for $x=2$. Det vil sige, at grafen deler sig omkring $x=2$, og der er dermed mulighed for en lodret asymptote givet ved $x=2$.

Tæller og nævner betragtes hver for sig:

For tællerpolynomiummet fås:
$3x+4\to 3\cdot 2+4=6+4=10$ for $x\to 2$.

For nævnerpolynomiummet fås:
$x-2\to 2-2=0^{+}$ for $x\to 2^{+}$

samt:
$x-2\to 2-2=0^{-}$ for $x\to 2^{-}$

Divideres et tal (10) med et tal, som er tæt på 0 (uanset om det er på den positive eller negative side), så bliver resultatet et tal som er "uendelig" stort.

$$f\left(x\right)=\frac{3x-4}{x-2}\to\infty \text{ for } x\to 2^{+} \text{ og } f\left(x\right)=\frac{3x-4}{x-2}\to-\infty \text{ for } x\to 2^{-}$$

Med andre ord kan det siges at: $\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)=\pm\infty$, og det indses, at $x=2$ er en lodret asymptote.

Denne metode kan udføres for næsten alle brøkfunktioner og for næsten alle ikke-definerede værdier. Således har en brøkfunktion næsten altid en lodret asymptote i de pågældende ikke-definerede værdier, men der er undtagelser, hvilket der kommer et par eksempler på i det efterfølgende.

Et eksempel, som kan være lidt overraskende…

Givet funktionen: $f(x) = \dfrac{2x^2 - 4x}{x - 2}$, $x \neq 2$

Der ønskes bestemt eventuelle asymptoter.

Det ses nemt, at brøkens tæller kan faktoriseres:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x}{x - 2} = \frac{2x(x-2)}{x-2}.$$

$f(x)$ er ikke defineret for $x = 2$, men hvis $x = 2$ ikke benyttes, kan nævner og tæller divideres (brøken forkortes) med $(x - 2)$. Det giver følgende resultat:

$$f(x) = 2x$$

Hvis der er en lodret asymptote, må den eksistere i et nævnernulpunkt. Det eneste, i dette tilfælde, som kan komme på tale er:

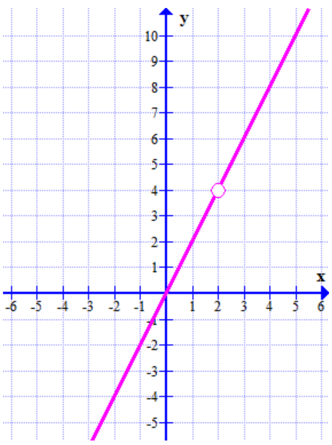
$$x - 2 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{x = 2}$$

Så derfor undersøges grænseværdien for funktionsværdien $f(x)$ for $x \to 2^+$ og $x \to 2^-$.

$$\lim_{x \to 2^+} 2x = 2 \cdot 2 = 4 \text{ og } \lim_{x \to 2^-} 2x = 2 \cdot 2 = 4.$$

Da grænseværdien i begge tilfælde går mod en konstant og ikke mod $(\pm)\infty$, så der er ingen lodret asymptote. Tanken er jo netop, at når x går imod en bestemt værdi, så går funktionsværdien imod $(\pm)\infty$.

Der er heller ingen vandret asymptote, da $\lim\limits_{x \to \pm\infty} 2x = \pm\infty$. Her var kravet, at grænseværdien skulle gå mod en konstant, såfremt der er en vandret asymptote.



Bemærk, at funktionen ikke er defineret for $x = 2$!

Det vises ikke i programmet 'Graph', da der jo kun er tale om et uendeligt lille punkt, men normalt sætter man en hul ring om grafen i det punkt, hvor den ikke er defineret. Her er det gjort – lidt omstændeligt, men dog ladsiggørligt vha. tre funk-tioner.

Et andet eksempel, som viser undtagelsen om lodrette asymptoter:

Givet funktionen: $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - x}$, $\quad Dm(f) = \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$.

