MATEMATIK

NOTAT & FORMELSAMLING

ANALYTISK PLANGEOMETRI

AF:

CAND. POLYT.

MICHEL MANDIX

SIDSTE REVISION: AUGUST 2019

Indholdsfortegnelse:

Introduktion til analytisk plangeometri

Kort fortalt er analytisk plangeometri en opsamling af, hvad der er blevet gennemgået indtil nu: Ligninger, geometri og trigonometri.

I analytisk plangeometri, genfindes de samme matematiske objekter og begreber, som allerede er introduceret, men denne gang sat ind i et koordinatsystem.

Afstandsformlen

(Teknisk Matematik, Preben Madsen, 4. udg. B-niveau, bind 1, p. 264)

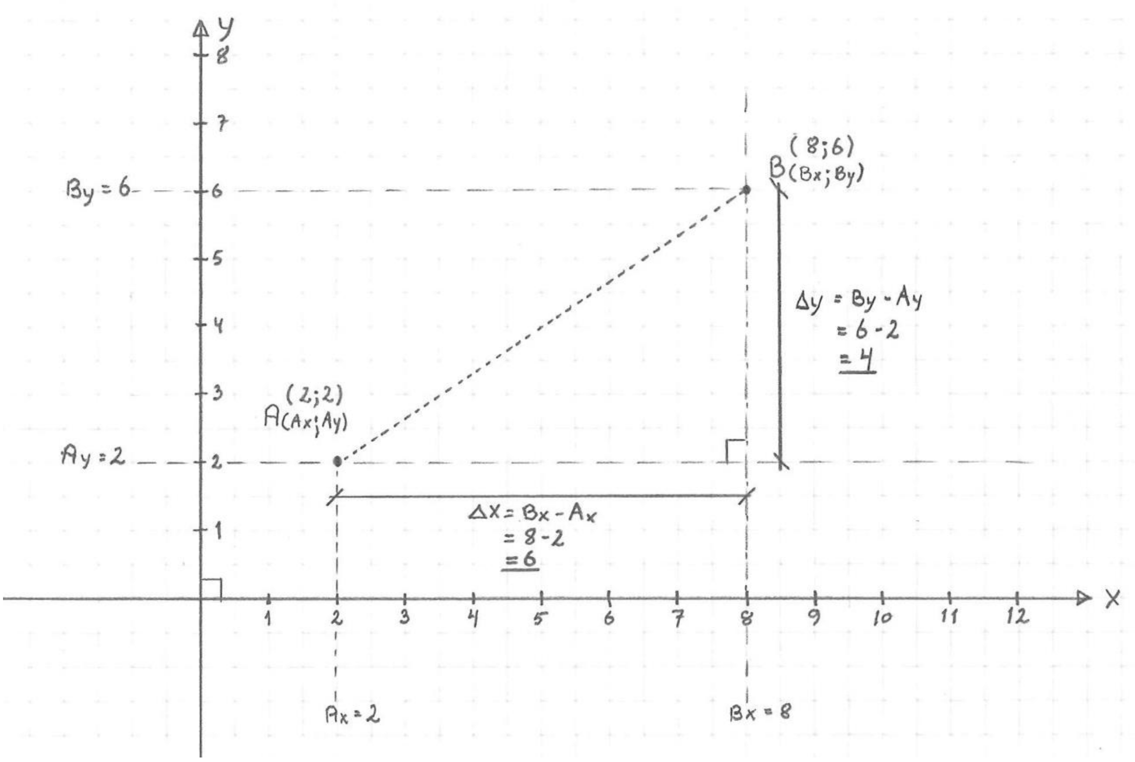
Skal man finde afstanden mellem to punkter, benytter man **afstandsformlen**:

$$|AB| = \sqrt{\left(B_x - A_x\right)^2 + \left(B_y - A_y\right)^2}$$

Formel 1 - Afstandsformlen

Bevis:

Beviset for afstandsformlen er en **direkte omskrivning af Pythagoras' læresætning**.
(Teknisk Matematik, Preben Madsen, 4. udg. B-niveau, bind 1, p. 113)
Grunden til dette er, at de to punkter indtegnes i et almindeligt retvinklet (kartesisk) koordinatsystem. Da kan hhv. den vandrette afstand og den lodrette afstand udregnes som differensen mellem de to punkters respektive *x*-værdier og *y*-værdier.



Tips & tricks:

Afstanden mellem to punkter er den samme – uanset om man går fra det ene punkt til det andet – eller omvendt. Derfor er det i princippet ligegyldigt, om man benytter det ene eller det andet punkt som "Punkt *A*" – og ligeledes gælder for "Punkt *B*".
Idet man alligevel kvadrerer differensen i de hhv. vandrette og lodrette koordinater, bliver fortegnet altid positivt, hvilket giver god mening, da man ikke kan tale om en "negativ afstand".

