MATEMATIK

NOTAT

10 – KUGLEN

AF:

CAND. POLYT.

MICHEL MANDIX

SIDSTE REVISION: AUGUST 2019

Indholdsfortegnelse:

Kuglen

En kugleflade defineres som ethvert punkt på en kugles periferi.

Dvs. alle punkter, som har en given afstand (radius – r) fra et givet punkt (centrum – C).

En kugle(skal) er det geometriske sted for den mængde af punkter, som alle har samme afstand til et givet punkt.

Punktmængden: $\left\{ P \mid |CP| = r \right\}$

$$C = (x_0; y_0; z_0) \text{ og } P = (x; y; z)$$

$$|CP| = r$$
$$\Updownarrow$$
$$|CP|^2 = r^2$$
$$\Updownarrow$$
$$(P_x - C_x)^2 + (P_y - C_y)^2 + (P_z - C_z)^2 = r^2$$
$$\Updownarrow$$

Tænkes et "lokalt koordinatsystem" med origo i cirklens centrum, samt at punktet P frit kan bestemmes, kan udtrykkes omskrives til:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

Kugleskallens ligning!

Igen… Det er kuglefladen eller kugleskallen, der tales om her.

Beskrives den massive kugle, fremstilles den ved følgende ulighed:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \le r^2$$

Idet der jo nødvendigvis er tale om den mængde af punkter, som alle er på eller indenfor kugleskallen.

Overflade, O, (Areal)	O:	$O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$
Rumfang, V, (Volumen)	V:	$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

Bemærk for resten her, at hvis O og V hver især opfattes som funktioner af r,
så er $V'(r) = O(r)$.

Kuglen (Vektorer i rummet)

Det samme gælder i øvrigt for cirklens areal og omkreds, hvor:

Omkreds, *O*, (Længde) *O*: $O = 2 \cdot \pi \cdot r$

Overflade, *A*, (Areal): *A*: $V = \pi \cdot r^2$

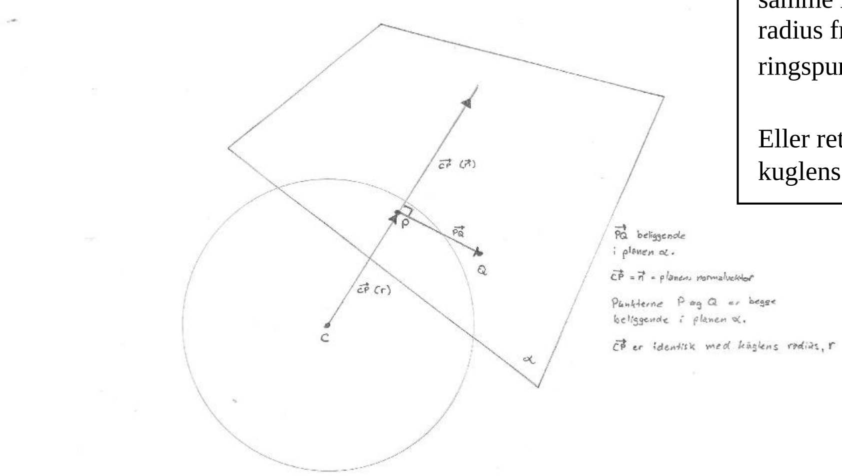
$$A'(r) = O(r)$$

Kuglens tangentplan:

Eksempel: En kugle med centrum i punktet *C*(1;-2;1) og et punkt *P*(4;5;2), som er beliggende på kugleskallen.

(Planets normalvektor) må have samme retning som linjen *r* (Kuglens radius fra kuglens centrum til røringspunktet $P(x;y;z)$).

Eller rettere: $\vec{n}$ er en forlængelse af kuglens radius.



Planets ligning:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0, \text{ hvor planets normalvektor, } \vec{n}, \text{ er lig med } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

$$\vec{CP} = \begin{pmatrix} P_x - C_x \\ P_y - C_y \\ P_z - C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 5-(-2) \\ 2-1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

er så samtidig normalvektoren til det plan der søges ligningen til.

Dvs. når $Q(x;y;z)$ er et vilkårligt punkt i det søgte plan, som er forskelligt fra $P(x;y;z)$, så gælder der at:

Skalarproduktet mellem $\vec{CP}$ og $\vec{PQ}$ er lig med 0 (vinkelret).

$$\overrightarrow{CP} \bullet \overrightarrow{PQ} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} Q_x - P_x \\ Q_y - P_y \\ Q_z - P_z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x-4 \\ y-5 \\ z-2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$a \cdot (Q_x - P_x) + b \cdot (Q_y - P_y) + c \cdot (Q_z - P_z) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot (x-4) + 7 \cdot (y-5) + 1 \cdot (z-2) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$3x - 12 + 7y - 35 + z - 2 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$3x + 7y + z - 12 - 35 - 2 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{3x + 7y + z - 49 = 0}}$$

Det er ligningen for tangentplanen.

Tangentlinje til kugle

Afstanden fra et punkt til en linje skal benyttes i dette ”bevis”. Hvis afstanden fra en kugles centrum til en linje er lig med kuglens radius, så må linjen være en tangentlinje til kuglen.

