MATEMATIK

NOTAT

VEKTORER

AF:

CAND. POLYT.

MICHEL MANDIX

SIDSTE REVISION: APRIL 2021

Indholdsfortegnelse:

Øvelsesoversigt:

Eksempeloversigt:

1. Introduktion:

Definition:

Først og fremmest, er det vigtigt at forstå, hvordan vektorer udmærker sig i forhold til andre tal-typer.

Galileo Galilei, som levede mellem 1564 og 1642 – altså på nogenlunde samme tid, som vor egen Kong Christian d. 4., formulerede i sin tid naturvidenskabens opgave på denne måde:

"At måle alt, der kan måles, og at gøre alt det, der ikke kan måles, måleligt."

Det er netop det, som ofte sker i f.eks. matematik, fysik og kemi. Her vil man ofte ende med et resultat – en talværdi, der også kaldes for en **skalar**. Ordet stammer fra det latinske "**scalaris**", der er en størrelse uden retning (eller mere præcist beskrivelsen af trin – enten på en trappe eller en stige – altså noget man kan tælle eller måle), som kan angives alene ved en talværdi. På engelsk har man jo også udtrykket: "Scale", som kan have mange betydninger:

sb. "On a **scale** from 1 to 10." – "På en **skala** fra 1 til 10.") (**Skala som tallinje (måleenhed)**)
sb. "Put it on the **scale**." – "Læg den på **vægten**." (**En vægt (måleinstrument)**)
sb. "WW2 was an operation of an enormous **scale**." – "2. Verdenskrig var en operation af et betydeligt **omfang**." (**Omfang**)
sb. "This map uses a **scale** of 1:100." – "Dette kort har et **målestoksforhold** på 1:100." (**Målestoksforhold**)
sb. "You should rehearse the **scales** on your piano." – "Du skal øve dig på dine **skalaer** på klaveret." (Musiske **tonesekvenser**)
vb. "**Scale** that up by a factor 10." – "**Skalér** dette op 10 gange." (**Forstør/formindsk**)
vb. "He **scaled** the Mount Everest." – "Han **besteg** Mount Everest." (**Bestige/klatre**)

Det ses, at alle disse betydninger alle har noget at gøre med at måle eller at gøre noget trinvist.

Ønsker man imidlertid at beskrive f.eks. Jaguarens bevægelse på Helsingørmotorvejen i et bestemt øjeblik, kræves der både en fart og en retning. Den kan jo både være på vej mod nord (om morgenen) eller på vej mod syd (efter fyraften). Her indføres det matematiske begreb, **vektorer**. Disse er karakteriseret ved både at have en talværdi og en retning. I tilfældet med Jaguaren, kunne længden af vektoren svare til bilens hastighed og retningen er – som nævnt – den geografiske retning på motorvejen.

Definition: Mængden af alle linjestykker med samme længde og samme orientering kaldes en **vektor**. Hvert af disse orienterede linjestykker kaldes en **pil**, og hver pil kaldes en **repræsentant** for vektoren.

I ovenstående definition er det specielt vigtigt at forstå, at når man får opgivet en vektor, så er der i princippet uendeligt mange repræsentanter (pile), som repræsenterer vektoren.

Tegner man to pile (vektorer), der hver har samme retning og samme længde, indses det, at den ene vektor også kunne være fremkommet ved at parallelforskyde den anden.

Pile, der svarer til samme parallelforskydning siges at være ækvivalente.

Nogle begreber:

Her følger en række vendinger og skrivemåder, som anvendes i forbindelse med vektorer:

Længde: Ved længden af en vektor $\vec{a}$ forstås længden af en vilkårlig repræsentant, målt med en given enhed, f.eks. cm.
Længden af vektoren $\vec{a}$ betegnes som: $|\vec{a}|$.
Som det erindres – både fra geometri, trigonometri og analytisk plangeometri, kan en længde ikke være negativ, og skrives derfor i ”numerisk”-parenteser.

Enhedsvektor: En vektor med længden 1 kaldes for en enhedsvektor.

