MATEMATIK

NOTAT

TRIGONOMETRI

AF:

CAND. POLYT.

MICHEL MANDIX

SIDSTE REVISION: AUGUST 2019

Indholdsfortegnelse:

Introduktion

Trigonometri stammer fra græsk. Det er en sammenskrivning af de tre ord: ”tri” = ”tre”, ”gono” = ”kant” og ”metri” = ”måling”. Trigonometri, som altså betyder trekantsmåling er den gren af matematikken, der behandler sammenhængene mellem sider og vinkler i trekanter.

Hertil er knyttet de trigonometriske funktioner **sinus** (forkortet **sin**), **cosinus** (forkortet **cos**), **tangens** (forkortet **tan**) og **cotangens** (forkortet **cot**) – sidstnævnte, behandles ikke i dette notat. Cotangens er ikke ofte anvent i Danmark, men benyttes ofte i USA. Alle fire funktioner er defineret i enhedscirklen. Desuden behandles Pythagoras’ Læresætning, som benyttes eksklusivt til beregning af sidelængderne i retvinklede trekanter.

Ved hjælp af trigonometri, kan man beregne en eller flere sidelængder og/eller vinkler i en trekant på baggrund af de eksisterende oplysninger.

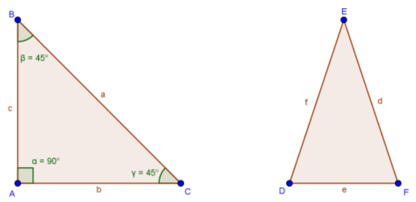
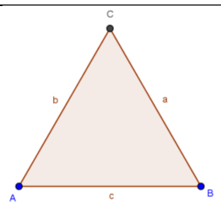
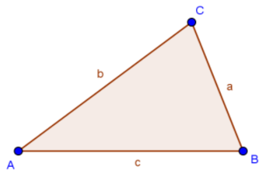
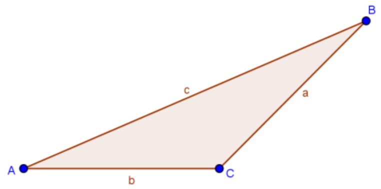
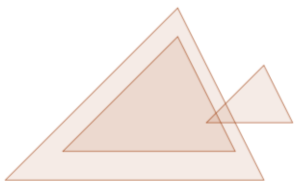
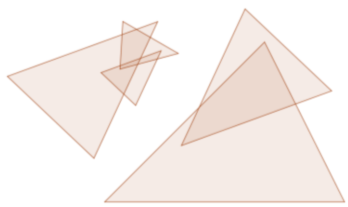
I den forbindelse er det vigtigt at vide, at for at kunne udregne de manglende værdier i en trekant, så skal man have tre oplysninger (sidelængder eller vinkler). Dog er der det forbehold, at mindst én oplysning skal være en sidelængde, for at trekanten kan defineres entydigt. (Hvis man har tre vinkler, kan man kende trekantens form, men ikke dens størrelse, og altså ikke definere trekanten entydigt, da der er uendeligt mange trekanter, som honorerer kendskab til udelukkende de tre vinkler. Mere om dette i afsnittet om ensvinklede trekanter)

De retvinklede trekanter skiller sig ud i forhold til de to andre typer, idet der gælder nogle helt specielle regneregler for disse trekanter.

De to andre typer går også under fællesnavnet: ”vilkårlige trekanter”, og de deler den samme matematiske værktøjskasse.

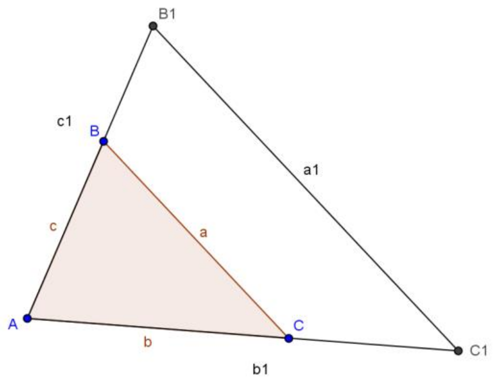
Vær opmærksom på, at regnereglerne for de retvinklede trekanter **IKKE KAN BENYTTES** på de vilkårlige trekanter. Til gengæld KAN man godt benytte regnereglerne for de vilkårlige trekanter på de retvinklede, men det **ER IKKE TILRÅDELIGT**, da regnereglerne for de retvinklede trekanter er simplere og dermed nemmere at benytte og der er ikke så stor risiko for at lave regnefejl undervejs.

En lille opfrisker på ensvinklede trekanter og trekanttyper:

Ordliste om trekanter og typer af trekanter.		
Ligebenet trekant (Isosceles triangle)		En ligebenet trekant er en trekant, hvor to af de tre sider er lige lange. Det medfører også, at de to vinkler, som er hosliggende til den tredje side er ens. På billedet ses til venstre en retvinklet ligebenet trekant. For den gælder, at siderne *a* og *b* er lige lange (deraf den ligebenede trekant), men der gælder også, at vinklerne $\angle B = \angle C = 45°$. Til højre ses en vilkårlig ligebenet trekant. For den gælder, at siderne *d* og *f* er lige lange. Samtidig er $\angle D = \angle F$. Disse oplysninger kan være meget nyttige at huske.
Ligesidet trekant (Equilateral triangl)		En trekant, som er ligesidet, er en trekant, hvor alle sider er lige lange. Det medfører samtidig, at alle vinklerne er lige store, nemlig 60°. På billedet ses en ligesidet trekant. $a = b = c$, og $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$.
Retvinklet trekant (Right-angled triangle)		En trekant, hvor præcis én vinkel er 90°.
Spidsvinklet trekant (Akute triangle)		En trekant, hvor alle vinkler er mindre end 90°.
Stumpvinklet trekant (Obtuse triangle)		En trekant, hvor præcis én vinkel er større end 180°.
Ensvinklede trekanter (Equiangular triangles)		Hvis to trekanter har ens vinkler i alle hjørnerne og også i den samme rækkefølge, siger man, at de er ensvinklede. De behøver ikke at have samme størrelse. For trekanter gælder også at hvis de er ensvinklede, da er de også ligedannede.
Ligedannede trekanter (Just formed triangles)		Hvis en trekant kan blive til en anden trekant, blot ved at forstørre den eller formindske den er de ligedannede. For trekanter gælder også at hvis de er ligedannede, da er de også ensvinklede.
Kongruente trekanter (Congruent triangles)	 Alle disse trekanter er kongruente	Når to trekanter kan bringes til lige nøjagtig at dække hinanden – udelukkende ved at flytte, rotere og spejle dem.

Mange af disse trekantstyper kan godt være gældende på samme tid. F.eks. kan to trekanter sagtens være retvinklede, ligebenede og ligedannede på samme tid.

Introduktion



Forholdet mellem de to trekanter ABC og AB_1C_1 kaldes for skalafaktor, multiplikationsfaktor, formindskelsesfaktor eller fordoblingsfaktor (specielt hvis den ene trekants sider er dobbelt så lange som den andens).

$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$, men man kan finde en anden skalafaktor

(som også er rigtig) ved at vende alle brøkerne:

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c}$$

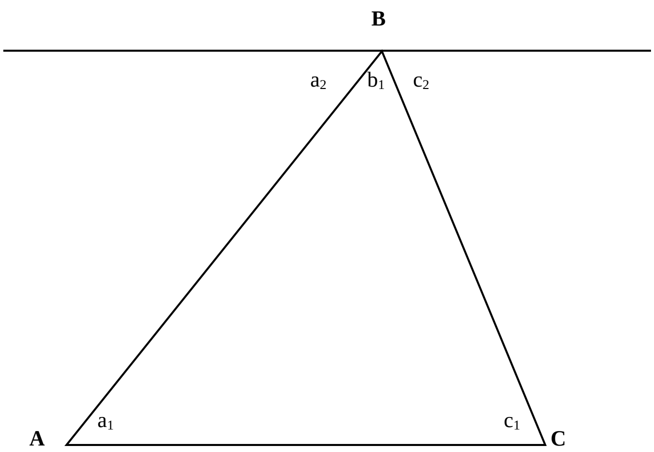
En trekants vinkelsum

For at resten af notatet skal hænge sammen, er det nødvendigt at bevise, at vinkelsummen i en trekant – altså værdierne af de tre vinkler lagt sammen – er 180°. Eller matematisk skrevet:

$$\sum_{i=1}^{3} v_i = v_1 + v_2 + v_3 = 180°.$$

Dette kan ses af nedenstående figur. Husk at en fuld cirkel er defineret som 360°, og derfor er vinklen i en halvcirkel – f.eks. fra det yderste punkt til højre (østligste punkt) på cirklen og det yderste punkt til venstre (vestligste punkt) = 180°, da man i udgangspunktet står i cirklens centrum.

Med andre ord: ”Hvis man står i et punkt på en ret linje, så er der to retninger man kan følge langs linjen. Enten den ene eller den anden vej. Og vinklen mellem de to retninger – som er modsat rettede – er 180°.”