Faldgruber:

Hold øje med, om resultatet (afstanden) ender med at være et negativt tal. Hvis dette er tilfældet, er der regnet galt, idet en afstand ikke kan være negativ. Dette er der taget højde for i formlen, så hvis resultatet er negativt, er der begået en (grov) fejl undervejs.
Bemærk også fortegnene. Formlen "er født med" minustegn, så indsæt evt. negative talværdier i en parentes, for at øge overskueligheden.

Eksempel:

Givet to punkter: $A\left(\underset{(A_x)}{8};\underset{(A_y)}{-1}\right)$ og $B\left(\underset{(B_x)}{-4};\underset{(B_y)}{3}\right)$

Afstandsformlen:

$$|AB| = \sqrt{(B_x - A_x)^2 + (B_y - A_y)^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$|AB| = \sqrt{((-4)-8)^2 + (3-(-1))^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$|AB| = \sqrt{(-12)^2 + 4^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$|AB| = \sqrt{144+16}$$

$$\Updownarrow$$

$$|AB| = \sqrt{160} = \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 10}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{|AB| = 4\sqrt{10} \approx 12,65}}$$

Midtpunktsformlen

(Teknisk Matematik, Preben Madsen, 4. udg. B-niveau, bind 1, p. 266)

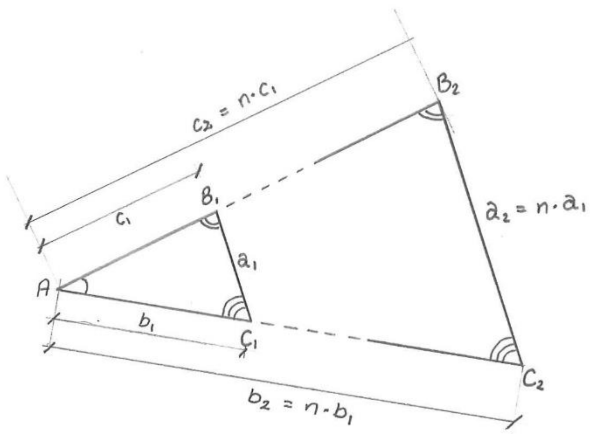
Skal man finde det præcise koordinat midt mellem to andre punkter, benytter man **midtpunktsformlen**:

$$\boxed{M(x;y) = \left(\frac{A_x + B_x}{2};\frac{A_y + B_y}{2}\right)}$$

Formel 2 - Midtpunktsformlen

Bevis:

Beviset for midtpunktsformlen tager udgangspunkt i **Reglen om ensvinklede trekanter**. Fordobles en trekants tre sidelængder, er vinklerne stadig lig med de oprindelige vinkler. Omvendt kan det argumenteres, at en trekant, hvis vinkler er statiske, vil blive nøjagtig halvt så stor, hvis man halverer – i dette tilfælde – hypotenusen i en retvinklet trekant. Da vil de to kateter også halveres, hvilket betyder, at midtpunktet mellem to punkter har et koordinatsæt svarende til midtvejen mellem hhv. *x*- og *y*-koordinaterne.



Til venstre ses ”Reglen om ensvinklede trekanter. (Teknisk Matematik, Preben Madsen, 4. udg. B-niveau, bind 1, p. 114)

Her ses det, at når man forstørrer en trekant *n* gange, så vil alle sidelængder blive forstørret (eller formindsket) med en faktor *n*. Vigtigt er det, at alle vinkler forbliver uændrede efter skaleringen.

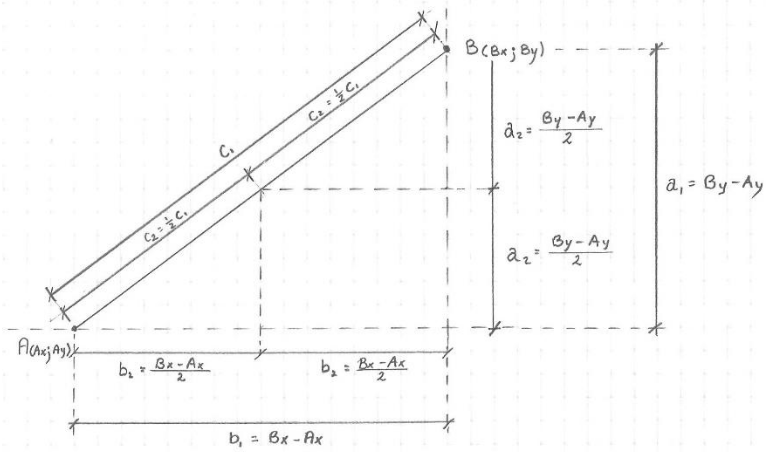
Så det essentielle i denne sætning er, at når en sidelængde f.eks. halveres, så vil de to andre sider i trekanten også blive halveret.

