Matematik

Notat

12 - Geometri

af:

Cand. Polyt.

Michel Mandix

Sidste revision: august 2019

Indholdsfortegnelse:

Introduktion

Slår man op i Politikens ordbog, vil man se, at "Geometri" er defineret som: "Den del af matematikken som beskæftiger sig med fladestørrelser og rumfang af figurer, f.eks. trekanter, cirkler, cylindre og kugler".
Ordet stammer fra græsk: **ge@metría** som er dannet af ordene: **gé** 'jord' plus en afledning af **metreîn** 'måle', så geometri betyder egentlig 'jordmåling'. Formentlig et fænomen, som stammer fra det gamle Grækenland, hvor man skulle betale skat af sin ejendom, og derfor var nødt til at vide, hvor meget jord man skulle beskattes af.

Tænker man lidt videre, vil det næste naturlige emne være: "Trigonometri". Konsulterer man igen Politikens ordbog, finder man at geometri er: "Beregning af sider og vinkler i en trekant. Ved hjælp af de trigonometriske funktioner: sinus, cosinus og tangens (og cotangens) kan man ud fra kendte vinkler og sider i en trekant beregne de ukendte vinkler og sider i trekanten.
Ordet stammer ligeledes fra græsk: ***tríg@non*** (som igen stammer fra: **trí** (som er et præfiks for 'tre') og ***g@nos***'vinkel'), som betyder trekant plus **–metri** (måling).

Allerede nu er det klart, at der vil være et betragteligt overlap mellem emnerne 'geometri' og 'trigonometri', idet mange fladestørrelser fordelagtigt vil kunne inddeles i trekanter, og enkelte emner vil blive beskrevet både i dette notat og i notatet om trigonometri.

Som allerede nævnt kan geometri omfatte både fladestørrelser og rummelige figurer. Fremover vil dette blive refereret til som 2D eller 3D figurer, og i dette notat vil rummelige figurer kun blive beskrevet ganske kort.

Basisgeometri beskriver punkter, linjer, trekanter, polygoner (mangekanter) og cirkler.

Punkter

Et punkt har ingen udstrækning, men er en stedangivelse. Et punkt har i sig selv ingen dimensioner, og kan således beskrive et hvilket som helst "sted" på en tallinje/skala (1-dimensionelt), i planet (2D) eller i rummet (3D).

Et punkt afbildes på en streg eller i et plant eller rummeligt koordinatsystem med et lille kryds eller en lille, men tydelig prik.

Punkter navngives med store bogstaver. Man kan naturligvis også navngive punkter mere konkret eller specifikt, som f.eks.: 'A', 'P', 'P_1', 'Pæl', '$\text{Skæring}_{\text{Linje1-Linje2}}$' etc.

Eksempler:
Vands kogepunkt er 100°, dvs. at hvis man forestiller sig en tallinje (som på et termometer), så kan man sætte et kryds ved 100°.
Et punkt i et plan (2D) kan defineres ved dets koordinat. I et almindeligt koordinatsystem, hvor akserne er bestemt som *x*- og *y*-akserne, kan punktets koordinat skrives som f.eks.: $(x;y) = (3;-2)$. Dvs. at man går vandret ud af *x*-aksen til man når '$x = 3$', og fortsætter derefter lodret nedad (fordi *y*-koordinaten er negativ) indtil man rammer den vandrette linje, som går igennem '$y = -2$'.

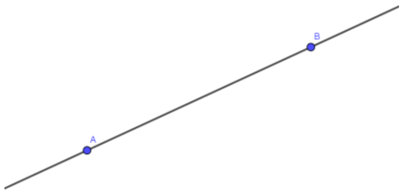
Et punkt i rummet (3D) placeres på samme måde som et punkt i et plan, men her er der en ekstra dimension (typisk navngivet: *z*) at tage hensyn til.

Linjer

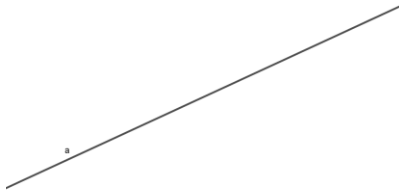
En linje er en samling af (uendeligt mange) punkter, som er beliggende imellem (eller i forlængelse af) to punkter. En linje er, som det beskrives senere, uendeligt lang, og har ingen bredde eller højde. Dette er en følge af, at det er en samling af punkter.

Når man taler om linjer, er det vigtigt at vide, at der findes tre grundtyper af linjer:

Linjer: Som i princippet er uendelige – dvs. at de ikke har hverken begyndelses- eller slutpunkt. Når man tegner en linje, symboliseres den med en streg.
Selvom en linje ikke har begyndelsespunkt eller slutpunkt, så kan den naturligvis sagtens gå igennem et eller flere punkter. Ofte vil det være tilfældet, da linjens beliggenhed i koordinatsystemet vil være defineret af to eller flere punkter, idet linjen skal gå igennem disse punkter. Linjer benævnes enten med små bogstaver eller ved to punkter:

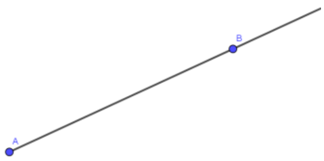


Figur 1: En linje, som går igennem to punkter.

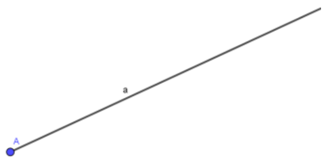


Figur 2: En linje behøver ikke punkter for at eksistere.