Idet linjen tegnes gennem pkt. B, som er parallel med linjen AC, ses det, da de to modsat rettede retninger har vinklen 180°, at:

$$\measuredangle a_2 + \measuredangle b_1 + \measuredangle c_2 = 180°$$

Samtidig vides det, at:

$$\measuredangle a_1 = \measuredangle a_2 \text{ og } \measuredangle c_1 = \measuredangle c_2$$

Ved simpel substitution, fås at:

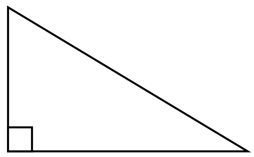
$$\sum_{i=1}^{3} V_i = V_1 + V_2 + V_3 = \measuredangle a_1 + \measuredangle b_1 + \measuredangle c_1 = 180°,$$

hvorved sætningen er bevist! Q.E.D.

Retvinklede trekanter

Som allerede nævnt, er en retvinklet trekant en trekant, hvor netop én af vinklerne er 90°.

Den rette vinkel, markeres ofte med en skarp vinkel, som vist på figuren til højre.

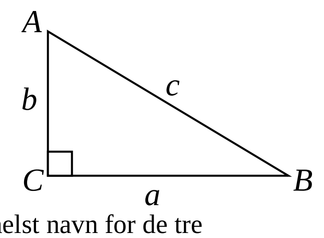


Den retvinklede trekant danner grundlag for de mest udbredte regneregler i trigonometrien – sinus, cosinus og tangens, og som også tidligere nævnt, så gælder der et helt specielt sæt af regneregler for den retvinklede trekant – her i blandt Pythagoras' Læresætning.

I en retvinklet trekant kaldes de to korte sider – altså de sider, som hver især møder den rette vinkel – eller "*de to til den rette vinkel hosliggende sider*" – for **kateterne**.
(Én katete, kateten. Flere kateter, alle kateterne).

Igen omformuleret, kan man sige at det er kateterne, der danner den rette vinkel.

Den længste side – eller "*den til den rette vinkel modstående side*" kaldes for hypotenusen.
(Hypotenuse (sb): En hypotenuse, hypotenusen. Flere hypotenuser, alle hypotenuserne).



Ofte er en retvinklet trekants elementer navngivet som vist på figuren til højre.

Bemærk, at vinklerne (hjørnerne), som på alle andre trekanter, er navngivet med STORE bogstaver, mens siderne er navngivet med små bogstaver.

Desuden vil man traditionelt bruge vinklen "*C*" som den rette vinkel.
Det er dog meget vigtigt at forstå, at man principielt set kan bruge et hvilket som helst navn for de tre vinkler. De er således ikke tvunget til at hedde "*A*", "*B*" og "*C*".

Netop af denne årsag, kan det være en fordel at kende siderne som "kateter" og "hypotenusen". Derved kan man nemmere beregne på alle retvinklede trekanter, uden at skulle lave nye formler hver gang.

Hvis den traditionelle navngivning et øjeblik fastholdes, så bemærk at f.eks. "*c*" er "*C*"'s modstående side, mens siderne "*a*" og "*b*" er "*B*"'s hosliggende sider.
"*A*" er "*a*"'s modstående vinkel og "*A*" og "*C*" er "*b*"'s hosliggende vinkler.

Der gælder generelt om de retvinklede trekanter:

- Overfor en større vinkel i en trekant ligger en større side.
- Overfor en større side i en trekant ligger en større vinkel.
- Enhver side i en trekant er mindre end summen af de to andre.
- Enhver side i en trekant er større end differensen mellem de to andre.

Pythagoras' Læresætning:

Pythagoras fra Samos (Ὁ Πυθαγόρας ὁ Σάμιος) (582 f.Kr. - 507 f.Kr.) var en græsk filosof, mystiker, matematiker, musikteoretiker og musikterapeut.

Pythagoras forenede i sin lære matematik og talmystik med musik (både udøvelse og teori) og forestillingen om sjælens udødelighed.

Pythagoras har lagt navn til den pythagoræiske læresætning, men han opfandt den ikke, da ægypterne kendte til den lang tid før ham. Pythagoras' sætning angår forholdet mellem længden af siderne i en retvinklet trekant. Den lyder: "Summen af kateternes kvadrater, i en retvinklet trekant, er lig med kvadratet på hypotenusen". I symbolsk notation: $a^2 + b^2 = c^2$.

Men lad os se lidt på Pythagoras' Læresætning, og på hvad den kan bruges til i praksis.

Ofte er det nødvendigt at kende længden af et linjestykke, der forbinder to punkter, som f.eks. længden på et af spærene på nedenstående tegning.

Det ville være en mulighed at lave en målfast tegning og måle spærlængden derpå. Derefter kunne man omregne måleenheden til virkelig størrelse for at finde det rigtige mål.
Dette er dog ikke en løsning, som er acceptabel indenfor matematikken, da der er alt for stor usikkerhed på selve tegningen, og også på den rigelige regnen frem og tilbage mellem virkelige mål og tegningsmål.

Det er både mere præcist, men også langt hurtigere, at benytte Pythagoras' Læresætning – en ældgammel regneregel, der afklarer sammenhængen mellem de tre sidelængder i en retvinklet trekant.

Der er kun én enkelt betingelse for, at man kan lave denne beregning, og det er at man skal kunne placere en retvinklet trekant i problemet, i hvilken man kender to sidelængder.

Inden Pythagoras' Læresætning bevises, udregnes spærlængden fra det ovenstående eksempel – netop vha. Pythagoras' Læresætning.

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$\Updownarrow$$
$$c^2 = 3000^2\ mm^2 + 4000^2\ mm^2$$
$$\Updownarrow$$
$$c^2 = 25000000\, mm^2$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt{c^2} = \pm\sqrt{25000000\, mm^2}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{c = 5000\, mm}}$$ (Den negative løsning ignoreres, da der er tale om længder, og en længde kan ikke være negativ.)

Pythagoras' Læresætning:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Pythagoræiske talsæt – eller pythagoræiske tripler:

Inden beviset af Pythagoras' Læresætning, skal det lige nævnes, at der findes det, som kaldes for "pythagoræiske talsæt".

Det er talsæt, (*a*, *b* og *c*), hvor *a*, *b* og *c* alle er hele, positive tal – altså tilhørende mængden: $\mathbb{N}$.

Matematisk skrives dette: $\{a, b, c \in \mathbb{N}\}$.

Det er indlysende, at der er tale om positive tal, da længdemål – i sagens natur – ikke kan være negative.

At de samtidig – for at opfylde et pythagoræisk talsæt – også skal være hele, er det, som gør dem til netop et pythagoræisk talsæt.

Eksempler på pythagoræiske talsæt er f.eks.:

3, 4 & 5
5, 12 & 13

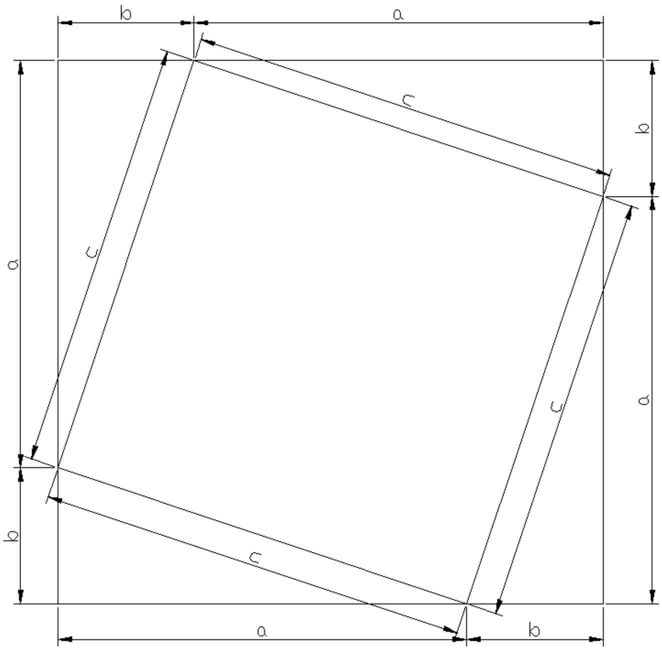
Det vil altid – for $\{a, b, c, m, n \in \mathbb{N}\}$ gælde, at de pythagoræiske talsæt kan findes ved hjælpe af følgende tre formler:

$$a = m^2 - n^2$$
$$b = 2 \cdot m \cdot n$$
$$c = m^2 + n^2$$

Eksempler på pythagoræiske talsæt – og udregningen af dem:				
m	n	$a = m^2 - n^2$	$b = 2 \cdot m \cdot n$	$c = m^2 + n^2$
2	1	3	4	5
3	1	8	6	10
4	1	15	8	17
5	1	24	10	26
6	1	35	12	37
7	1	48	14	50
3	2	5	12	13
4	2	12	16	20
5	2	21	20	29
6	2	32	24	40
7	2	45	28	53
4	3	7	24	25
5	3	16	30	34
6	3	27	36	45
7	3	40	42	58
5	4	9	40	41
6	4	20	48	52
7	4	33	56	65
6	5	11	60	61
7	5	24	70	74
7	6	13	84	85
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Beviset for Pythagoras' Læresætning:

Grundformlen: $c^2 = a^2 + b^2$ ønskes bevist!