Det er naturligvis vigtigt, at siden a_1 parallelforskydes for at blive til a_2.

På figuren på næste side er reglen for ensvinklede trekanter indtegnet for en retvinklet trekant, som lige præcis halveres.

Antages det, at punkt *A* ligger i origo, må punkt B_1 derfor have koordinaterne:

$$B_{1_{A=origo}}(x;y) = \left(\frac{B_x - A_x}{2};\frac{B_y - A_y}{2}\right)$$



MEN … Det er ikke uvæsentligt, at punkt *A* er beliggende i origo. Det er jo (desværre) langt fra det normale tilfælde.

Det viser sig, at fortegnene er forkerte, men også at leddenes rækkefølge heller ikke ligner den, som er givet i midtpunktsformlen. Forklaringen følger på næste side:

Hvis det antages, at punkt *A* IKKE ligger i origo, er det nødvendigt at addere begyndelseskoordinatet til formlen for at få det rigtige resultat:

$$B_{1_{A=origo}}(x;y)=\left(\frac{B_x-A_x}{2};\frac{B_y-A_y}{2}\right)$$

$\Updownarrow$

$$B_{1_{A=vilkårlig}}(x;y)=\left(\frac{B_x-A_x}{2}+A_x;\frac{B_y-A_y}{2}+A_y\right)$$

$\Updownarrow$

$$B_{1_{A=vilkårlig}}(x;y)=\left(\frac{B_x-A_x}{2}+\frac{2\cdot A_x}{2};\frac{B_y-A_y}{2}+\frac{2\cdot A_y}{2}\right)=\left(\frac{B_x-A_x+2\cdot A_x}{2};\frac{B_y-A_y+2\cdot A_y}{2}\right)$$

$\Updownarrow$

$$B_{1_{A=vilkårlig}}(x;y)=\left(\frac{B_x+A_x}{2};\frac{B_y+A_y}{2}\right)$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{B_{1_{A=vilkårlig}}(x;y)=\left(\frac{A_x+B_x}{2};\frac{A_y+B_y}{2}\right)}}$$

Tips & tricks:
I de fleste af denne type opgaver, vil man blive spurgt om en midt**punkt**! Det vil sige, at facit skal afleveres som et koordinatsæt. Det er som regel **ikke nok** at udregne *x*- og *y*-koordinaterne hver for sig, og lade det være ved det.

Faldgruber:
Vær meget opmærksom på fortegn! De fleste fejl i denne type opgaver skyldes fortegnssjusk.

Eksempel:

Givet to punkter: $A\left(\underset{(A_x)}{8};\underset{(A_y)}{-1}\right)$ og $B\left(\underset{(B_x)}{-4};\underset{(B_y)}{3}\right)$

Midtpunktsformlen: $M(x;y)=\left(\frac{A_x+B_x}{2};\frac{A_y+B_y}{2}\right)$

$$\Updownarrow$$

$$M(x;y)=\left(\frac{8+(-4)}{2};\frac{(-1)+3}{2}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$M(x;y)=\left(\frac{4}{2};\frac{2}{2}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{M(x;y)=(2;1)}}$$

Arealberegning

Bogens tilgang til dette afsnit er en lille smule mærkværdigt og lidt rodet.

Tips & tricks:
Først gives der et godt råd:
Skal man bestemme arealet af en vilkårlig polygon, kan det være en fordel at indlægge polygonen i et koordinatsystem, hvorefter koordinaterne til hjørnepunkterne bestemmes.

Det er egentlig ikke forkert, men i bogen forsømmes det at forklare, hvorfor det er en god ide. Det kan være smart, idet det ofte er nemmere at subtrahere delarealer fra et stort areal, fremfor at udregne arealet af en relativt kompleks figur direkte.

For at gøre dette, tegnes der et rektangel, hvis sider er parallelle med koordinatsystemets akser, rundt om polygonen. Der søges et ”tight fit”, hvilket vil sige, at arealet skal være så lille som muligt, samtidig med at polygonen rører rektanglet i flest mulige punkter.

Det er et rimeligt tip, men desværre ikke altid muligt at realisere. Til gengæld fortsætter bogen med at introducere determinantformlen til udregning af en trekants areal. Denne metode beskrives i det følgende.