Parallelle vektorer: To vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ kaldes parallelle, hvis de pile, der repræsenterer dem, er parallelle. I så fald skriver man $\vec{a} \parallel \vec{b}$.
Dette gælder egentlig kun ”hældningen” – ikke retningen.
(Se de to næste punkter for klarificering).

Ensrettede vektorer: Er vektorer, der er parallelle og har samme retning.
Det lyder i første omgang mærkværdigt, men det skal ses i relation til det næste udtryk: ”Modsat rettede vektorer”.

Modsat rettede vektorer: Er vektorer, der er parallelle og modsat rettede.

Ortogonale vektorer:
= Vinkelrette vektorer: To vektorer kaldes ortogonale (ses af og til stavet som: ”orthogonale” – men det er en stavefejl på dansk! Det kommer af det engelske ”orthogonal”), hvis de pile, der repræsenterer dem, er orienteret vinkelret på hinanden. I så fald skrives det: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Nulvektoren: Er en vektor, med længde 0, og den betegnes $\vec{o}$. Da $\overrightarrow{AA}$ (en vektor, fra punkt A til punkt A) har længden 0, er $\overrightarrow{AA} = 0$, og kan repræsenteres ved en prik. $\vec{o}$ **tillægges ingen retning**.

Egentlige vektorer: Er alle vektorer, der ikke er (nulvektoren).

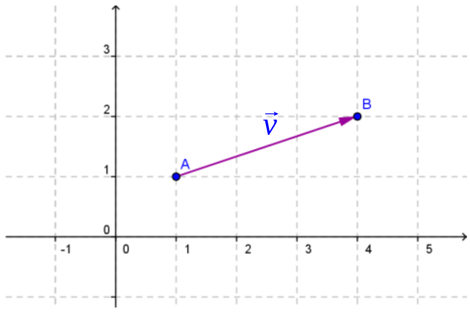
Uegentlig vektor: Er nulvektoren, $\vec{o}$.

Stedvektor: Enhver vektor, som har sit begyndelsespunkt i origo.

En del af disse begreber, bliver beskrevet yderligere i de senere kapitler.

2. Afbildning af vektorer (i et koordinatsystem):

Da vektorer jo – i modsætning til almindelige tal (skalarer) – er forsynet med en retning udover størrelsen (længden), er der også særlige krav til afbildningen af vektorer.



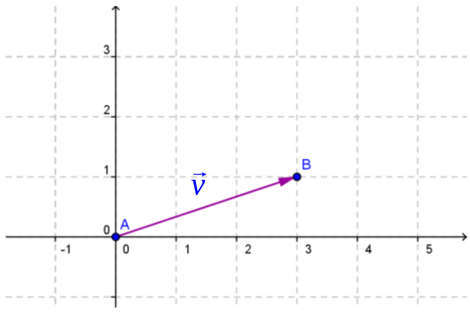
Figur 1: En vektor afbildet i et retvinklet koordinatsystem.

Igen er det vigtigt at huske på, at der er tale om en **repræsentant** for vektoren. Den kan jo egentlig ligge hvor som helst, så længe den har samme længde og retning.

I ovenstående illustration, er indtegnet en vektor, som går fra pkt. *A* til punkt *B*.
Retningen kan ses på selve pilen, og derfor er det meget vigtigt at være omhyggelig med at tegne vektorpilene den rigtige vej.

Da vektoren har sit udgangspunkt i pkt. *A*, siges dette at være vektorens **begyndelsespunkt**. Punkt *B*, hvor vektoren slutter, kaldes for vektorens **pilpunkt**. Disse to begreber er meget vigtige, ligesom det er meget vigtigt at forstå, at begyndelsespunktet og pilpunktet egentlig kun er med til at definere vektorens **længde** og **retning**, og at pilen, som repræsentant for vektoren stadig kan parallelforskydes rundt i hele koordinatsystemet.

Der er et specialtilfælde! Hvis vektorens begyndelsespunkt er beliggende i origo, så betegnes vektoren som en **stedvektor**. I dette tilfælde er vektorens pilpunkt identisk med vektorens koordinater.