Det ses umiddelbart at arealet af det inderste kvadrat er lig med:

$$\underline{A_{Lille\,Kvadrat} = c^2}$$

Ligeledes findes arealet af det store kvadrat:

$$A_{Stor\,Kvadrat} = (a+b)^2$$

$\Updownarrow$ Kvadratsætningerne

$$\underline{A_{Stor\,Kvadrat} = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b}$$

Der er fire trekanter. En i hvert hjørne.

Arealet af en enkelt trekant beregnes som:

$$A_{Trekant} = \frac{1}{2} \cdot Højde \cdot Grundlinie$$

$\Updownarrow$

$$\underline{A_{Trekant} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b}$$

Men der er jo som sagt fire trekanter, og deres samlede areal er:

$$A_{AlleTrekanter} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$

$\Updownarrow$

$$\underline{A_{AlleTrekanter} = 2 \cdot a \cdot b}$$

Så arealet af det lille kvadrat kan vel også skrives som arealet af det store kvadrat minus arealet af de fire trekanter. Tænk blot på, at tegne det store kvadrat og klippe de fire små trekanter fra. Tilbage sidder man med det lille kvadrat.

$$A_{LilleKvadrat} = A_{StorKvadrat} - A_{AlleTrekanter}$$

$\Updownarrow$

$$A_{LilleKvadrat} = a^2 + b^2 \cancel{+2 \cdot a \cdot b} \cancel{-2 \cdot a \cdot b}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{A_{LilleKvadrat} = a^2 + b^2}$$

Nu er det beregnet, at arealet af det lille kvadrat er lig med $a^2 + b^2$, men tidligere er det vist, at arealet af det lille kvadrat er lig med c^2.

Da det er det samme kvadrat er $\underline{\underline{c^2 = a^2 + b^2}}$

Q.E.D

Dette er blot én måde at bevise Pythagoras' Læresætning på… Det er nok også den mest almindelige. Faktisk er Pythagoras' Læresætning blevet bevist på mindst 360 forskellige måder. (Elisha Loomis, The Pythagorean Proposition, 1968). Det er lige til en læseferie!

Husk, at Pythagoras' Læresætning KUN gælder for retvinklede trekanter!!!

Sinus, cosinus og tangens:

I det foregående er der beskrevet om den retvinklede trekant, og hvordan man ved hjælp af Pythagoras' Læresætning kan finde sidelængder, hvis man allerede kender to sidelængder.

Men hvad skal man gøre, hvis man er "på jagt" efter en eller flere vinkler?

Det har allerede været nævnt, at der for trekanter generelt gælder, at vinkelsummen af de tre hjørner altid er 180°. Dette gælder således naturligvis også for retvinklede trekanter, hvor det er en specielt vigtig regel, da man jo altid kender mindst én vinkel til at begynde med – nemlig den på 90°.

Problemet står nu tilbage, hvis man kun kender den ene vinkel – den rette – samt mindst to sidelængder. Så er det pludselig nødvendigt at beregne sig frem til de to resterende vinkler.

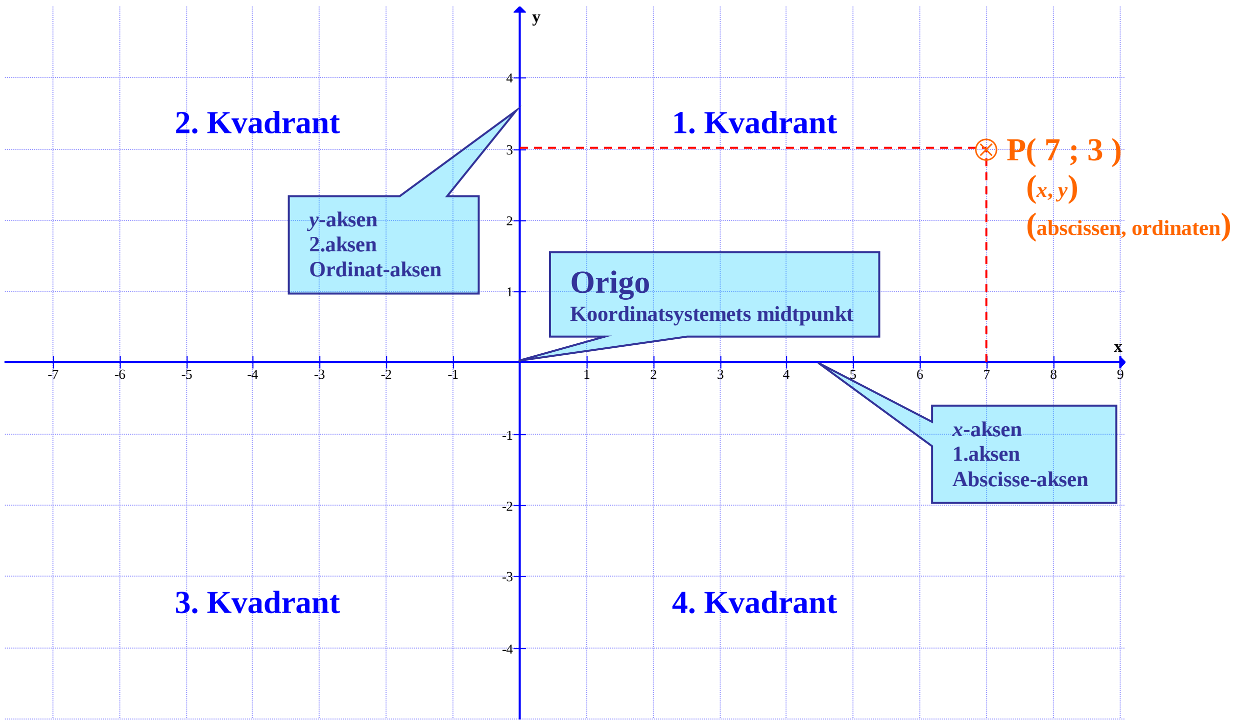
For at kunne beregne vinkler i en trekant – det være sig retvinklede eller vilkårlige – så er det nødvendigt at kende til begreberne "**sinus**", "**cosinus**" og "**tangens**", som beskrives i dette kapitel.

Igen er der en række forudsætninger for at kunne forstå begreberne "**sinus**", "**cosinus**" og "**tangens**". Først og fremmest er det vigtigt at være fortrolig med det retvinklede koordinatsystem.

Koordinatsystemet – en arbejdsplads…

Koordinatsystemets opbygning / nyt eller repetition?:

Et kartesisk koordinatsystem er et retvinklet koordinatsystem. Det betyder at de to (eventuelt tre) akser er ortogonale (vinkelrette) på hinanden. Dermed forstås, at alle punkter i koordinatsystemet opfattes som en skæring mellem linjer parallelle med akserne, hvorved der opstår en ret vinkel for alle punkter.

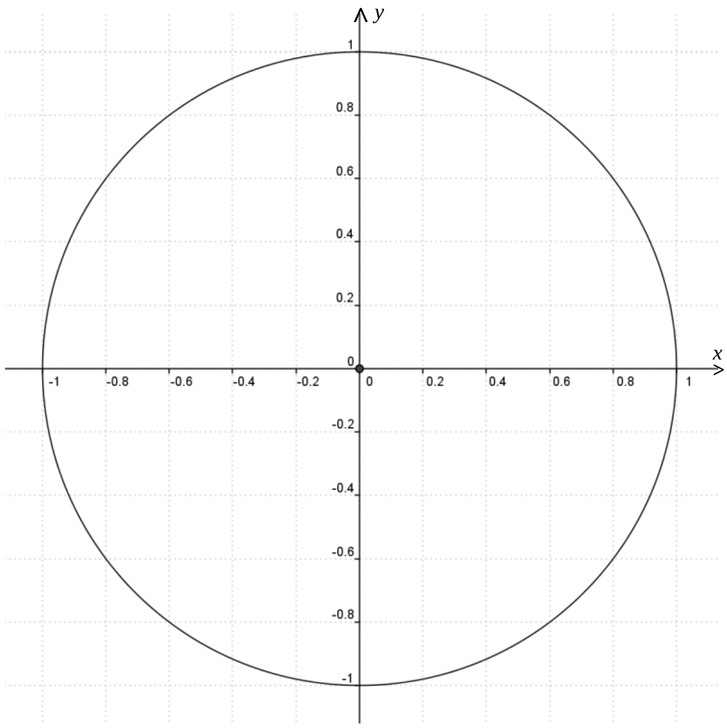


Enhedscirklen:

Når koordinatsystemet er på plads, er det på tide at stifte bekendtskab med **enhedscirklen**.

Definitionen på en enhedscirkel er nu enkel nok…

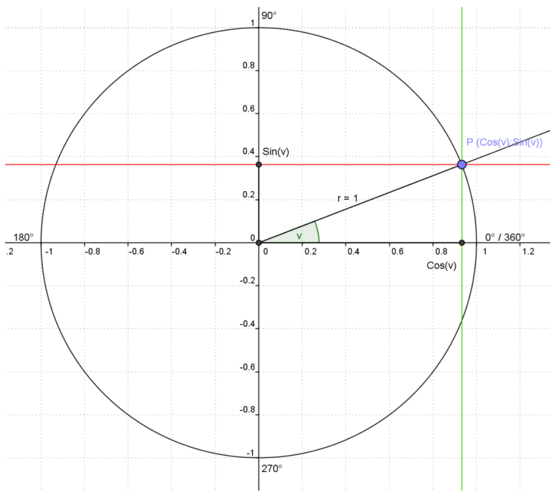
”En enhedscirkel er en cirkel med en radius på 1 enhed, og som har midtpunkt i origo!