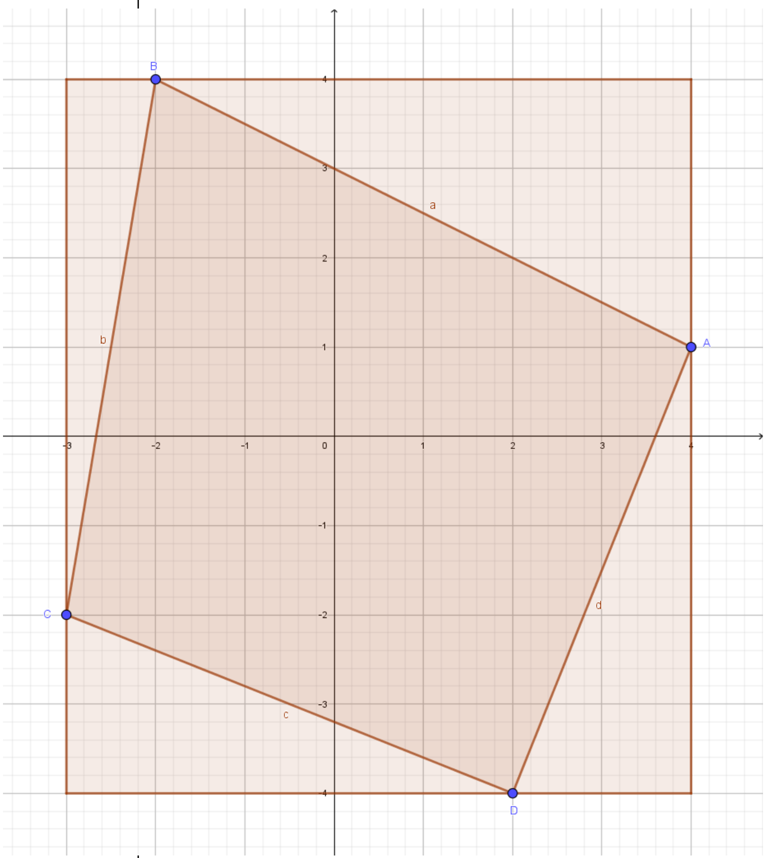
Faldgruber:
Da metoden i sig selv kan virke lidt rodet, er den værste faldgrube nok, at man let kan komme til at miste overblikket. For at denne metode skal fungere, er det yderst vigtigt, at man holder hovedet koldt. Introducér evt. en række hjælpepunkter for at øge overblikket og gøre mellemregningerne nemmere.

Tips & tricks:
I den forbindelse kan det være nyttigt at vide, at de fleste plane figurer kan dannes ved hjælp af tre- og firkanter.
Lav evt. en skitse og marker de tre- og firkanter, som er ”for meget” i forhold til det rektangel, som omgiver den figur man ønsker at beregne arealet af.

Eksempel: (Opgave 207 fra lærebogen, p. 271)

I en firkant *ABCD* er koordinaterne til hjørnepunkterne $A(4;1)$, $B(-2;4)$, $C(-3;-2)$ & $D(2;-4)$.

a) Bestem firkantens areal. (Ved at subtrahere yderarealer fra et rektangel).



Her er finessen at udregne arealet af det store rektangel som omgiver hele figuren og derefter subtrahere de fire trekanter i hjørnerne.

$$
\begin{aligned}
T_{NV} &= \frac{1}{2}\cdot g\cdot h = \frac{1}{2}\cdot\left|(B_x-C_x)\right|\cdot\left|(B_y-C_y)\right| \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left|(-2-(-3))\right|\cdot\left|(4-(-2))\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|(-2+3)\right|\cdot\left|(4+2)\right| \\
&= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 6 \\
&= \underline{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_{NØ} &= \frac{1}{2}\cdot g\cdot h = \frac{1}{2}\cdot\left|(A_x-B_x)\right|\cdot\left|(A_y-B_y)\right| \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left|(4-(-2))\right|\cdot\left|(1-4)\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|(4+2)\right|\cdot\left|(1-4)\right| \\
&= \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3 \\
&= \underline{9}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_{SØ} &= \frac{1}{2}\cdot g\cdot h = \frac{1}{2}\cdot\left|(A_x-D_x)\right|\cdot\left|(A_y-D_y)\right| \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left|(4-2)\right|\cdot\left|(1-(-4))\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|(4-2)\right|\cdot\left|(1+4)\right| \\
&= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 5 \\
&= \underline{5}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_{SV} &= \frac{1}{2}\cdot g\cdot h = \frac{1}{2}\cdot\left|(C_x-D_x)\right|\cdot\left|(C_y-D_y)\right| \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left|((-3)-2)\right|\cdot\left|(-2-(-4))\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|(-3-2)\right|\cdot\left|(-2+4)\right| \\
&= \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 2 \\
&= \underline{5}
\end{aligned}
$$