Halvlinjer: Som har et begyndelsespunkt i den ene ende, men ikke i den anden ende.
Tegner man en halvlinje, kræver det også et punkt, i hvilket halvlinjen skal begynde, og derefter trækkes linjen fra punktet med en streg. Halvlinjer benævnes enten ved to punkter eller med små bogstaver. Det kan være nødvendigt at beskrive, at der er tale om en halvlinje:

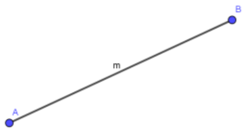


Figur 3: En halvlinje gennem to punkter.



Figur 4: En halvlinje skal mindst have et begyndelsespunkt.

Linjestykker: Linjestykker har både et begyndelsespunkt og et slutpunkt. Dvs. at de har en given længde, hvilket hverken linjer eller halvlinjer har, idet de i princippet fortsætter uendeligt i en eller begge ender.
Skal man tegne et linjestykke, tegnes først de to punkter, som linjestykket skal gå imellem, og derefter trækkes en streg mellem de to punkter.

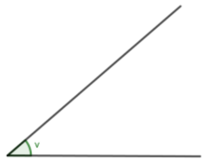


Figur 5: Et linjestykke går mellem to punkter.

Linjestykker benævnes enten med små bogstaver eller ved de to punkter, som linjestykket er defineret ud fra. Ikke nødvendigvis begge dele:

Vinkler

Ordet 'vinkel' kommer fra det latinske ord angulus, hvilket betyder: hjørne.
Afledte ord på andre sprog er f.eks. græsk: ἀγκύλος *(ankylos)*, hvilket betyder bøjet eller kurvet. Det engelske ord 'ankle'(ankel) (ikke det samme som 'angle' (vinkel)) er ligeledes en afledning af angulus. *Der er slet ingen forbindelse til 'angel' (engel) – selvom det er en intern vittighed i filmen "Hot Fuzz"*. En vinkel er en geometrisk figur, som består af to (halv)linjer, som kaldes for 'siderne' i vinklen, og som har et fælles begyndelses- eller skæringspunkt. Dette skæringspunkt kaldes for 'toppunktet' eller for vinklens 'vertex'.



Vinkler alene, betegnes typisk med små bogstaver eller med små græske bogstaver (dog aldrig π). Det er almindeligt at benytte store bogstaver, hvis vinklen betegner en vinkelspids i en polygon. Er der tale om en vinkelspids i en polygon, kan man også betegne vinklen ved at skrive vinklens navn IMELLEM de to hosliggende vinklers navne. (f.eks. vinklen som dannes af linjerne mellem punkterne *B*-*A* og punkterne *A*-*C* ville skrives som: $\angle BAC$).

Angives en vinkels mål, skal den være angivet i grader (°). Husk gradtegnet!

Trekanter

En trekant er en polygon (mangekant) med tre sider (sidelængder) og derfor også tre vinkler. En trekant kan dannes af tre vilkårlige punkter, blot er der den ene begrænsning, at de tre punkter ikke alle må ligge på den samme rette linje. En trekant er den simpleste flade, der eksisterer. Et fællesudtryk for sider og vinkler er: trekantens stykker.

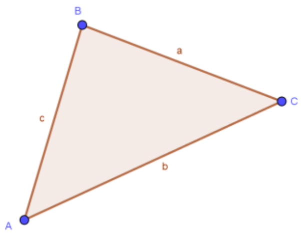
Hvis man har tre af disse stykker (hvoraf mindst et stykke skal være en sidelængde), kan man udregne de tre sidste stykker.

Da alle polygoner kan trianguleres – dvs. inddeles i mindre elementer, som alle er trekanter – er det indlysende at trekanter som et geometrisk begreb er utrolig vigtige.

En trekant benævnes som følger:

Typisk vil de tre vinkelspidser i trekanten benævnes ved tre punkter, f.eks.: A, B og C, men punkterne kan naturligvis navngives fuldstændig arbitrært.
F.eks.: $\triangle ABC$, $\triangle RST$, $\triangle A_1BC_2$ eller f.eks. $\triangle$Pæl-Hegnshjørne-Hushjørne . Som i eksemplet kan det være praktisk at angive at der er tale om en trekant ved at skrive en lille trekant foran navnene på vinkelspidserne, og ofte vil man også navngive vinkelspidserne i stigende rækkefølge MED uret rundt. Se følgende tegning.

Normalt følger reglerne for navngivning af trekantens stykker de sædvanlige regler for opskrivning af punkter og linjer. Altså er vinkelspidserne benævnt med store bogstaver og siderne benævnt med små bogstaver.
Traditionelt hedder en vinkelspids og dens modstående side det samme 'navn', blot skrevet med store og små bogstaver. Se følgende tegning.