Figur 2: En stedvektor med begyndelsespunkt i origo.

Stedvektorer beskrives i detaljer i et senere afsnit.

3. Notation og beregning af vektorer:

Som det allerede ses på figur 1, så er der allerede en del oplysninger, som kan benyttes til at beskrive en vektor.

En vektor beskrives generelt som: $\vec{v}$ – altså vektorens ”navn” med en lille højrepil over. Man kan navngive en vektor med et hvilket som helst navn, men det anbefales da at navngive vektorerne med et kort, fornuftigt og beskrivende navn.

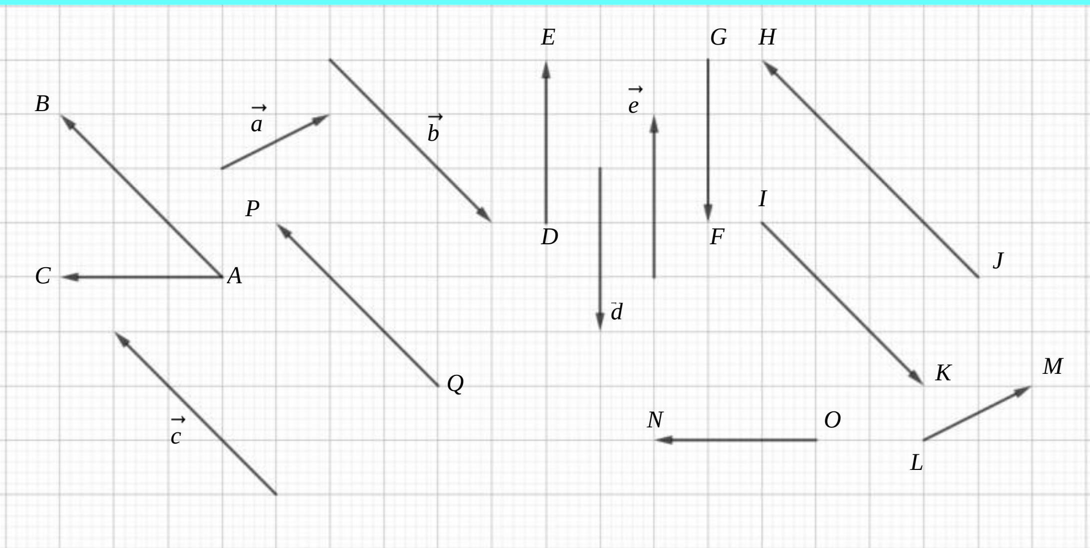
Er vektoren beskrevet som en vektor, der udspringer i punkt *A* og slutter i punkt *B*, kan vektoren betegnes som: $\overrightarrow{AB}$ – altså punkternes navne i rækkefølgen ”fra og til”, skrevet i versaler og med en lille højrepil over.

Som med alle andre matematiske størrelser kan man navngive dem efter behag og kalde dem for hvad som helst. Der opfordres dog til – under normale omstændigheder – at navngive vektorer med små bogstaver med en pil over eller hvis det er en vektor fra et punkt til et andet, som navnene på de to punkter (med store bogstaver, som punkter normalt navngives) med en pil over.

Strengt taget, kan man notere en vektor på stort set uendeligt mange måder, blot man gør læseren opmærksom på, at der er tale om vektorer. Således kan man sagtens opleve at vektorer er angivet på andre måder – en populær metode er at benytte fede bogstaver (boldface skrifttyper). Det er almindeligt – specielt i engelsksproget litteratur. Så det er vigtigt at vide, at pilene er valgfri – både for læseren af dette notat, men også for alle andre – så der ikke er tvivl, hvis man f.eks. læser et notat af udenlandsk oprindelse.

I undervisningen her, foretrækkes (kræves) dog notationen med pile!

Øvelse 3.1:



Ovenstående figur viser en række punkter og vektorrepræsentanter. Afgør ved hjælp af disse, om følgende udsagn er sande: (1 enhed = siden i en tern).