Da alle trekanternes arealer nu er kendt, trækkes de fra det store rektangels areal:

$$T_{FirkantABCD} = T_{Rektangel} - T_{NV} - T_{NØ} - T_{SØ} - T_{SV}$$

$$\Updownarrow$$

$$T_{FirkantABCD} = \left(4-(-3)\right)\cdot\left(4-(-4)\right)-3-9-5-5 = (4+3)\cdot(4+4)-3-9-5-5$$

$$\Updownarrow$$

$$T_{FirkantABCD} = 7\cdot 8 - 22 = 56 - 22$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{T_{FirkantABCD} = 34}}$$

Denne opgave gennemregnes igen senere ved brug af determinantmetoden.

Arealberegning ved determinantmetoden

(Teknisk Matematik, Preben Madsen, 4. udg. B-niveau, bind 1, p. 269)

Skal man udregne arealet af en trekant, som nævnt i bogen kan man også anvende **determinantmetoden**:

$$A_{n-kant} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left|x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + \ldots + x_ny_1 - x_1y_n\right| = \frac{1}{2}\left|x_1y_2 + x_2y_3 + \ldots + x_ny_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - \ldots - x_1y_n\right|$$

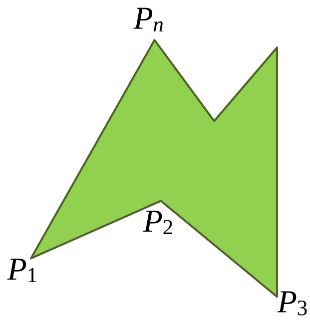
Formel 3 – Arealberegning vha. determinantmetoden

Denne formel (især udvidet for en *n*-polygon) kan virke meget svær og uoverskuelig. Det anbefales, at man nærlæser det efterfølgende eksempel, idet metoden ofte viser sig at være relativt nem at bruge, når man har fået lidt erfaring med at bruge den.

Bevis:

Beviset kan gennemføres som et induktionsbevis[1]. Det vides fra tidligere (og fra bogen), at formlen er sand for en trekant $(n=3)$. Det antages, at det også er sandt for ethvert n, og at det også gælder for $n=1$.

Givet en polygon med n sider, som er navngivet mod uret.



$$A_n = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left|x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + \ldots + x_ny_1 - x_1y_n\right|$$

$\Updownarrow$ (Sorterer efter positive og negative led.)

$$A_n = \frac{1}{2}\left|x_1y_2 + x_2y_3 + \ldots + x_ny_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - \ldots - x_1y_n\right|$$

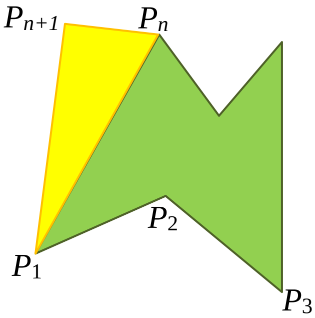
Dette er altså arealet af det grønne markerede område, i det omfang at punkterne er givet i rækkefølge mod uret.

[1] **Induktion** er en bestemt type matematisk bevis, som er meget velegnet til at bevise at en matematisk hypotese er sand for alle naturlige tal, eller andre talmængder, som er velordnet.
Induktionsprincippet består af 2 skridt: **basisskridtet** (induktionsstarten, startbetingelsen) og **induktionsskridtet**.
1. Basisskridt: I basisskridtet beviser man at hypotesen er sand ved det mindste tal i talmængden. Dette er typisk 1, da man ofte vil bevise sætningen for de naturlige tal.
2. Induktionsskridt: I induktionsskridtet beviser man, at hvis hypotesen gælder for tallet *n* (denne antagelse kaldes induktionsantagelsen), så gælder den også for tallet *n*+1.

På denne måde kan man bevise at hypotesen gælder for alle hele tal fra basisskridtet og opefter.
Hvis tilfælde 1 er sand, så er tilfælde 2 også sand, da tilfælde 1 er sand. Så er 3 også sand, når 2 er sand, osv.
Dette princip kan sammenlignes med dominoeffekten. Hvis du har en lang række dominobrikker stående efter hinanden, kan du udlede følgende:
1. Basisskridt: Den første dominobrik vælter.
2. Induktionsskridt: Når en dominobrik vælter, vil den næste vælte.