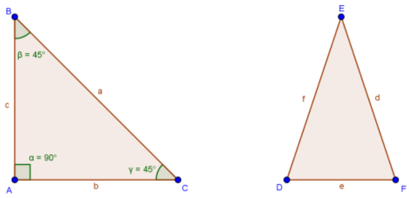
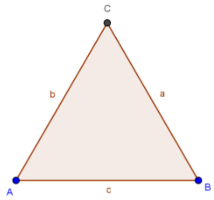
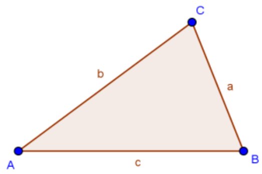
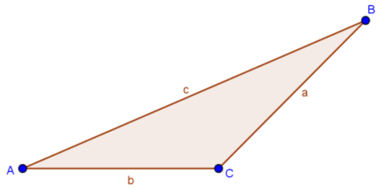
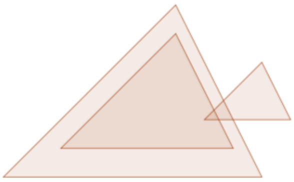
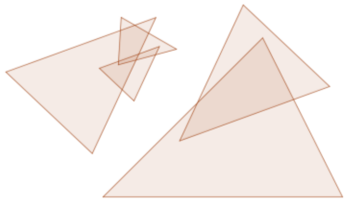
For at forenkle en del af de senere forklaringer, så er det vigtigt at forstå, at siden 'a' er den MODSTÅENDE side til vinkelspidsen 'A', mens siderne 'b' og 'c' kaldes for vinkelspidsen 'A''s HOSLIGGENDE sider.
Vinkelspidserne 'A' og 'C' er siden 'b''s HOSLIGGENDE vinkelspidser.

Hvis det er vigtigt at angive en bestemt vinkelspids i trekanten, skrives vinkelspidsen enten som det punkt, som er beliggende ved vinkelspidsen eller også kan man skrive trekantens tre vinkelspidser med den vinkelspids man ønsker at præcisere som det midterste punkt.

F.eks. er givet en trekant $\triangle ABC$. Ønsker man at beskrive en bestemt vinkelspids med reference til at det er en del af $\triangle ABC$, kan det skrives som $ACB = 30°$.

En trekants vinkelsum

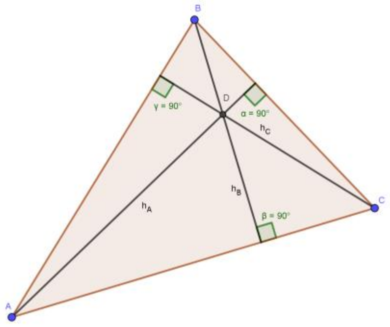
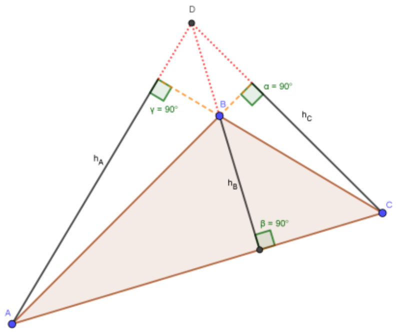
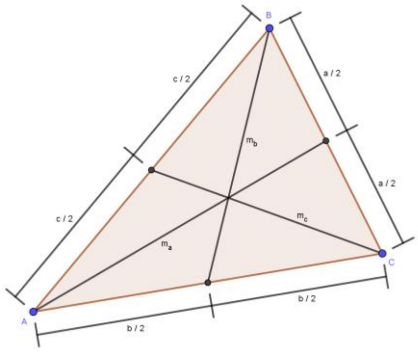
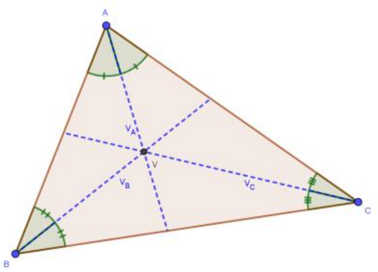
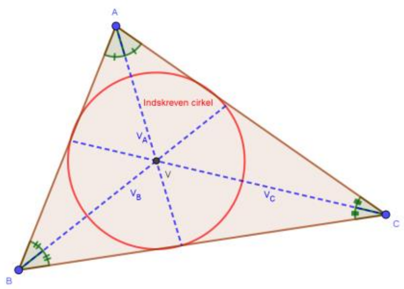
Ordliste om trekanter og typer af trekanter.

Ligebenet trekant (Isosceles triangle)		En ligebenet trekant er en trekant, hvor to af de tre sider er lige lange. Det medfører også, at de to vinkler, som er hosliggende til den tredje side er ens. På billedet ses til venstre en retvinklet ligebenet trekant. For den gælder, at siderne *a* og *b* er lige lange (deraf den ligebenede trekant), men der gælder også, at vinklerne $\angle B = \angle C = 45°$. Til højre ses en vilkårlig ligebenet trekant. For den gælder, at siderne *d* og *f* er lige lange. Samtidig er $\angle D = \angle F$. Disse oplysninger kan være meget nyttige at huske.
Ligesidet trekant (Equilateral triangle)		En trekant, som er ligesidet, er en trekant, hvor alle sider er lige lange. Det medfører samtidig, at alle vinklerne er lige store, nemlig 60°. På billedet ses en ligesidet trekant. $a = b = c$, og $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$.
Retvinklet trekant (Right-angled triangle)		En trekant, hvor præcis én vinkel er 90°.
Spidsvinklet trekant (Akute triangle)		En trekant, hvor alle vinkler er mindre end 90°.
Stumpvinklet trekant (Obtuse triangle)		En trekant, hvor præcis én vinkel er større end 180°.
Ensvinklede trekanter (Equiangular triangles)		Hvis to trekanter har ens vinkler i alle hjørnerne og også i den samme rækkefølge, siger man, at de er ensvinklede. De behøver ikke at have samme størrelse. For trekanter gælder også at hvis de er ensvinklede, da er de også ligedannede.
Ligedannede trekanter (Just formed triangles)		Hvis en trekant kan blive til en anden trekant, blot ved at forstørre den eller formindske den er de ligedannede. For trekanter gælder også at hvis de er ligedannede, da er de også ensvinklede.
Kongruente trekanter (Congruent triangles)	 Alle disse trekanter er kongruente	Når to trekanter kan bringes til lige nøjagtig at dække hinanden – udelukkende ved at flytte, rotere og spejle dem.