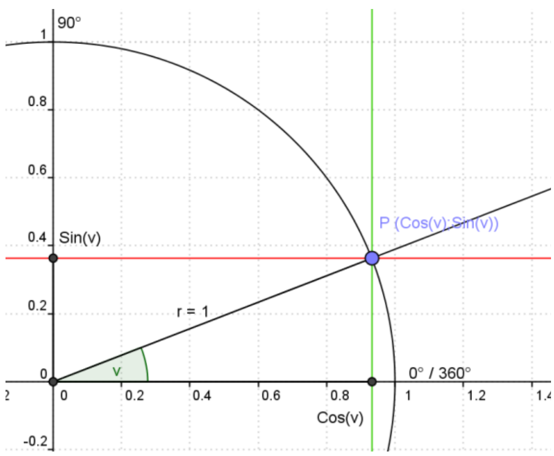
Bemærk denne figur! Den vil – direkte eller indirekte – blive ét af de allermest vigtige værktøjer i resten af studietiden.

Der afsættes et punkt, *P*, på cirkelperiferien. Dette punkt kaldes også: **Retningspunktet for vinklen *v***.

Desuden indføres en vinkel, *v*, mellem 0° og 360 ° i positiv omløbsretning (mod uret, begyndende mod ”øst”). Denne vinkel indlægges i koordinatsystemet, således at vinklens toppunkt – eller begyndelsespunkt er beliggende i koordinatsystemets begyndelsespunkt, origo, og hvor vinklens ene ”ben” er sammenfaldende med *x*-aksen. Vinklens andet ”ben” skærer enhedscirklen” i punktet *P*.



Enhedscirklen med en afsat vinkel, *v*,
og punktet P projiceret ind på hhv. *x*-aksen
og *y*-aksen.



Samme enhedscirkel, men zoomet ind på
1. kvadrant.

Fra punktet *P* projiceres en vandret linje (den røde linje) ind på *y*-aksen. Der, hvor den røde linje skærer *y*-aksen, afsættes et punkt. Afstanden fra origo til dette punkt, defineres som "sinus til vinklen v" – eller mere dagligdags – **sin(*v*)**.
På samme måde projiceres en lodret linje fra punktet *P* (den grønne linje) ned på *x*-aksen. Der, hvor den grønne linje skærer *x*-aksen, afsættes et punkt. Afstanden fra origo til dette punkt, defineres som "cosinus til vinklen v" – eller mere dagligdags – **cos(*v*)**.

Læser man flere matematikbøger eller er til forelæsning hos forskellige undervisere, finder man ud af, at det i vid udstrækning er frivilligt, om man vil sætte parentesen rundt om '*v*', eller hvad man nu ønsker at uddrage sinus, cosinus eller tangens af. I dette materiale, såvel som i undervisningen, sættes parentesen konsekvent af pædagogiske årsager.

Således får punktet *P* koordinaterne: $(x;y)=\left(\cos(v);\sin(v)\right)$

Denne definition beskriver sin(*v*) og cos(*v*) for alle vinkler *v* mellem 0° og 360°.

Idiotformlen:

Ser man på enhedscirklen, kan man sagtens forestille sig en retvinklet trekant, som udspændes af *x*-aksen, linjen mellem origo og retningspunktet og den lodrette linje fra retningspunktet og ned til *x*-aksen.

Som det er beskrevet i et tidligere kapitel (om Pythagoras' Læresætning), haves:

$$c^2=a^2+b^2$$

$\Updownarrow$ Idet *a*, *b* og *c* udskiftes med længderne fra enhedscirklen

$$1^2=\sin^2(x)+\cos^2(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{\sin^2(x)+\cos^2(x)=1}}$$

Ovenstående formel kendes som "Idiotformlen" eller "grundrelationen".
Hvorfor den hedder således, er der vist ingen matematisk forklaring på ...

$$\sin^2(x)+\cos^2(x)=1,\ \text{kan også skrives som: } \left(\sin(x)\right)^2+\left(\cos(x)\right)^2=1$$

Beregning af sinus, cosinus og tangens i Excel:

Blot et lille nemt eksempel, for det tilfælde, at man en dag skal udregne sinus eller cosinus i forbindelse med et regneark.

Gradtal	Sinus	Cosinus	Tangens
45,00°	0,707106781	0,707106781	1

	A	B	C	D
1	Gradtal	Sinus	Cosinus	Tangens
2	45	=SIN(RADIANER(A2))	=COS(RADIANER(A2))	=TAN(RADIANER(A2))

Bemærk, at SIN- og COS-funktionerne i Excel som standard udelukkende kan udregnes korrekt, hvis vinklen er opgivet i radianer. (Mere om radianer senere.) Derfor er der i alle udregninger en indre funktion, som først omdanner gradtallet til radianer.

Et par gode råd og nogle eksempler:

I ”gamle dage” – dvs. da forfatteren gik i skole, var det sin sag at udregne sinus, cosinus og tangens til diverse vinkler! (Naturligvis med undtagelse af de bestemte vinkler som man bør kunne udenad…) Da brugte man en tabel, og ved opslag, kunne man finde de ønskede værdier med 4 decimalers nøjagtighed. Nu til dags, benytter man naturligvis en lommeregner, som kan finde de samme værdier med et meget større antal decimaler på meget kortere tid.
Der er naturligvis stadig nogle bestemte vinkler, for hvilke det er en god idé at kunne sinus og cosinus udenad, men i langt de fleste tilfælde findes resultatet bedst og udelukkende ved hjælp af en lommeregner. Er der ikke angivet andet anbefales det, at man noterer resultaterne med 4 decimaler.

Bruger man lommeregner, er det dog vigtigt, at man lærer enten at videreføre sine resultater eller at bruge lommeregnerens hukommelsesfunktion, således at det er de rigtige tal man regner videre med, og ikke en afstumpet del af det. F.eks. er det en meget typisk fejl, at man noterer et resultat fra lommeregneren i sin udregning, og når man senere skal referere til det fundne resultat, så indtaster man resultatet på lommeregneren med de tre-fire decimaler, som man fik skrevet ned! Derved forsvinder præcisionen af resultatet, idet der jo er mange flere decimaler, som lommeregneren ikke kunne bruge, da man selv har ”amputeret” resten af decimalerne.

Da både sinus og cosinus er defineret i enhedscirklen, er det indlysende, at – afhængigt af vinklen, v – så vil værdierne for sin(v) og cos(v) altid være mellem -1 og 1. Det er vigtigt at huske, for det betyder at hvis man i en udregning kommer frem til, at f.eks. sin(v) = 1,2, så er der en meget stor sandsynlighed for, at man har regnet forkert. (Der kan naturligvis også forekomme opgaver, hvor man ved udregning skal bevise at en eller anden påstand ikke kan lade sig gøre, hvor dette bevis netop gennemføres ved at vise at værdien for sin(v) og cos(v) kommer til at ligge udenfor det gyldige interval.)

Som man vil se – enten ved hjælp af eksemplerne eller ved selv at foretage en række udregninger – er det tydeligt at ved de ”små” vinkler – eller rettere de vinkler som gør, at retningspunktet P kommer til at ligge relativt tæt på x-aksen, så er der et meget stort udsving i værdien af sin(v). Eksempelvis vil sin(v) være omkring 0,1 ved blot v = 5°. Det betyder, at sinus-værdien vil stige til 10% af den mulige værdi, når gradværdien er på omkring 5% ud af de 90°, der jo giver den maksimale sinus-værdi.

Der gælder næsten det samme for cosinus – blot er det her de ”høje” vinkler – altså de vinkler som gør, at retningspunktet P kommer til at ligge relativt tæt på y-aksen.

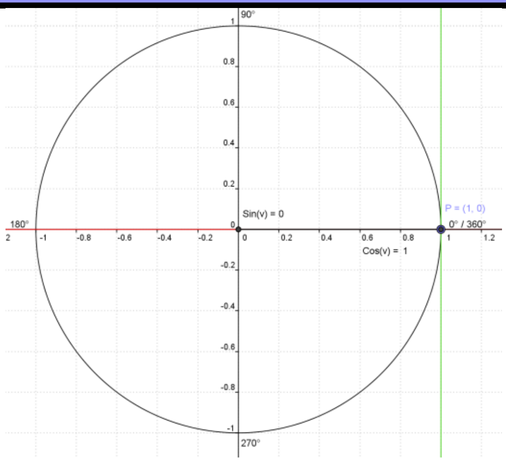
Det, som er vigtigt at forstå her er, at det er vigtigt at få alle decimaler med i udregningerne. Naturligvis runder man af i selve facit, men i alle mellemregninger skal ALLE MULIGE decimaler medtages, da en forholdsvis lille ændring i sinus- eller cosinus-værdierne kan medføre en relativt større ændring i vinklen – og omvendt.

Samtidig betyder det også, at – hvis man har muligheden – at man med fordel kan vælge sit værktøj fornuftigt. Drejer det sig om en meget spids vinkel, kan det være en fordel at udregne den vha. cosinus frem for sinus.