Derfor vil alle dominobrikker vælte.
Kilde: Induktion (Matematik) http://da.wikipedia.org/wiki/Induktion_%28matematik%29, 26-02-2014 18:52

Nu tilføjes et ekstra punkt. Punkt nr. $n+1$. Det vil naturligvis ændre det samlede areal af polygonen, og ændringen (og den gule markering på næste figur), er præcis arealet af den just dannede trekant.
Den nye (gule) trekant har koordinatpunkterne:



$$P_n\left(x_n; y_n\right)$$

$$P_{n+1}\left(x_{n+1}; y_{n+1}\right)$$

$$P_1\left(x_1; y_1\right)$$

Arealet af den nye gule trekant, A_t, er givet ved den samme formel:

$$A_t = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_{n+1} & y_{n+1} \\ x_1 & y_1 \\ x_n & y_n \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left|x_n y_{n+1} - x_{n+1} y_n + x_{n+1} y_1 - x_1 y_{n+1} + x_1 y_n - x_n y_1\right|$$

$\Updownarrow$ (Sorterer efter positive og negative led.)

$$A_t = \frac{1}{2}\left|x_n y_{n+1} + x_{n+1} y_1 + x_1 y_n - x_{n+1} y_n - x_1 y_{n+1} - x_n y_1\right|$$

Det samlede areal af $n+1$-kanten er altså arealet af den oprindelige n-kant, A_n, adderet med det nye areal, A_t.

…Hvilket beviser ved induktion, at formlen er rigtig!

Man kunne her indvende: "Hvad nu, hvis det nye punkt var på **indersiden** af den originale polygon?"

I det tilfælde ville den nye trekant, P_n, P_{n+1}, P_1 blive navngivet i rækkefølge **med** uret, og ikke mod uret. Så ville arealet af den nye trekant, A_t, blive udregnet som negativt. Den algebraiske addition af trekantens areal til den oprindelige n-kant, A_n, resulterer således i et nyt og mindre areal af den nye $n+1$-kant, A_{n+1}.

Q.E.D.

Dette bevis er væsentligt inspireret af beviset, som findes på Internetsiden:

http://2000clicks.com/mathhelp/GeometryPolygonAreaDeterminant.aspx 26-02-2014, 19:53

Dog er der tilføjet ekstra oplysninger og udregninger samt – indlysende nok – en oversættelse.

Tips & tricks:

Med træning, bliver denne metode ganske nem at håndtere. Det mest vanskelige er at indsætte de rigtige tal på de rigtige pladser i determinanten.
Det kan være nyttigt at huske: ”Det skrå produkt – minus det modsatte skrå produkt”, og så bevæge sig nedad i determinanten.
Husk, at der altid skal være en linje mere i determinanten, end der er sider (hjørner) i *n*-polygonen, idet det første punkt skal gentages i den sidste række.
Fordi koordinatsættene står parvis, side om side, i determinanten, kan det være en god ide at indsætte tallene i den ”lodrette” determinant først, for så er det nemmere at se tallene i den rigtige kontekst.

Først et lille eksempel for at forstå udregningen af en determinant:

$$Det = \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Multiplicer & Der \\ Derefter & Her \end{vmatrix} = \left| Multiplicer \cdot Her - Derefter \cdot Der \right|$$

Hvis determinanten udvides med yderligere to rækker (som for en trekant $A(0;1), B(3;2)$ & $\mathrm{C}(4;-2)$):

$$A_t = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \\ C_x & C_y \\ A_x & A_y \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \left| A_x \cdot B_y - B_x \cdot A_y + B_x \cdot C_y - C_x \cdot B_y + C_x \cdot A_y - A_x \cdot C_y \right|$$

$\Updownarrow$

$$A_t = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \left| 0 \cdot 2 - 3 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) - 4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 0 \cdot (-2) \right|$$

$\Updownarrow$

$$A_t = \frac{1}{2} \cdot \left| 0 - 3 - 6 - 8 + 4 - 0 \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| -13 \right| = \frac{1}{2} \cdot 13$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{A_t = \frac{13}{2} \simeq 6,5}}$$

For en 17-kant, vil der således være 18 rækker i determinanten, som regnes på samme måde, som i ovenstående eksempel.

Faldgruber:

Der er ingen tvivl om, at det sværeste i denne metode er at få indsat koordinaterne på de rigtige steder i den vandrette linje.
En overvejelse kunne være at danne et Excel regneark eller en CAS-løsning som kan spare lidt tid og/eller kontrollere de foretagne udregninger.