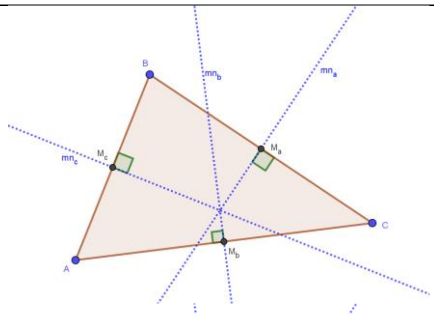
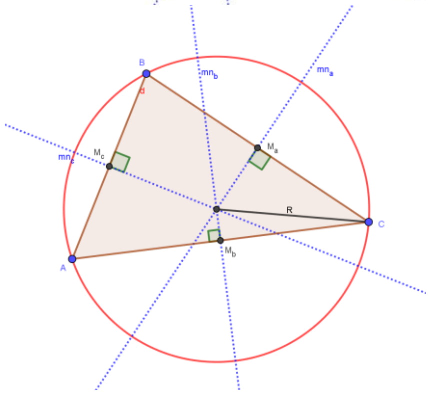
Desuden kan begreberne: Højde, median og vinkelhalveringslinje beskrives:

En trekants vinkelsum

Ordliste om trekanter og typer af trekanter.

Højde (Height)	  	En højde i en trekant er en linje, der udgår fra en vinkelspids og som møder den modstående side (eller dennes forlængelse) vinkelret. Det bemærkes, at de tre højder altid vil skære hinanden i et og samme punkt. Dette punkt kan ligge uden for trekanten, og i det tilfælde er det forlængelsen af højderne, som skærer hinanden. (Se bilag for bevis).
Median (Median)	 	En median i en trekant er en linje, der udgår fra en vinkelspids til midtpunktet på den modstående side. Som det er tilfældet med højderne i en trekant, så vil også medianerne skære hinanden i et og samme punkt – altid inde i trekanten.
Vinkelhalveringslinje (Angle bisector)	  	En vinkelhalveringslinje er en linje, der deler en vinkel i to lige store dele. Det er således det (de) sted(er) eller mængden af punkter, som hver især befinder sig lige langt fra hver af de to linjer, som danner vinklen. Ligesom med både højderne og medianerne, så vil vinkelhalveringslinjerne skære hinanden i et og samme punkt inde i trekanten. Det er værd at bemærke, at skæringspunktet for vinkelhalveringslinjerne samtidig er centrum for trekantens INDSKREVNE cirkel.

En trekants vinkelsum

Midtnormaler (Bisectors)		En midtnormal er en linje, der deler udspringer i et midtpunktet af en side i en trekant og går vinkelret på samme side. En normal er i sagens natur vinkelret på et emne, og en midtnormal er så vinkelret i det punkt, som er midt mellem to af en trekants vinkelspidser. Ligesom med både højderne og medianerne, så vil vinkelhalveringslinjerne skære hinanden i et og samme punkt – ikke nødvendigvis inde i trekanten. Det er værd at bemærke, at skæringspunktet for midtnormalerne samtidig er centrum for trekan-tens OMSKREVNE cirkel med radius, *R*.

Vinkelsum i en trekant

Vinkelspidsernes størrelse måles i grader (°). F.eks. er en ret vinkel 90°.

Det er vigtigt at huske gradtegnet, for det er jo kendetegnende for en vinkel.
(Hvis man ikke har et fint program til at lave gradtegn med, så kan man bruge genvejen: ALT+0176. Her er det vigtigt at huske, at det SKAL være den ALT-tast, som sidder til venstre for mellemrumstasten og at 0176 skal tastes på det NUMERISKE TASTATUR, mens man holder ALT-tasten nede. Dette er ensbetydende med, at Mac-brugere og indehavere af bærbare computere uden et numerisk tastatur IKKE kan bruge denne metode).

Har man fået oplyst eller udregnet alle tre vinkler i en trekant, kan man foretage en kontrolberegning. Denne går ud på, at man adderer de tre vinkler. Hvis resultatet af denne addition er lig med 180°, så har man regnet rigtigt.

Vinkelsummen i en trekant er 180°. $\left(\sum_{i=1}^{3} v_i = v_1 + v_2 + v_3 = 180°\right)$

Generelt gælder det for polygoner (n-kant), at vinkelsummen er: $V_{sum} = (n-2) \cdot 180°$.

Vinkelsummen i en n-polygon er: $V_{sum} = (n-2) \cdot 180°$.

Dette gælder naturligvis også for trekanter, som jo åbenlyst er en 3-kant:

$$V_{sum\ (n=3)} = (n-2) \cdot 180° = (3-2) \cdot 180° = 1 \cdot 180°$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{V_{sum\ (n=3)} = 180°}}$$

Dette kan relativt nemt bevises, og dette bevis kan ses i bilag 5.