… Og som altid er det absolut det bedste, hvis man kan udregne diverse resultater – udelukkende ved at benytte de i opgaven givne data – frem for at benytte sig af en række mellemregninger og deres resultater.

Skal man f.eks. udregne sidelængder og vinkler i en retvinklet trekant, er det vigtigt at man husker hele sit formelbibliotek, og ikke kun ”de sædvanlige tre-fire stykker”, for så er det altid muligt at finde en formel for det ønskede resultat, således at man udelukkende skal benytte de i opgaven givne oplysninger.

Og nu til selve eksemplerne… :



Vinkel: 0°

sin(v) = 0

cos(v) = 1

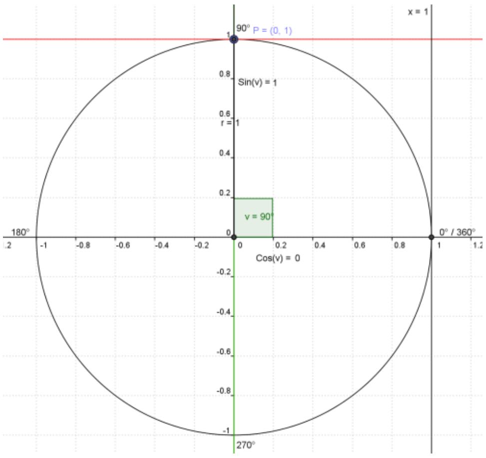
tan(v) = 0

Retningspunkt P: (x; y) = (1; 0)

Hvor langt skal man gå op ad y-aksen for at ramme P? Naturligvis 0! Altså er sin(0°) *= 0.*

Hvor langt skal man gå hen ad x-aksen for at ramme P? 1! Altså er cos(0°) *= 1.*

Hvor langt oppe ad linjen x=1 er P? Igen – selvfølgelig 0! Altså er tan(0°) *= 0.*



Vinkel: 90°

sin(v) = 1

cos(v) = 0

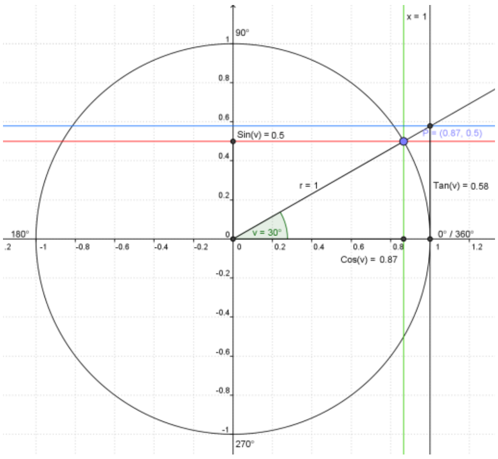
tan(v) = Ikke defineret !!!

Retningspunkt P: (x; y) = (0; 1)

Hvor langt skal man gå op ad y-aksen for at ramme P? 1! Altså er sin(90°) *= 1.*

Hvor langt skal man gå hen ad x-aksen for at ramme P? 0! Altså er cos(90°) *= 0.*

Hvor langt oppe ad linjen x=1 er P? Hvis punktet ligger lodret over origo, så er den linje, som den ligger på parallel og ikke sammenfaldende med x=1. Derfor er der ingen løsninger til dette spørgsmål, og tan(90°) *er ikke defineret!*



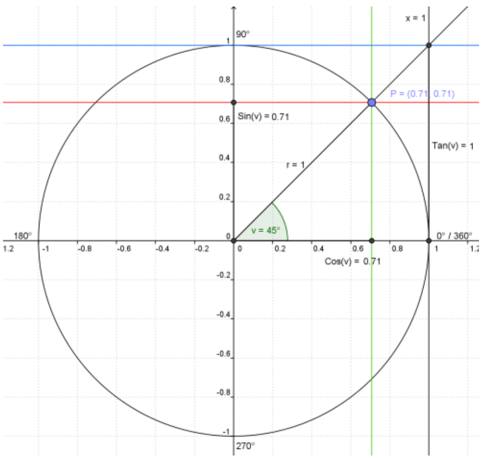
Vinkel: 30°

sin(v) = $\frac{1}{2} \simeq 0,5$

cos(v) = $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,8660...$

tan(v) = $\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,5774...$

Retningspunkt P: $(x;y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right) \approx (0,8660;0,5)$



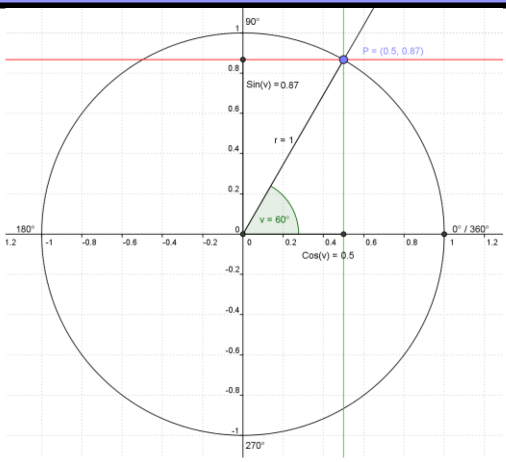
Vinkel: 45°

sin(v) = $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071...$

cos(v) = $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071...$

tan(v) = 1

Retningspunkt P: $(x;y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx (0,7071;0,7071)$



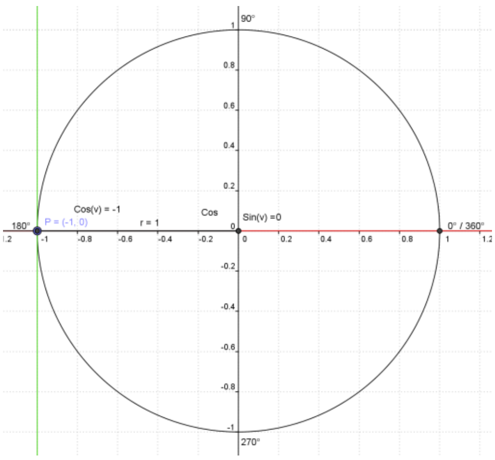
Vinkel: 60°

sin(v) = $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,8660...$

cos(v) = $\frac{1}{2} \approx 0,5$

tan(v) = $\sqrt{3} \approx 1,7321...$

Retningspunkt P: $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx (0,5; 0,8660)$



Vinkel: 180°

sin(v) = 0

cos(v) = -1

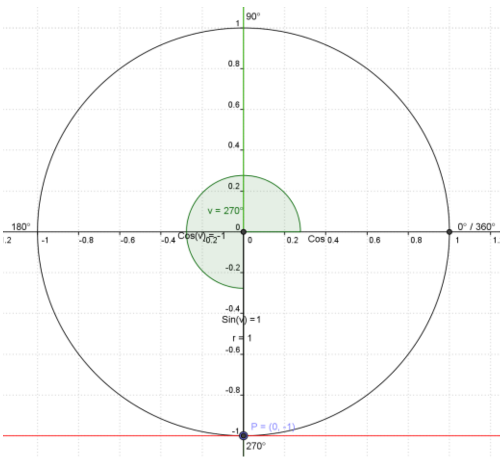
tan(v) = 0

Retningspunkt P: (x; y) = (-1; 0)

Hvor langt skal man gå op ad y-aksen for at ramme P?
Naturligvis 0! Altså: sin(*180°*) *= 0.*

Hvor langt skal man gå hen ad x-aksen for at ramme P? 1!
Men man skal jo gå til venstre, så det er negativ retning… Altså er cos(*180°*) *= -1.*

Hvor langt oppe ad linjen x=1 er P? Igen – selvfølgelig 0! Altså er tan(*180°*) *= 0.*



Vinkel: 270°

sin(v) = 1

cos(v) = 0

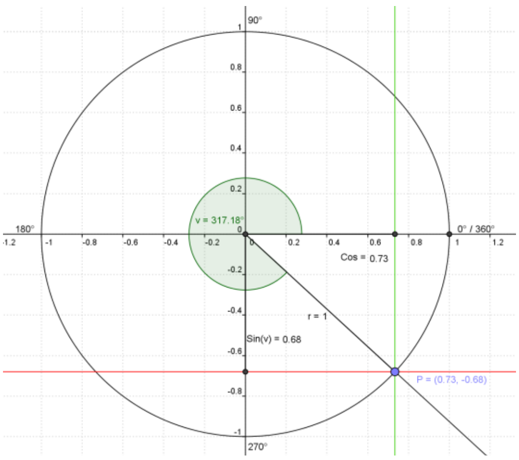
tan(v) = **Ikke defineret !!!**

Retningspunkt P: (x; y) = (0; -1)

Hvor langt skal man gå op ad y-aksen for at ramme P? 1!
Men man skal jo gå nedad, i negativ retning… Altså er sin(*270°*) *= -1.*

Hvor langt skal man gå hen ad x-aksen for at ramme P? 0! Altså er cos(*270°*) *= 0.*

Hvor langt oppe ad linjen x=1 er P? Hvis punktet ligger lodret under origo, så er den linje, som den ligger på parallel og ikke sammenfaldende med x=1. Derfor er der ingen løsninger til dette spørgsmål, og tan(*270°*) *er ikke defineret!*