Eksempel: (Opgave 207 fra lærebogen, p. 271)

I en firkant *ABCD* er koordinaterne til hjørnepunkterne $A(4;1)$, $B(-2;4)$, $C(-3;-2)$ & $D(2;-4)$.

a) Bestem firkantens areal. (Ved at determinantmetoden).

$$T = \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \\ C_x & C_y \\ D_x & D_y \\ A_x & A_y \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\left|A_x\cdot B_y - B_x\cdot A_y + B_x\cdot C_y - C_x\cdot B_y + C_x\cdot D_y - D_x\cdot C_y + D_x\cdot A_y - A_x\cdot D_y\right|$$

$\Updownarrow$

$$T = \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 4 \\ -3 & -2 \\ 2 & -4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\left|4\cdot 4-(-2)\cdot 1+(-2)\cdot(-2)-(-3)\cdot 4+(-3)\cdot(-4)-2\cdot(-2)+2\cdot 1-4\cdot(-4)\right|$$

$\Updownarrow$

$$T = \frac{1}{2}\cdot\left|16-(-2)+4-(-12)+12-(-4)+2-(-16)\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|16+2+4+12+12+4+2+16\right|$$

$\Updownarrow$

$$T = \frac{1}{2}\cdot\left|68\right|$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{T = 34}}$$

På HTX (og på alle andre gymnasiale uddannelser for den sags skyld), så oplever man ofte, at det er en anden slags matematik man bliver udsat for, end den man er vant til fra folkeskolen.

En af de største forskelle er, at man ikke så meget længere bare sidder og regner simple regnestykker à la ”2 + 2 = 4”, men derimod får større udfordringer, som generaliserer matematikken, så man er fri for at lave et stort antal specifikke udregninger, men mere sigter mod at opstille et udtryk eller en ligning (funktion), hvor man kan indsætte en enkelt eller ganske få værdier for at få et udtryk i stedet for at skulle begynde forfra hver eneste gang.

Idet at disse ligninger man får opstillet skal være så generelle som muligt, så vil man ofte opleve at ligningerne indeholder bogstaver (variable) i stedet for tal.

Det er nok ikke muligt at udforme en generel kogebog for, hvordan man opstiller sådanne ligninger eller funktioner, men der er måske et par tips, som kan være gavnlige i den forbindelse.

For det første, er det vigtigt at man har en forståelse for, hvad en funktion er.
En funktion er et udsagn, som angiver, at hvis man indsætter en værdi (ofte x) i et udtryk, så vil det resultere i en funktionsværdi (ofte y).
I grundskolen ville man i de seneste klassetrin genkende dette som en ligning – f.eks. $y = ax + b$ eller $y = ax^2 + bx + c$.

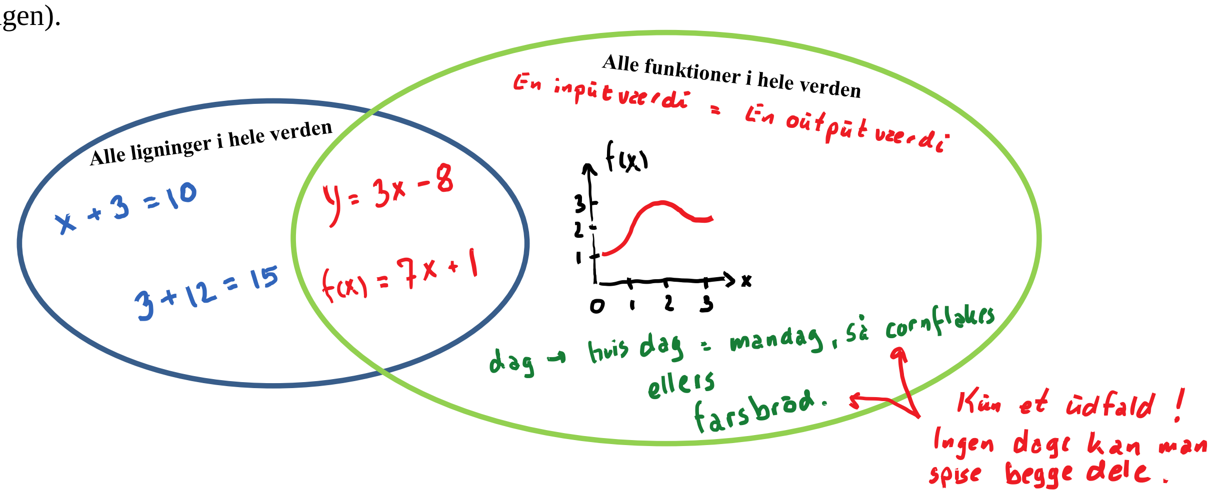
En funktion er ikke nødvendigvis det samme som en ligning.