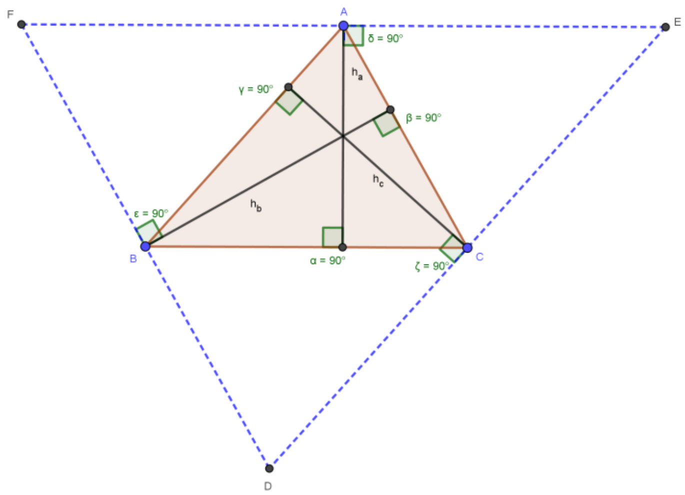
Beviset for vinkelsummen i en n-polygon kan ses i bilag 6.

Bilag 1: Bevis:Højderne i en trekant altid vil skære hinanden i samme punkt.

Der er i plangeometrien flere måder at vise sætningen om, at en trekants højder går gennem samme punkt. Et par af dem vil blive vist her.

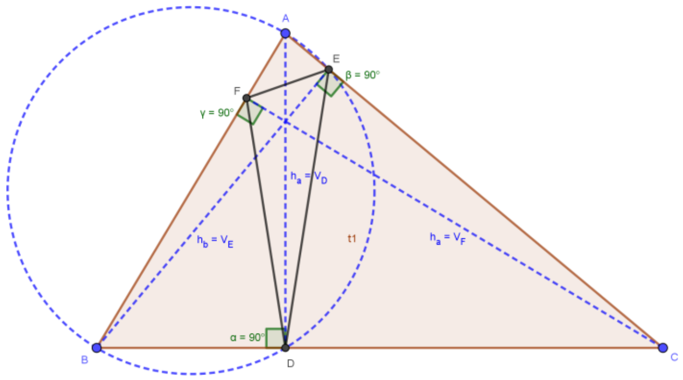
Midtnormaler

Det er (ret) let at vise, at en vilkårlig trekants midtnormaler går gennem samme punkt. Når man derefter skal vise, at også trekantens højder går gennem samme punkt, trækker man traditionelt gennem hver vinkelspids en linje parallel med trekantens modstående side, så $\triangle DEF$ opstår. I denne er A, B og C sidemidtpunkter og højderne i $\triangle ABC$ er så midtnormaler i $\triangle DEF$. Da disse går gennem samme punkt, gælder altså det samme for en trekants højder.



Vinkelhalveringslinjer

Der kan desuden føres et bevis for, at højderne går gennem samme punkt ved hjælp af vinkelhalveringslinjer. Det er nemlig (ret) let at vise, at en trekants vinkelhalveringslinjer går gennem samme punkt.



Det vises, at højderne er vinkelhalveringslinjer i den trekant, der er udspændt af højdernes fodpunkter D, E og F.
Givet, at $\square AEBD$ er indskrivelig, fordi $\triangle AEB$ og $\triangle ADB$ er retvinklede med fælles hypotenuse AB. Midtpunktet af AB er altså centrum for den omskrevne cirkel.

Modstående vinkler i den omskrevne cirkel er supplementvinkler, så

$$\angle BAE + \angle BDE = 180°.$$

Desuden er $\angle CDE + \angle BDE = 180°$, og dermed er $\angle BAE = \angle CDE$. På samme måde ses det på den omskrevne cirkel for $\square ACDF$ og det viser, at $\angle FDB = \angle BAE$.

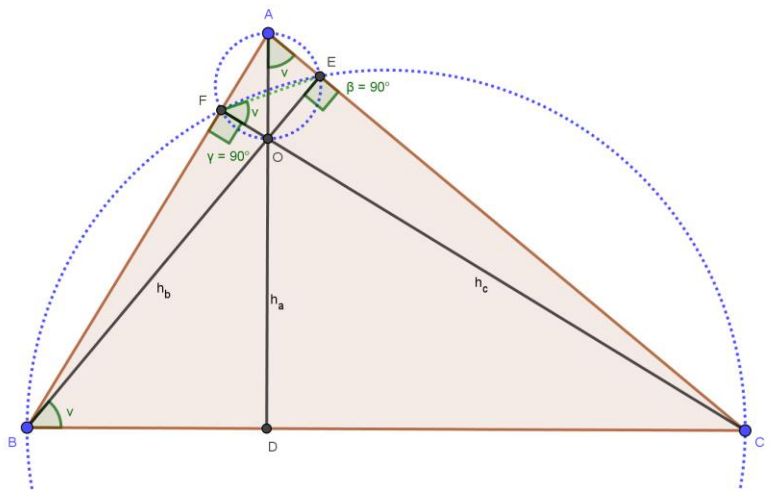
Så er $\angle FDB = \angle CDE$, hvilket netop betyder, at DA er vinkelhalveringslinje for $\angle FDE$.

Da altså højderne i $\triangle ABC$ falder sammen med vinkelhalveringslinjerne i $\triangle DEF$, går højderne gennem samme punkt.

Direkte bevis

Et direkte bevis for, at højderne går gennem samme punkt kan føres således:

Træk højderne *BE* og *CF*. De skærer hinanden i *O*. Linjen *AO* skærer *BC* i *D*.
Nu er $\square AFOE$ indskrivelig, og centrum for den omskrevne cirkel er midtpunktet af *AO*.
Desuden er $\square BCEF$ indskrivelig og centrum for den omskrevne cirkel er midtpunktet af *BC*.