Vinkel: 317,18°

sin(v) = -0,6797…

cos(v) = 0,7335…

tan(v) = -0,9267…

Retningspunkt P: $(x; y) = (0,7335; -0,6797)$

Sinusrelationerne

Som allerede nævnt, kan det være en fordel at kunne huske de mest almindelige vinkler og deres tilhørende sinus- og cosinus-værdier udenad…
Her er en lille nem måde at huske dem på:

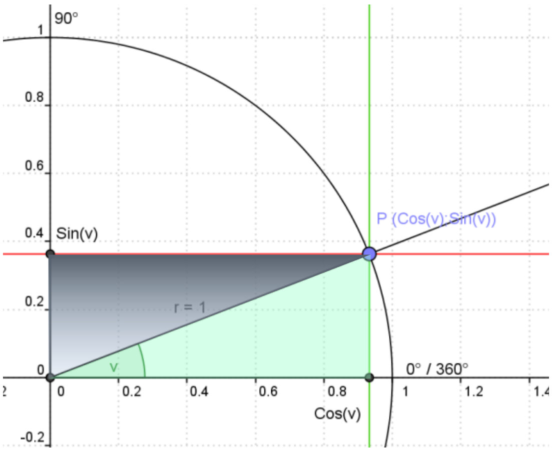
v	0°	30°	45°	60°	90°
cos(v)	$\frac{\sqrt{4}}{2}=\frac{2}{2}=1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0,8660$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0,7071$	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$
sin(v)	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0,7071$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0,8660$	$\frac{\sqrt{4}}{2}=\frac{2}{2}=1$

Bemærk at hvis man kan huske blot én af alle disse værdier, burde man kunne huske dem alle sammen. Tag f.eks. det første felt i cosinus-rækken: $\frac{\sqrt{4}}{2}=\frac{2}{2}=1$. I den næste kolonne skal man trække 1 fra det tal, som står under kvadratroden og så videre, indtil man når 0. Når man så skal udregne sinus-rækken, spejler man blot rækken og skriver de samme tal op igen, men begynder denne gang fra højre… Så virker det!

Her skal der stå noget om to løsninger til Sin(v) = x, samt forklaring af ArcSin, ArcCos og ArcTan.

Sinus, cosinus og tangens i retvinklede trekanter:

Tages igen udgangspunkt i enhedscirklen og der "zoomes" ind på 1. kvadrant, ses følgende:

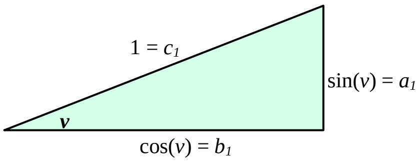


Der kan indlægges en trekant i figuren, som har hjørnepunkter i origo, *P* og i cos(*v*).
Denne trekant er markeret med grøn farvelægning.

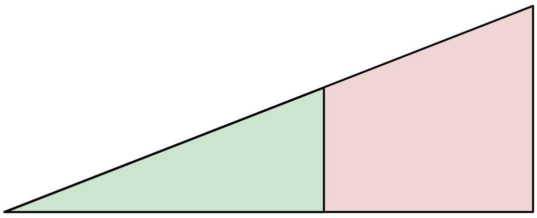
Bemærk, at der findes en anden og kongruent trekant med hjørnepunkterne i origo, *P* og i sin(*v*).
Denne trekant er markeret med blå farvelægning.

Den grønne trekant, der jo er retvinklet, isoleres idet projektionen fra *P* ned på *x*-aksen er lodret og dermed parallel med *y*-aksen.

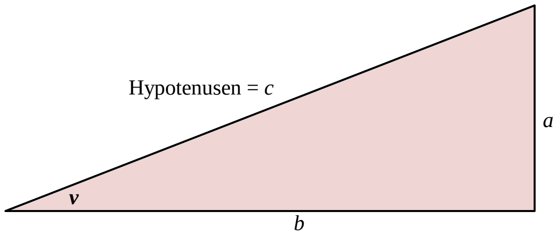
Denne trekant kaldes trekant 1. Derved vil alle mål til denne trekant have index 1.
Det ses nu, at hypotenusen i denne trekant er lig med 1. Denne side kaldes for c_1.
De to kateter, har jo – som tidligere forklaret – længderne hhv. sin(*v*) og cos(*v*). Disse to sider kaldes hhv. for a_1 og b_1.



Nu indføres en vilkårlig ligedannet trekant. (Den røde trekant, som er en vilkårlig forstørrelse af den grønne trekant. Det kunne såmænd endda være en formindskelse, men lad det være antaget, at størrelsesfaktoren mellem de to trekanter, kan være et vilkårligt tal mellem 0 (inklusive) og uendeligt.)



Isoleres denne nye trekant, kan der sættes sidelængder på. Alle sidelængder i denne nye trekant, navngives på samme måde, som med den grønne trekant, men der gives ikke noget index, da den repræsenterer en vilkårlig trekant $(\triangle ABC)$.



Ifølge reglen om ensvinklede trekanter, kendes forholdene:

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c}$$

Der fokuseres på siderne *a* og *c*.

$$\frac{a_1}{a} = \frac{c_1}{c}$$

Da siden c_1 er lig med 1, og a_1 er lig med *sin*(*v*), kan udtrykket opskrives således:

$$\frac{a_1}{a} = \frac{1}{c}$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{\sin(v)}{a} = \frac{1}{c}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\sin(v) = \frac{a}{c}}$$

Da den røde trekant er en vilkårlig trekant, omskrives udtrykket på følgende måde:

$$\underline{\underline{\sin(v) = \frac{\text{Modstående Katete}}{\text{Hypotenusen}}}}$$

På fuldstændig samme måde, kan udtrykket for cosinus beregnes. Siderne *b* og *c* betragtes.

$$\frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c}$$

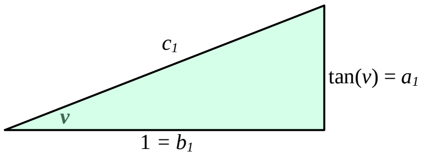
Da siden c_1 er lig med 1, og b_1 er lig med cos(*v*), kan udtrykket opskrives således:

$$\frac{b_1}{b} = \frac{1}{c}$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{\cos(v)}{b} = \frac{1}{c}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\cos(v) = \frac{b}{c}}$$

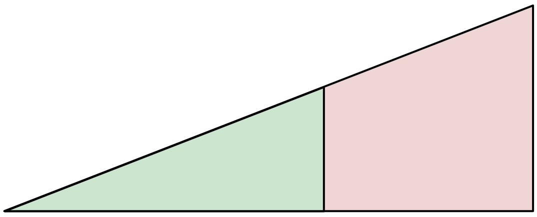
Da den røde trekant er en vilkårlig trekant, omskrives udtrykket på følgende måde:

$$\underline{\underline{\cos(v) = \frac{\text{Hosliggende Katete}}{\text{Hypotenusen}}}}$$

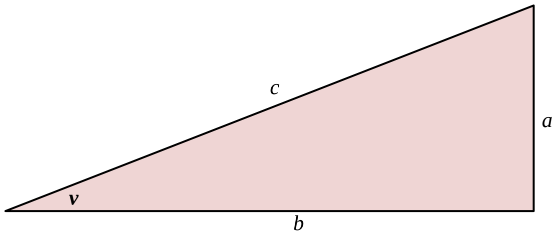
Når der skal udledes et tilsvarende udtryk for tangens, skal der tænkes lidt anderledes. Her er hypotenusen jo ikke nødvendigvis 1. Det er til gengæld afstanden fra origo, og så ud til $x = 1$, eller med andre ord, den linje, som tangens defineres på.



Nu introduceres en vilkårlig ligedannet trekant (den røde trekant, som er en forstørrelse af den grønne trekant).



Isoleres denne nye trekant, kan der sættes sidelængder på. Alle sidelængder i denne nye trekant, navngives på samme måde, som med den grønne trekant, men der gives ikke noget index.



Ifølge reglen om ensvinklede trekanter, bliver forholdene:

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c}$$

Siderne *a* og *b* betragtes.