En ligning er defineret som to udtryk, som er skrevet på hver side af en komparativ operator $(=, <, >, \leq, \geq, \neq \text{ eller } <>)$. Her er det et krav (eller et spørgsmål), om denne komparative operator taler sandt. På den måde kan man sige (hvis der er tale om lighedstegnet), at det er ligegyldigt om man skriver det, som står på den ene eller den anden side af lighedstegner, for de to udtryk ER jo lig med hinanden. Ligninger er beskrevet i et andet notat, og vil ikke yderligere blive diskuteret her.

En funktion er en forskrift (et værktøj), der beskriver sammenhængen mellem en uafhængig variabel (ofte x) og en afhængig variabel (ofte y eller $f(x)$).

En funktion vil altid stå på formen: $f(x) = \cdots$, så hvis man sammenligner med notationen for en ligning, så er y det samme som $f(x)$.

Man kan ofte komme til at forveksle ligninger og funktioner, og det er også forståeligt nok, da de på mange måder minder om hinanden, men der er dog forskelle.
Der er ligninger, der ikke er funktioner, og der er funktioner, der ikke er ligninger. Der der findes dog også funktioner, der også er ligninger. (Dem støder man ofte på i matematikundervisningen).



Nu antages det, at begreberne ligninger og funktioner er på plads.

I langt de fleste tilfælde, vil de modeller man opstiller indeholde et antal x'er og y'er. Konfigurationen af x'er og y'er (altså den måde som x'erne og y'erne indgår i udtrykket på, kan ofte afsløre, hvad opgaven går ud på.

Omvendt kan opgavens art også diktere, hvordan x'erne og y'erne skal stå i den model (funktion), som man har opstillet.

Se på følgende tabel:

$x = k$	Lodret linje. IKKE en funktion!	
$y = k$ $\Updownarrow$ $y = k \cdot x^0 = k \cdot 1 = k$	Vandret linje. Egentlig en "nul'te grads funktion". Hældning $= 0 \Leftrightarrow$ Vandret!	Kun x'er og konstanter. Ingen "synlige" potenser. $\left(x^0 = 1\right)$
$y = a \cdot x + b$	Ret skrå linje. a er lig hældningen – altså ét skridt til højre i koordinatsystemet og a op eller ned (afhængigt af fortegnet) for at finde linjen igen.	$y =$ "et udtryk i x" Førstegradsligning Ingen "synlige" potenser. $\left(x^1 = x\right)$
$y = a \cdot x$	Ligefrem proportionalitet. Egentlig en ret linje, $y = ax + b$, men hvor b-værdien er lig med 0. Altså en ret, skrå linje, som går gennem origo, idet b-værdien svarer til skæringen med y-aksen.	$y =$ "et udtryk i x" Førstegradsligning Ingen "synlige" potenser. $\left(x^1 = x\right)$
$a \cdot x + y \cdot b = c$ $\Updownarrow$ $y = -\frac{a \cdot x}{b} + \frac{c}{b}$	Linjens ligning på normalform. Den amerikanske skrivemåde. Optræder sjældent i opgaver, men kan sagtens forekomme i processen med at opstille en lineær model.	$y =$ "et udtryk i x" Førstegradsligning Ingen "synlige" potenser. $\left(x^1 = x\right)$
$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$	Andengradsligning. Vil grafisk optræde som en parabel.	$y =$ "et led i x^2 " samt "et led med x" samt et konstantled.
$y = a \cdot x^2 + c$	Andengradsligning. Vil grafisk optræde som en parabel. I dette tillfælde mangler x-leddet. ($b = 0$).	$y =$ "et led i x^2 " samt et konstantled.
$y = a \cdot x^2 + b \cdot x$	Andengradsligning. Vil grafisk optræde som en parabel. I dette tillfælde mangler konstantleddet. ($c = 0$).	$y =$ "et led i x^2 " samt "et led med x".
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$	Cirklens centrumsligning. (a;b) beskriver cirklens centrum – husk fortegn er "omvendte". r er lig med cirklens radius.	x^2 og y^2 forekommer begge samtidig med et (positivt) konstantled (på den anden side af lighedstegnet).
$x^2 + a^2 - 2ax + y^2 + b^2 - 2by = r^2$	Cirklens centrumsligning. Her er ligningen "foldet ud". Den beskriver stadig en cirkel.	x^2 og y^2 forekommer begge samtidig med et (positivt) konstantled (på den anden side af lighedstegnet). Forekomsterne af x og y i 1. potens betyder ikke noget. De kan reduceres tilbage til formen: $(x-a)^2 + (y-b)^2$ vha. den omvendte 2. kvadratsætning.

Det kan være gavnligt at studere den højre kolonne! Hvis man har helt styr på, hvordan x'er og y'er optræder i de forskellige udtryk, så kan en del af svaret ligge allerede i spørgsmålet.