Periferivinkler, der spænder over samme cirkelbue, giver

$$\angle DAC = \angle OAE = \angle EFO = \angle EFC = \angle EBC = v$$

Trekanterne $\triangle ADC$ og $\triangle BEC$ har to parvis lige store vinkler, nemlig *v* og *C*. De to sidste vinkler i de to trekanter er altså også parvis lige store, dvs. $\triangle ADC$ er ret.

Henvisninger:

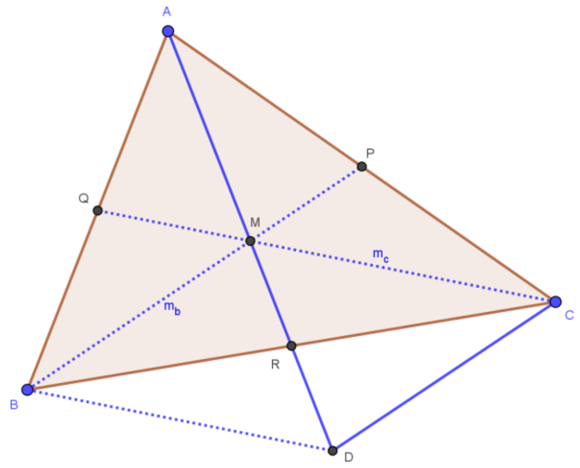
Jens Carstensen, Tårnby Gymnasium, LMFK-bladet (3/2012)
Zhonghong Jiang & George E. O’Brien: Multiple Proof Approaches Mathematical Connections, (Mathematics Teacher, April 2012).

Bilag 2: Bevis:Medianerne i en trekant altid vil skære hinanden i samme punkt.

Der er i plangeometrien flere måder at vise sætningen om, at en trekants medianer går gennem samme punkt. Et par af dem vil blive vist her.

Sætning:

I enhver trekant går medianerne gennem samme punkt og dette punkt deler medianerne i forholdet 2:1 regnet fra vinkelspidsen.



Bevis 1:
Træk medianerne *BP* og *CQ*. De skærer hinanden i punktet *M*.
Træk linjen *AM*, som skærer linjen *BC* i punktet *R*.

Det ønskes bevist, at *AR* er en median.

En linje gennem *C* parallel med linjen *BP* skærer linjen *AR* i punktet *D*. I $\triangle ACD$ er punktet *P* midtpunkt af linjen *AC*, og da $CD \parallel PM$, er *M* midtpunkt af *AD*, dvs. $|DM| = |AM|$. (Reglen om ensvinklede trekanter).

Træk linjen *BD*. I $\triangle ABD$ er *Q* midtpunkt af *AB* (fordi $|DM| = |AM|$). Altså er *QM* midtpunktstransversal (dvs. et linjestykke, som er parallelt med en af trekantens sider, og som skærer igennem midtpunkterne af de to andre sider) i $\triangle ABD$, så $QM \parallel BD$ eller MC || BD .

Da nu $CD \parallel BM$ (fordi *BM* og MP begge er en del af medianen *BP*) og $BD \parallel MC$ (fordi *QM* og *MC* begge er en del af medianen *QC*), er $\square BMCD$ et parallelogram.
Diagonalerne halverer altså hinanden, så *R* er følgelig midtpunkt af *CD*. Derfor er *AR* en median.

Desuden er $|AM| = |DM|$ og da *R* er midtpunkt af *DM*, må det gælde at $\dfrac{AM}{MR} = \dfrac{2}{1}$.

Bevis 2: (samme tegning)

Træk medianerne BP og CQ. De skærer hinanden i punktet M.
Træk linjen AM, som skærer linjen BC i punktet R.

Det ønskes bevist, at AR er en median.

AR forlænges til D, så $MD = AM$. I $\triangle ACD$ er så M og P midtpunkter af siderne AD og AC. Derfor er MP en midtpunktstransversal, så $MP \parallel CD$ eller $BM \parallel CD$.

På samme måde er Q og M midtpunkter af siderne AB og AD i $\triangle ABD$, så QM er midtpunktstransversal og dermed er $QM \parallel BD$ eller $MC \parallel BD$.

Det er nu etableret, at $\square BMCD$ er et parallelogram, så diagonalerne halverer hinanden. Altså er R midtpunkt af BC og dermed er AR en median i trekanten.

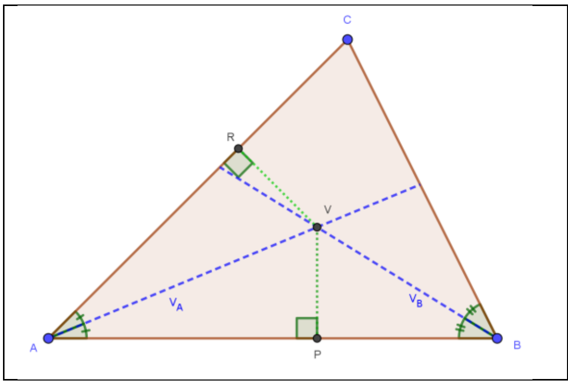
Videre er $MR = \frac{1}{2} DC = \frac{1}{2} BM$ og $MQ = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} MC$.

Dette betyder netop, at M deler medianerne BP og CQ i forholdet 2:1 regnet fra vinkelspidserne.