Der ønskes bestemt eventuelle asymptoter.

Det ses nemt, at der er mulighed for to lodrette asymptoter, nemlig $x = 0$ og $x = 1$, da disse værdier er rødder i nævnerpolynomiummet.

Det kræver ikke meget overblik at se, at: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \pm\infty$, idet nævnerpolynomiummet går imod en konstant (0). Derfor er der en lodret asymptote for $\underline{\underline{x = 0}}$.

Det er mere problematisk for $x = 1$. Det er allerede etableret, at $x = 1$ er rod i nævnerpolynomiummet.

Tæller og nævner betragtes hver for sig:

For tællerpolynomiummet fås:
$x^2 - 1 \to 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$ for $x \to 1$

For nævnerpolynomiummet fås:
$x^2 - x \to 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$ for $x \to 1$

$x = 1$ er altså rod i både tæller- og nævnerpolynomiummet, og det giver ingen mening at se på, hvad "et tal tæt på 0" divideret med "et andet tal tæt på 0" er lig med.
Det ses dog, at brøken kan reduceres. Da $x = 1$ er rod i både tæller- og nævnerpolynomiummet, kan både tæller og nævner forkortes med $x - 1$. I dette tilfælde er det nemt, da det let kan ses, at det er muligt at faktorisere både tæller og nævner med $x - 1$. (Husk den 3. kvadratsætning).

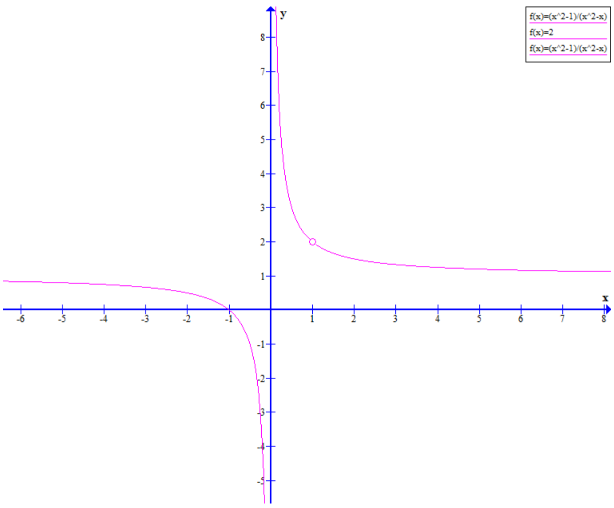
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x} = \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{x\cancel{(x-1)}} = \frac{(x+1)}{x}$$

Dette fører til at: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+1}{x} = \dfrac{2}{1} = 1$, og det ses, at der $\underline{\underline{\text{ikke er en lodret asymptote for } x = 1}}$.

Betragter man grafen for funktionen, ser man at funktionen stadig er udefineret for $x = 1$. Da der ikke eksisterer en lodret asymptote for $x = 1$, resulterer det i stedet i et "hul" i grafen.

(Der er også en vandret asymptote, hvilket nemt kan ses, da tællergrad (2) = nævnergrad). Da koefficienterne for de førende led i hhv. tæller og nævner er 1, bliver den vandrette asymptote:

Vandret asymptote: $y = \dfrac{1}{1} \Leftrightarrow \underline{\underline{y = 1}}$



Opgaver med lodrette asymptoter:

Bestem eventuelle lodrette asymptoter for de følgende funktioner:

a) $f(x)=\dfrac{5x-3}{x^2+1}$

b) $g(x)=\dfrac{-x^2+x+3}{2x-6}$

c) $h(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

d) $i(x)=2-\dfrac{x-1}{x^2+2x}$

e) $j(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-2x+1}$

f) $k(x)=\dfrac{2x+4}{6+3x}$

g) $l(x)=\dfrac{x+2}{x^2-4}$

h) $m(x)=\dfrac{2x^2-10x}{x^2-8x+15}$

Skrå asymptoter:

Lad $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ være en polynomiumsbrøk.