Eksempel: En kugle, *K*, er givet ved ligningen: $x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 - 2z = 36$ og en linje, ℓ, er givet ved parameterfremstillingen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Undersøg, om ℓ er en tangent til *K*.

Til at begynde med, kvadratkompletteres leddene med x^2 og x, y^2 og y og med z^2 og z.

$$x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 - 2z = 36$$

$$\Updownarrow$$

$$(x-2)^2 - (-2)^2 + (y+1)^2 - 1^2 + (z-1)^2 - (-1)^2 = 36$$

$$\Updownarrow$$

$$(x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 + (z-1)^2 - 1 = 36$$

$$\Updownarrow$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 36 + 4 + 1 + 1$$

$$\Updownarrow$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 42$$

Dvs., at det er beregnet, at der er tale om en kugle med centrum i $C(2;-1;1)$ og med radius $r = \sqrt{42}$

Afstanden fra kuglens centrum til et vilkårligt punkt på kugleskallen er altså $\sqrt{42} \approx 6,48$.

Findes afstanden mellem linjen, ℓ, og kuglens centrum, *C*, findes således følgende:

$$dist(C;\ell) = e = \frac{\left|\vec{r} \times \overrightarrow{CP}\right|}{\left|\vec{r}\right|} \ ,$$

hvor $\vec{r}$ er lig med linjens retningsvektor, C er kuglens centrum og P er et vilkårligt punkt på linjen.

$$\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} P_x - C_x \\ P_y - C_y \\ P_z - C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8-2 \\ 2-(-1) \\ -3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$dist(C;\ell) = e = \frac{\left|\vec{r} \times \overrightarrow{CP}\right|}{\left|\vec{r}\right|}$$

$$\Updownarrow$$

$$e = \frac{\left|\begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{(-5)^2 + 7^2 + (-3)^2}} \Leftrightarrow e = \frac{\left|\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -5 & -10 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -5 & -10 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{(-5)^2 + 7^2 + (-3)^2}} \Leftrightarrow e = \frac{\left|\begin{pmatrix} 7 \cdot (-4) - (-3) \cdot 3 \\ (-3) \cdot (-10) - (-5) \cdot (-4) \\ (-5) \cdot 3 - 7 \cdot (-10) \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{(-5)^2 + 7^2 + (-3)^2}}$$

$$\Updownarrow$$

$$e = \frac{\left|\begin{pmatrix} -28-(-9) \\ 30-20 \\ -15-(-70) \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{(-5)^2 + 7^2 + (-3)^2}} \Leftrightarrow e = \frac{\left|\begin{pmatrix} -28+9 \\ 30-20 \\ -15+70 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{(-5)^2 + 7^2 + (-3)^2}} \Leftrightarrow e = \frac{\left|\begin{pmatrix} -19 \\ 10 \\ 55 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{(-5)^2 + 7^2 + (-3)^2}}$$

$$\Updownarrow$$

$$e = \frac{\sqrt{(-19)^2 + 10^2 + 55^2}}{\sqrt{25+49+9}} = \frac{\sqrt{361+100+3025}}{\sqrt{25+49+9}}$$

$$\Updownarrow$$

$$e = \frac{\sqrt{3486}}{\sqrt{83}} = \frac{\sqrt{2 \cdot 1743}}{\sqrt{83}} = \frac{\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 581}}{\sqrt{83}} = \frac{\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 83}}{\sqrt{83}} = \frac{\sqrt{42 \cdot 83}}{\sqrt{83}} = \frac{\sqrt{42} \cdot \cancel{\sqrt{83}}}{\cancel{\sqrt{83}}} = \sqrt{42} \approx 6,48$$

Det er således bevist, at afstanden fra linjen til kuglens centrum er identisk med kuglens radius. Derfor må linjen være en tangent til kuglen!

Opgaver til ”Kuglen”

486)
Bestem centrum og radius for de kugleskaller, hvis ligninger er:

1) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-10z+14=0$
2) $x^2+y^2+z^2-8y+15=0$
3) $x^2+y^2+z^2-6x+16z+64=0$
4) $2x^2+2y^2+2z^2-10x-16y+34z+169=0$

489)
En kugle har centrum i (2;3;4) og radius 6.

1) Opstil en ligning for kuglen, og angiv koordinaterne til kuglens skæringspunkter med koordinatakserne.

490)
En kugle har centrum i punktet *C*(-3;6;4) og går gennem punktet (6;0;6).

1) Opskriv en ligning for kuglen.
2) Afgør om hvert af følgende punkter ligger på kuglen, inden i kuglen eller udenfor kuglen:
    a. *A*(-12;12;6)
    b. *B*(5;11;-2)
    c. *C*(7;10;2)
    d. *D*(6;12;6)

493)
En kugle har ligningen: $x^2+y^2+z^2-14x+2y-10z=-39$.

1) Vis, at punkterne *A*(11;-5;7) og *B*(3;-3;9) ligger på kuglen, og bestem ligninger for kuglens tangentplaner i disse to punkter.