Henvisninger:

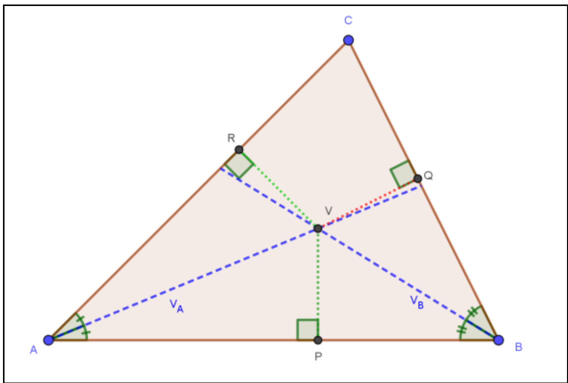
Jens Carstensen, Tårnby Gymnasium, LMFK-bladet (4/2011)

Bilag 3: Bevis: Vinkelhalveringslinjerne i en trekant skærer hinanden i samme punkt, og dette punkt er centrum for trekantens indskrevne cirkel.



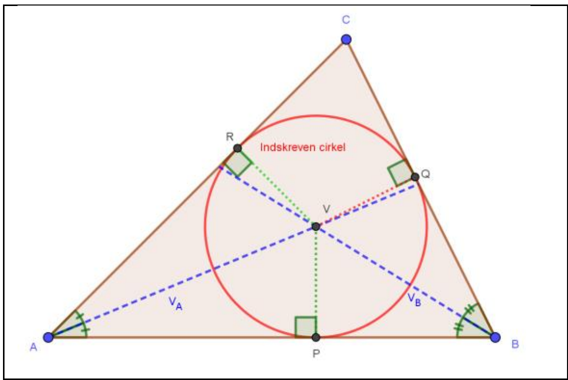
På figuren til venstre er givet $\triangle ABC$, hvori der er indtegnet vinkelhalveringslinjerne V_A og V_B.

Skæringspunktet mellem vinkelhalveringslinjerne kaldes for V.



Da V ligger på $\angle A$'s vinkelhalveringslinje er afstandene $|VR|$ og $|VP|$ lige store. Da V også ligger på $\angle B$'s vinkelhalveringslinje er $|VR|$ og $|VP|$ også lige store.

Heraf følger, at $|VR|$ og $|VQ|$ er lige store, og dermed at V ligger på vinkelhalveringslinjen for $\angle C$.



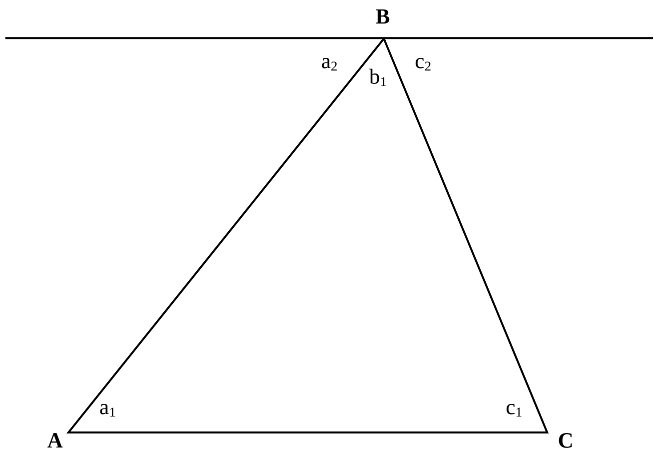
Man ser umiddelbart, at en cirkel med centrum i V og radius $|VP|$ vil tangere trekantens sider i punkterne: P, Q og R.

Bilag 4: Bevis: En trekants vinkelsum

Det ønskes bevist, at vinkelsummen i en trekant – altså værdierne af de tre vinkler i en trekant lagt sammen er 180°. Eller matematisk skrevet: $\sum_{i=1}^{3} v_i = v_1 + v_2 + v_3 = 180°$.

Dette kan ses af nedenstående figur. Husk at en fuld cirkel er defineret som 360°, og derfor er vinklen i en halvcirkel – f.eks. fra det yderste punkt til højre på cirklen og det yderste punkt til venstre – lig med 180°, da man i udgangspunktet står i cirklens centrum.

Med andre ord: "Hvis man står på en ret linie, så er der to retninger man kan følge linien. Enten den ene eller den anden vej. Og vinklen mellem de to retninger – som er modsat rettede – er 180°."



Idet linjen tegnes gennem pkt. B, som er parallel med linien AC, ses det, da to modsat rettede retninger har vinklen 180°, at:

$$\angle a_2 + \angle b_1 + \angle c_2 = 180°$$

Samtidig vides det, at:

$$\angle a_1 = \angle a_2 \text{ og } \angle c_1 = \angle c_2$$

Ved simpel substitution, fås at:

$$\sum_{i=1}^{3} V_i = V_1 + V_2 + V_3 = \angle a_1 + \angle b_1 + \angle c_1 = 180°,$$

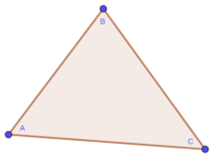
hvorved sætningen er bevist!

Q.E.D.

Bilag 5: En *n*-polygons vinkelsum

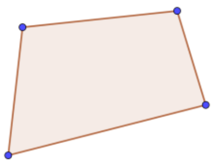
Det ønskes bevist, at vinkelsummen i en *n*-polygon er lig med $V_{sum} = (n-2)\cdot 180°$.

Det er allerede bevist, at vinkelsummen i en trekant er lig med 180°. Dvs.:

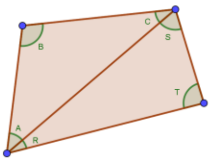


$$\sum_{i=1}^{3} v_i = v_1 + v_2 + v_3 = 180°$$

Problemet udvides til en (irregulær) firkant.



En irregulær firkant tegnes.