Hvis tællergraden er NETOP ÉN STØRRE end nævnergraden, så har *f* en skrå asymptote $y = ax + b$, og denne asymptote bestemmes ved at omskrive funktionen til

$f(x) = ax + b + \dfrac{t(x)}{h(x)}$, vha. polynomiers division, hvor $t(x)$ er "resten" – en funktion som SKAL være af lavere grad end $h(x)$ – som er fremkommet ved at foretage polynomiets division og $h(x)$ er nævnerpolynomiummet.

Med andre ord, så, når man dividerer tællerpolynomiummet med nævnerpolynomiummet, så SKAL der være en rest for at der kan være en skrå asymptote – dvs. divisionen må ikke gå op.

Det ses, at $\dfrac{t(x)}{h(x)} \to 0$, for $x \to \infty$.

Tænk over det! Det passer fint. Dividerer man en funktion af en given grad med en funktion, som er af præcis én grad mindre, så må resultatet af denne division resultere i et førstegradspolynomium. Dette førstegradspolynomium er asymptoten. Der er dog et krav mere! Hvis det er en asymptote, så skal funktionen nærme sig denne asymptote når *x* går imod $\pm\infty$. Derfor er det nødvendigt med en rest, som går imod 0, når tællerpolynomiummet divideres med nævnerpolynomiummet.

Eksempler på skrå asymptoter.

(Der kan være lodrette også i disse eksempler, men de er ikke i fokus i dette afsnit).

Givet funktionen: $f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{x}$, $\quad Dm(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Der ønskes bestemt eventuelle asymptoter.

Nævneren divideres op i tælleren, hvilket giver:

$$f(x)=x+3+\frac{1}{x}$$

Idet $x\to\pm\infty$, ses det tydeligt, at $f(x)\to 3$, idet $\dfrac{1}{x}\to 0$, for $x\to\pm\infty$.

Derfor er $y=x+3$ en skrå asymptote til grafen.

Givet funktionen: $f(x)=\dfrac{2x^2+x-1}{x+2}$, $\quad Dm(f)=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Der ønskes bestemt eventuelle asymptoter.

Vandret:
Idet tællergrad er større end nævnergrad, så kan der ikke eksistere en vandret asymptote.

Lodret:
$x=-2$ ses let at være rod i nævneren. Der er altså en potentiel lodret asymptote for $x=-2$.
Tællerligningen løses:

$$d=b^2-4ac=1^2-4\cdot 2\cdot(-1)=1+8=\underline{9}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{d}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2\cdot 2}=\frac{-1\pm 3}{4}=\left\langle\begin{array}{l}\dfrac{-1-3}{4}=\dfrac{-4}{4}=\underline{-1}\\[2ex]\dfrac{-1+3}{4}=\dfrac{2}{4}=\underline{\dfrac{1}{2}}\end{array}\right.$$

Idet $x=-2$ IKKE er rod i tælleren, kan det konkluderes, at $\underline{\underline{x=-2 \text{ er lodret asymptote.}}}$

Skrå:
Nævneren divideres op i tælleren, hvilket giver:

$$\begin{array}{r|l} & 2x-3+\dfrac{5}{x+2} \\ \hline (x+2) & 2x^2+\ \ x-1 \\ & \underline{2x^2+4x}\quad\vdots \\ & 0\ \ -3x-1 \\ & \underline{\ \ \ -3x+6} \\ & \quad 0\ \ -5 \end{array}$$

Der er en rest, som nemt ses at gå imod 0 for $x\to\pm\infty$.

$\underline{\underline{\text{Det giver en skrå asymptote}: y=2x+3}}$.