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b}$$

Da siden b_1 er lig med 1, og a_1 er lig med tan(v), kan udtrykket opskrives således:

$$\frac{a_1}{a} = \frac{1}{b}$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{\tan(v)}{a} = \frac{1}{b}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\tan(v) = \frac{a}{b}}$$

Men da den røde trekant er en vilkårlig trekant, omskrives udtrykket på følgende måde:

$$\underline{\underline{\tan(v) = \frac{\text{Modstående Katete}}{\text{Hosliggende Katete}}}}$$

Hermed kan følgende lille formelsamling opstilles:

Vinkelsummen i en trekant er lig med 180°

$$\sum_{i=1}^{3} v_i = 180° \Leftrightarrow v_1 + v_2 + v_3 = 180°$$ (Gælder for **ALLE** trekanter)

Pythagoras' Læresætning

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Eller endnu bedre: (Gælder **KUN** for **retvinklede** trekanter)

$$\text{Hypotenusen}^2 = \text{Katete}_1{}^2 + \text{Katete}_2{}^2$$

Areal af en retvinklet trekant

$$\text{Areal} = \frac{1}{2} \cdot \text{Katete}_1{}^2 \cdot \text{Katete}_2{}^2$$ (Gælder **KUN** for **retvinklede** trekanter)

Sinus til en vinkel i en retvinklet trekant

$$\sin(v) = \frac{\text{Modstående Katete}}{\text{Hypotenusen}}$$ (Gælder **KUN** for **retvinklede** trekanter)

Cosinus til en vinkel i en retvinklet trekant

$$\cos(v) = \frac{\text{Hosliggende Katete}}{\text{Hypotenusen}}$$ (Gælder **KUN** for **retvinklede** trekanter)

Tangens til en vinkel i en retvinklet trekant

$$\tan(v) = \frac{\text{Modstående katete}}{\text{Hosliggende katete}}$$ (Gælder **KUN** for **retvinklede** trekanter)

Sinusrelationen

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$ (Gælder for **vilkårlige** trekanter)

Cosinusrelationerne

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(B) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(B) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}$$ (Gælder for **vilkårlige** trekanter)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(C) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(C) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}$$

Areal af en retvinklet trekant

$$\text{Areal} = \frac{1}{2} \cdot \text{a} \cdot b \cdot \sin(C)$$

$$\text{Areal} = \frac{1}{2} \cdot \text{a} \cdot c \cdot \sin(B)$$ (Gælder for **vilkårlige** trekanter)

$$\text{Areal} = \frac{1}{2} \cdot \text{b} \cdot c \cdot \sin(A)$$

Vilkårlige trekanter

Da den anden løsning til ligningen cos(x) = k, altid vil ligge i 3. eller 4. kvadrant i enhedscirklen, eller med andre ord mellem 180° og 360°, så er det altså i et interval, som man aldrig vil kunne opnå i en trekant, da vinkelsummen i en trekant er lig med 180°.

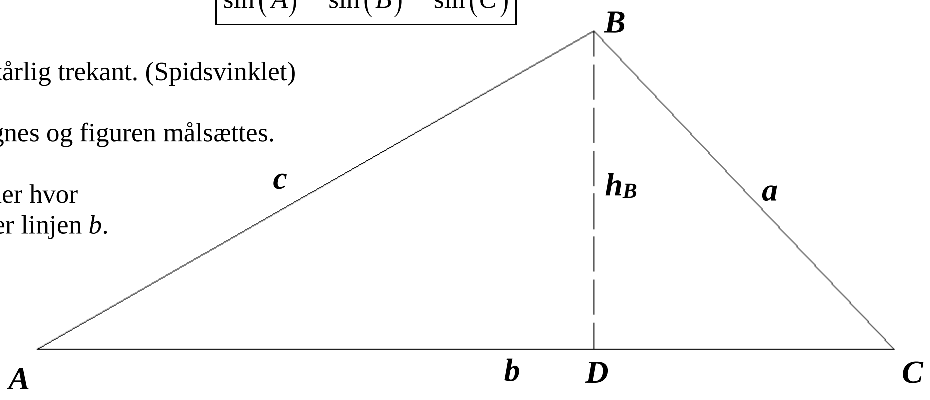
Sinusrelationerne

Vi ønsker at bevise følgende sætning: $\boxed{\frac{a}{\sin(A)}=\frac{b}{\sin(B)}=\frac{c}{\sin(C)}}$

Først tegnes en vilkårlig trekant. (Spidsvinklet)

Højden fra *B* indtegnes og figuren målsættes.

Punkt *D* indføres, der hvor højden fra *B* rammer linjen *b*.



Som det ses, inddeler højden fra pkt. *B* den vilkårlige trekant i to retvinklede trekanter.

Hvis den ”venstre” retvinklede trekant, trekant *ABD*, betragtes, opstilles følgende ligning med de sædvanlige ”værktøjer” for den retvinklede trekant:

$$\sin(A)=\frac{\text{Modstående Katete}}{\text{Hypotenusen}}=\frac{h_B}{c}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{h_B=c\cdot\sin(A)}$$

Tilsvarende betragtes den ”højre” retvinklede trekant, trekant *BCD*, og der fremkommer et lignende udtryk:

$$\sin(C)=\frac{\text{Modstående Katete}}{\text{Hypotenusen}}=\frac{h_B}{a}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{h_B=a\cdot\sin(C)}$$

Det er den samme h_B i de to ligninger. Der er jo ikke tegnet en ny trekant i mellemtiden. Derfor kan følgende skrives:

$$c\cdot\sin(A)=a\cdot\sin(C)$$

$$\Updownarrow$$ Almindelig division giver:

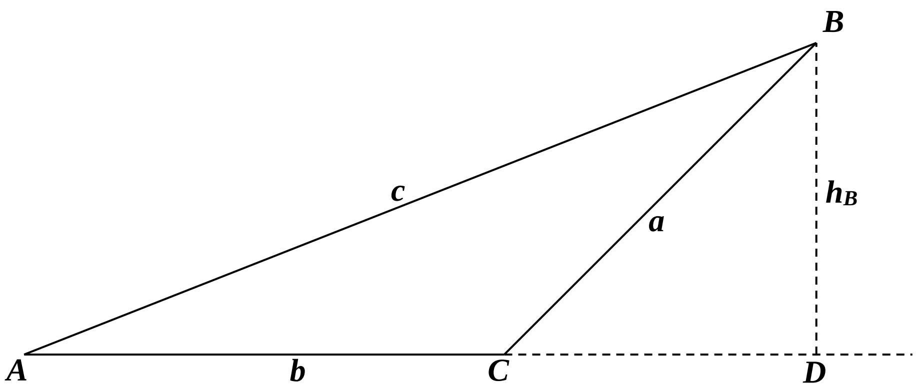
$$\frac{c}{\sin(C)}=\frac{a}{\sin(A)}$$

Det er ganske vist kun en del af sinusrelationen (den hedder jo egentlig: $\frac{a}{\sin(A)}=\frac{b}{\sin(B)}=\frac{c}{\sin(C)}$), men resten kan nemt indses ved at tegne højden fra enten pkt. *A* eller pkt. *C*, og så køre beviset igen. (I princippet, kan man blot nøjes med at ændre navnene på trekantens hjørner og køre beviset igen. Da kan man undlade at ”dreje” hele figuren og tegne nye højder…)

Q.E.D

Men hvad nu hvis trekanten er stumpvinklet i stedet for spidsvinklet?

Det viser sig, at beviset er fuldstændig analogt med det allerede viste bevis for den spidsvinklede trekant:



Som det ses, danner højden fra pkt. *B* den vilkårlige trekant to retvinklede trekanter, *ABD* og *BCD*.

Hvis den ”venstre” retvinklede trekant, trekant *ABD*, betragtes, opstilles følgende ligning med de sædvanlige ”værktøjer” for den retvinklede trekant:

$$\sin(A) = \frac{\text{Modstående Katete}}{\text{Hypotenusen}} = \frac{h_B}{c}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{h_B = c \cdot \sin(A)}$$

Og betragtes tilsvarende den ”højre” retvinklede trekant, trekant *BCD*, fås et lignende udtryk:

$$\sin(C) = \frac{\text{Modstående Katete}}{\text{Hypotenusen}} = \frac{h_B}{a}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{h_B = a \cdot \sin(C)}$$

Det er den samme h_B i de to ligninger. Der er jo ikke tegnet en ny trekant i mellemtiden. Derfor kan følgende skrives:

$$c \cdot \sin(A) = a \cdot \sin(C)$$
$$\Updownarrow \quad \text{Almindelig division giver:}$$
$$\frac{c}{\sin(C)} = \frac{a}{\sin(A)}$$

Det er ganske vist kun en del af sinusrelationen (den hedder jo egentlig: $\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$), men resten kan nemt indses ved at tegne højden fra enten pkt. A eller pkt. C, og så køre beviset igen. (I princippet, kan man blot nøjes med at ændre navnene på trekantens hjørner og køre beviset igen. Da kan man undlade at ”dreje” hele figuren og tegne nye højder…)

Q.E.D

Cosinusrelationerne

Følgende sætninger ønskes bevist:

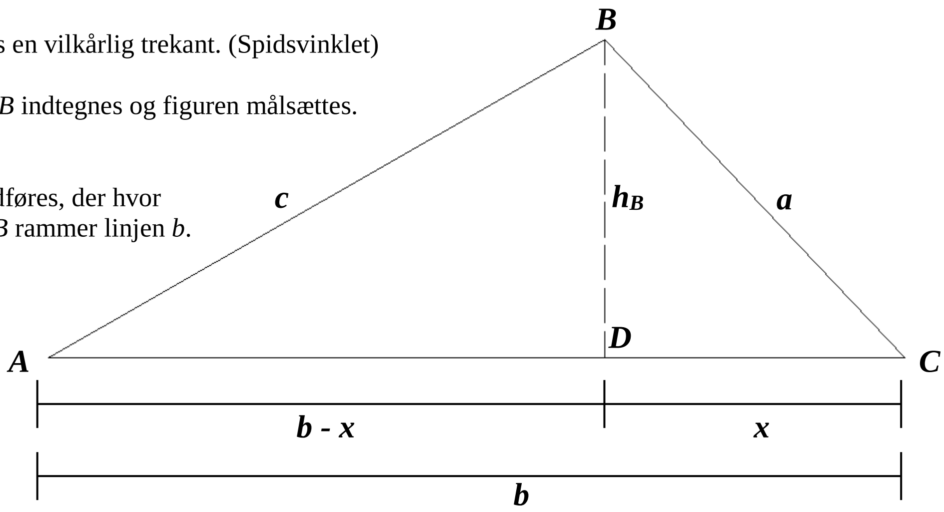
$$\begin{array}{|lcl|} a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos(A) & \Leftrightarrow & \cos(A) = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c} \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot\cos(B) & \Leftrightarrow & \cos(B) = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2\cdot a\cdot c} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos(C) & \Leftrightarrow & \cos(C) = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b} \end{array},$$

… der jo tilsammen udgør cosinusrelationerne …

Først tegnes en vilkårlig trekant. (Spidsvinklet)

Højden fra *B* indtegnes og figuren målsættes.