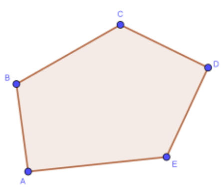
Firkanten opdeles i to trekanter: $\triangle ABC$ og $\triangle RST$.

Det vides at vinkelsummen i $\triangle ABC = 180°$, og at vinkelsummen i $\triangle RST = 180°$.
Derfor må vinkelsummen i firkanten være:
$v_{sum} = \angle B + \angle T + (\angle A + \angle R) + (\angle C + \angle S) = \angle B + \angle T + \angle A + \angle R + \angle C + \angle S$

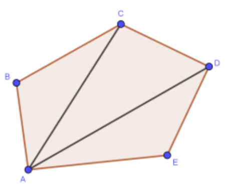
Det vides at: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, og at:
$\angle R + \angle S + \angle T = 180°$.

Derfor må det være sandt, at
$$v_{sum} = \angle B + \angle T + \angle A + \angle R + \angle C + \angle S = \angle A + \angle B + \angle C + \angle R + \angle S + \angle T = 180° + 180°$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{v_{sum} = 360°}}$$

Igen udvides problemet til at omfatte en femkant:

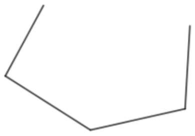


En irregulær femkant tegnes.

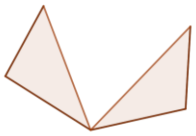


Fuldstændig analogt med firkanteksemplet, så inddeles polygonen (5-kanten) i ikke-overlappende trekanter. Hver trekant hat vinkelsummen 180°, og det vil sige, at femkantens samlede vinkelsum vil være $v_{sum} = 3\cdot 180° \underline{\underline{= 540°}}$

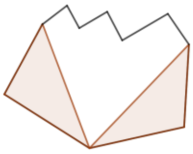
Der søges en generel formel for vinkelsummen af en *n*-polygon.



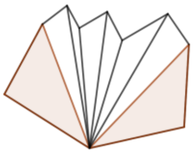
Begyndelsen af en *n*-polygon tegnes. Det eneste der vides, er, at $n > 4$, idet der er tegnet 4 kanter, som ikke udgør en lukket polygon. Det vil sige, at det ikke vides, hvor mange kanter der bliver tegnet efter de fire første streger, og det vil også vise sig at være ligegyldigt indtil videre.



Der tegnes to trekanter, som hver udspændes af to sider i den ufærdige polygon.
Det vil altså sige, at der bruges fire sider af polygonen til at udspænde to trekanter.



”Resten” af polygonen tegnes.



Det indses, at for hver ny ”kant”, der tegnes, så kan der konstrueres en ny trekant. I dette tilfælde er der tegnet seks nye sider, så der er altså tilføjet seks nye trekanter. Det giver, idet der blev konstrueret to trekanter af de fire første sider, at der nu er:

4 oprindelige kanter + de 6 nye, samt
2 oprindelige trekanter + de 6 nye.

Det betyder altså, at der er 10 kanter, som er konstrueret af 8 trekanter.

Opstilles en ligning, som viser antallet af anvendte trekanter fås således:

$$\#_{\triangle} = 2_{Oprindelige} + \left(s_{SiderIPolygonen} - 4_{DeFørsteFireSider}\right) = 2 + s - 4 \Leftrightarrow \underline{\#_{\triangle} = s - 2}$$

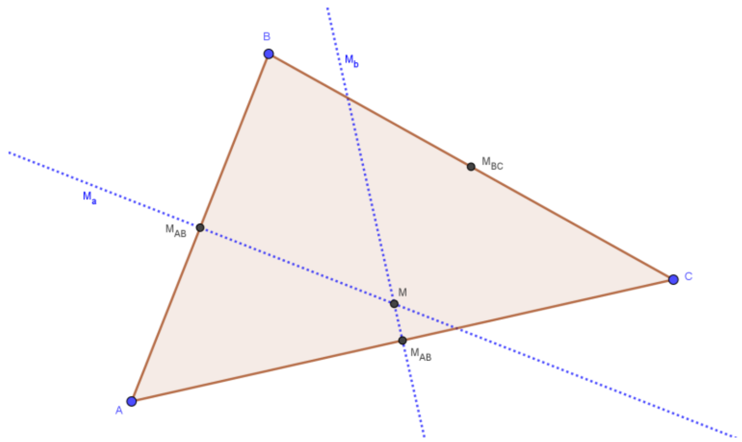
Da vinkelsummen svarer til antallet af trekanter, som er anvendt til at konstruere polygonen multipliceret med 180°, udvides udtrykket til:

$$\underline{\underline{v_{sum} = (s-2)\cdot 180°}}$$

Bilag 6: Bevis: Midtnormalerne i en trekant skærer hinanden i samme punkt og dette punkt er centrum for cirklens omskrevne cirkel

Sætning:

I enhver trekant går midtnormalerne gennem samme punkt. Dette punkt er endvidere centrum for cirklens omskrevne cirkel.



Bevis:

Til at begynde med, tegnes to af midtnormalerne: M_a og M_b. Skæringspunktet mellem disse to midtnormaler kaldes for M.

Da M ligger på M_a er $|BM| = |CM|$, og da M ligger på M_b er $|AM| = |CM|$.

Men så må $|BM| = |AM|$ og dermed ligger M på M_c.

Det er nu bevist, at afstanden fra M og ud til hver af de tre vinkelspidser er lige stor. Dermed er det også indlysende, at M er centrum for en cirkel, hvis afstand (radius) netop går igennem trekantens tre vinkelspidser.

Geometri