Opgaver med skrå asymptoter:

Bestem eventuelle vandrette, lodrette og skrå asymptoter for de følgende funktioner:

a) $f(x) = \frac{1}{2-3}$

b) $g(x) = \frac{4}{x^2-4}$

c) $h(x) = \frac{4x^2}{2+3x^2}$

d) $i(x) = \frac{x^2-x-2}{x-1}$

e) $j(x) = \frac{x^2-3x}{x-4}$

f) $k(x) = \frac{2}{x+1} - x$

g) $l(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$

h) $m(x) = \frac{x^3+4}{x^2}$

Quick oversigt om asymptoter – grænsende til det geniale … ;-)

Vandrette:

Lad $f(x) = \frac{ax^n + \ldots}{bx^m + \ldots}$ være en polynomiumsbrøk.

1) Hvis tællergrad, 'n' er lig med nævnergrad, 'm', så er $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{a}{b}$, og dermed er en vandret asymptote.

   Tænk på det som at hvis nævner- og tællergrad er lige store, så vil x^n og x^m være voldsomt dominerende i forhold til alle de andre led, når $x \to \pm\infty$. Vi har altså en situation, hvor alle '*x*'-leddene går ud imod hinanden. Til overs er kun faktorerne '*a*' og '*b*', som divideret med hinanden giver den vandrette asymptote: $y = \frac{a}{b}$.

2) Hvis tællergrad, 'n' er mindre end nævnergrad, 'm', så er $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, og dermed er $y = 0$ en vandret asymptote.

   Hvis tællergraden er mindre end nævnergraden, er – naturligvis – omvendt også nævnergraden større end tællergraden. Vi må forestille os, at når $x \to \pm\infty$, så vil nævnerens værdi vokse betydeligt i forhold til tællerens værdi. Eller med andre ord: Vi har en brøk, hvor nævneren bliver MEGET større end tælleren, og det giver som bekendt værdien 0.

3) Hvis tællergrad, 'n' er større end nævnergrad, 'm', så er $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, og dermed er der ingen vandret asymptote.

   Hvis tællergraden er større end nævnergraden, kan man dividere tæller med nævner. Dette vil efterlade mindst et led, som indeholder *x*. Når $x \to \pm\infty$, vil ligeledes brøken $\to \pm\infty$, og der er således ingen vandret asymptote.

Lodrette:

Lad $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ være en polynomiumsbrøk.

1) Hvis *a* ikke er et nævnernulpunkt (rod i $h(x)$), så er $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, og dermed er $x = a$ IKKE en asymptote.

   Hvis der er en lodret asymptote, sker det ved en *x*-værdi, som ikke er defineret. Det er typisk fordi man ved denne *x*-værdi vil komme til at dividere med 0. Hvis *a* IKKE er et nulpunkt i nævneren, så vil nævneren ikke give 0 for *x* = *a*, og funktionen er defineret i den pågældende *x*-værdi. Der vil altså ikke være nogen lodret asymptote.

2) Hvis *a* er et nævnernulpunkt, men ikke et tællernulpunkt, så er $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, og dermed er *x* = *a* en lodret asymptote.

   Hvis *a* er et nævnernulpunkt, så vil man i princippet komme til at dividere med 0, når *x* = *a*. Det betyder, at funktionsværdien vil gå imod $(\pm)\infty$, og det betyder,at *x* = *a* er en lodret asymptote.

3) Hvis *a* er både nævner- og tællernulpunkt, kan brøken forkortes med $(x - a)$ ved hjælp af polynomiers division, hvorefter den reducerede brøk igen undersøges med hensyn til $x \to a$.

Skrå:

Lad $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ være en polynomiumsbrøk.

Hvis tællergraden er NETOP ÉN STØRRE end nævnergraden, så har *f* muligvis en skrå asymptote $y = ax + b$, og denne asymptote bestemmes ved at omskrive funktionen til:

$f(x) = ax + b + \frac{t(x)}{h(x)}$, vha. polynomiers division, hvor $t(x)$ er "resten" – en funktion som SKAL være af lavere grad end $h(x)$ – som er fremkommet ved at foretage polynomiets division og $h(x)$ er nævnerpolynomiummet.