Punkt *D* indføres, der hvor højden fra *B* rammer linjen *b*.



Som det ses, inddeler højden fra pkt. *B* den vilkårlige trekant i to retvinklede trekanter.

Betragtes den "venstre" retvinklede trekant, trekant *ABD*, er det muligt at opstille følgende ligning med de sædvanlige "værktøjer" for den retvinklede trekant – i dette tilfælde: Pythagoras' Læresætning:

$$c^2 = h_B{}^2 + (x-b)^2$$

$\Updownarrow$ Ser man nøje efter, er det blot Pythagoras' Læresætning.
Derefter bruges kvadratsætningerne til at rydde op...

$$c^2 = h_B{}^2 + \left(x^2 + b^2 - 2\cdot x\cdot b\right)$$

$\Updownarrow$ Parentesen hæves...

$$\underline{c^2 = h_B{}^2 + x^2 + b^2 - 2\cdot x\cdot b}$$

Betragtes tilsvarende den "højre" retvinklede trekant, trekant *BCD*, fås et lignende udtryk:

$$a^2 = h_B{}^2 + x^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{h_B{}^2 = a^2 - x^2}$$

Resultatet af den seneste udregning, $h_B^{\ 2}$, indsættes i den første udregning:

$$c^2 = h_B^{\ 2} + x^2 + b^2 - 2 \cdot x \cdot b$$

$\Updownarrow$ Udtrykket for $h_B^{\ 2}$ indsættes

$$c^2 = a^2 \cancel{- x^2} \cancel{+ x^2} + b^2 - 2 \cdot x \cdot b$$

$\Updownarrow$ Og der ryddes op...

$$\underline{c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot x \cdot b}$$

Det eneste problem er dog nu, at '*x*' ikke er kendt! Men vha. de 'gamle' regneregler for den retvinklede trekant, kan '*x*' nemt findes… Se blot på tegningen igen, og betragt specielt trekanten *BCD*. Her gælder:

$$\cos(v) = \frac{\text{Hosliggende Katete}}{\text{Hypotenusen}}$$

$\Updownarrow$

$$\cos(C) = \frac{x}{a}$$

$\Updownarrow$

$\underline{x = a \cdot \cos(C)}$, hvilket indsættes i den forrige udregning...

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot x \cdot b$$

$\Updownarrow$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot \cos(C) \cdot b$$

$\Updownarrow$ Og hvis der ændres lidt på faktorernes rækkefølge...

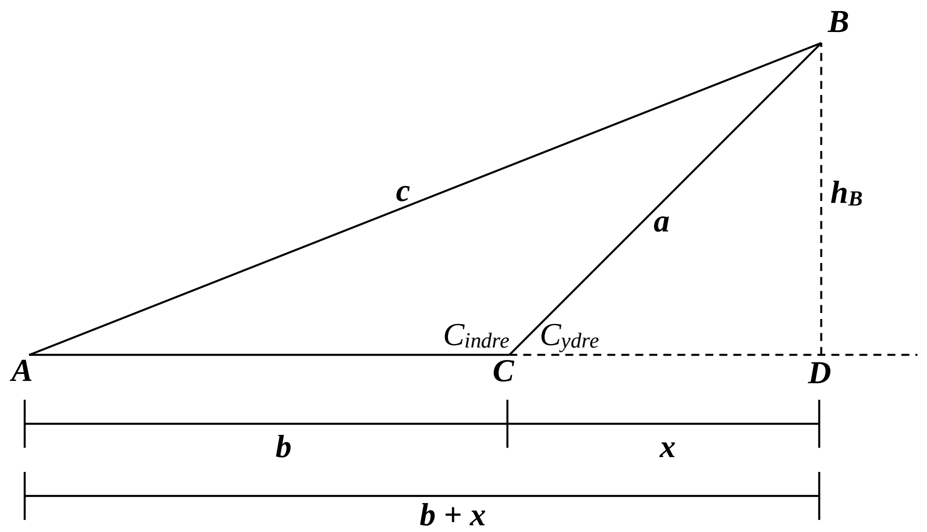
$$\underline{\underline{c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(C)}}$$

Det ses, at resultatet er den ene af ligningerne i det, som tidligere blev præsenteret som "cosinusrelationerne", men resten kan nemt indses – som det var tilfældet ved sinusrelationen – ved at tegne højden fra enten pkt. *A* eller pkt. *C*, og så køre beviset igen. (I princippet, kan man blot nøjes med at ændre navnene på trekantens hjørner og køre beviset igen. Da kan man undlade at "dreje" hele figuren og tegne nye højder…)

$\boxed{\textbf{Q.E.D}}$

Men hvad nu hvis trekanten er stumpvinklet i stedet for spidsvinklet?

Det viser sig, at beviset er stort set analogt med det allerede viste bevis for den spidsvinklede trekant, men dog med en lille krølle! Den beskrives senere:



Som det ses, danner højden fra pkt. *B* den vilkårlige trekant to retvinklede trekanter, *ABD* og *BCD*.

Betragtes den ”store” retvinklede trekant, trekant *ABD*, kan følgende ligning opstilles med de sædvanlige ”værktøjer” for den retvinklede trekant – i dette tilfælde: Pythagoras’ Læresætning:

$$c^2 = {h_B}^2 + (x+b)^2$$

$\Updownarrow$ Ser man nøje efter, er det blot Pythagoras' Læresætning.
Derefter bruges kvadratsætningerne til at rydde op...

$$c^2 = {h_B}^2 + (x^2 + b^2 + 2 \cdot x \cdot b)$$

$\Updownarrow$ Parentesen hæves...

$$\underline{c^2 = {h_B}^2 + x^2 + b^2 + 2 \cdot x \cdot b}$$

På samme måde fokuseres på den ”lille” retvinklede trekant, trekant *BCD*, og der fås et lignende udtryk:

$$a^2 = {h_B}^2 + x^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{{h_B}^2 = a^2 - x^2}$$

Resultatet af den seneste udregning, ${h_B}^2$, indsættes i den første udregning:

$$c^2 = {h_B}^2 + x^2 + b^2 + 2 \cdot x \cdot b$$

$\Updownarrow$ Udtrykket for ${h_B}^2$ indsættes

$$c^2 = a^2 \cancel{- x^2} \cancel{+ x^2} + b^2 + 2 \cdot x \cdot b$$

$\Updownarrow$ Og der ryddes op...

$$\underline{c^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot x \cdot b}$$

Det eneste problem er dog nu, at ’*x*’ ikke er kendt! Vha. de ’gamle’ regneregler for den retvinklede trekant, kan ’*x*’ nemt findes… Se blot på tegningen igen, og betragt specielt trekanten *BCD*. Her gælder:

$$\cos(v) = \frac{\text{Hosliggende Katete}}{\text{Hypotenusen}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\cos(C) = \frac{x}{a}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{x = a \cdot \cos(C)}$$

Men trekant *BCD* er jo kun en hjælpetrekant, som ligger helt uden for den egentlige trekant *ABC*. Og det bemærkes, at der er ”ydersiden” af vinklen *C* - $C_{ydre,\ som\ er\ fundet}$. Det er derimod C_{indre}, som der er brug for.

Det bemærkes at vinklerne C_{ydre} og C_{indre} er supplementvinkler. Og det betyder, at:

$$\boxed{\cos(180° - v) = -\cos(v)}$$

Eller i dette tilfælde:

$$\boxed{\cos(C_{indre}) = -\cos(C_{ydre})}$$

Og nu ikke mere snak om ”indre” og ”ydre”… (Det blev jo kun indført for bedre at kunne forstå problematikken omkring vinkel *C*.) Det ses, at ”C_{indre}” rent faktisk ikke benyttes overhovedet, og derfor kaldes ”C” fremover blot for ”C_{ydre}”.
Altså er:

$$x = a \cdot (-\cos(C))$$

$$\Updownarrow$$

$\underline{x = -a \cdot \cos(C)}$, hvilket indsættes i den forrige udregning...

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot x \cdot b$$

$$\Updownarrow$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot (-a \cdot \cos(C)) \cdot b$$

$\Updownarrow$ Og hvis parentesen hæves, og der ændres lidt på faktorernes rækkefølge ...

$$\underline{\underline{c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(C)}}$$

Det ses, at resultatet er den ene af ligningerne i det, som tidligere blev præsenteret som ”cosinusrelationerne”, men resten kan nemt indses – som det var tilfældet ved sinusrelationen – ved at tegne højden fra enten pkt. A eller pkt. C, og så køre beviset igen. (I princippet, kan man blot nøjes med at ændre navnene på trekantens hjørner og køre beviset igen. Da kan man undlade at ”dreje” hele figuren og tegne nye højder…)

Q.E.D