1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{QP}$	2) $\overrightarrow{IK}=\vec{b}$	3) $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$	4) $\overrightarrow{JH}=\overrightarrow{AB}$	5) $\vec{c}=\overrightarrow{QP}$
6) $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{GF}$	7) $\vec{a}=\overrightarrow{LM}$	8) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{ON}$	9) $\vec{d}=\vec{e}$	10) $\vec{c}=\vec{e}$
11) $\overrightarrow{IH}=\vec{e}$	12) $\overrightarrow{KJ}=\overrightarrow{LM}$	13) $\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{QP}$	14) $\overrightarrow{QQ}=\overrightarrow{AB}$	15) $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AC}$

Øvelse 3.2:

Tegn et kvadrat og navngiv vinkelspidserne: *A*, *B*, *C* og *D*.
Til hvert par af vinkelspidser *A* og *B* svarer to vektorer, nemlig $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{BA}$. Hvor mange forskellige vektorer kan på denne måde dannes vha. kvadratets vinkelspidser)?

Øvelse 3.3:

Idet vektorerne ses på figuren i øvelse 3.1, skal det i hver af nedenstående udsagn angives, hvilket eller hvilke af symbolerne " $\|$ " (parallel), " $\perp$ " (ortogonal), " $=$ " (lig med) og " $|\;|$ " (længde), der gør udsagnet sandt. (Der kan være flere rigtige svar til hvert spørgsmål).

1) $\vec{d}\quad \vec{e}$	2) $\overrightarrow{QP}\quad \overrightarrow{AB}$	3) $\overrightarrow{ON}\quad \vec{e}$	4) $\overrightarrow{ON}\quad \overrightarrow{DE}$	5) $\overrightarrow{DE}\quad \overrightarrow{AC}$
6) $\overrightarrow{JH}\quad \overrightarrow{IK}$	7) $\overrightarrow{PF}\quad \overrightarrow{EG}$	8) $\overrightarrow{HI}\quad \overrightarrow{ON}$	9) $\overrightarrow{PB}\quad \overrightarrow{AQ}$	10) $\overrightarrow{AA}\quad \overrightarrow{EE}$

Koordinater:

Indtil videre har alle de vektorer, som har været beskrevet, været angivet som pile, der har vist retning og længde.

Ofte er vektorer dog angivet ved et sæt koordinater, som beskriver vektoren.
Dette kan gøres på to måder – rektangulære koordinater eller polære koordinater, og begge måder vil blive beskrevet i det følgende.
Uanset hvilken koordinattype der anvendes, vil dette indirekte også resultere i en retning og en længde.

Rektangulære koordinater:

En vektor skrives med rektangulære koordinater som: $\vec{a}=\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}$, hvor Δx er vektorens tilvækst langs *x*-aksen, og hvor Δy er vektorens tilvækst langs *y*-aksen. Bemærk retninger! Som allerede nævnt betegnes en tilvækst langs *x*-aksen som positiv, hvis Δx er positiv (mod højre) og som negativ, hvis Δx er negativ (mod venstre) – ligesom en tilvækst langs *y*-aksen betegnes som positiv, hvis Δy er positiv (opad) og som negativ, hvis Δy er negativ (nedad).

Det vil altså sige, at man kan betragte vektorens koordinater, som relative koordinater i forhold til vektorens begyndelsespunkt. Antages det, at der arbejdes i et normalt, kartesisk koordinatsystem, vil Δx regnes positiv, såfremt vektorens pilpunkt er beliggende til højre for vektorens begyndelsespunkt og negativ hvis pilpunktet er beliggende til venstre for begyndelsespunktet. På samme måde kan Δy regnes positiv, såfremt vektorens pilpunkt er beliggende over vektorens begyndelsespunkt.
Skrivemåden for en vektors rektangulære koordinater introduceres for at undgå forvekslinger med punktkoordinater (i planet), der noteres som $(x;y)=(x_0;y_0)$.

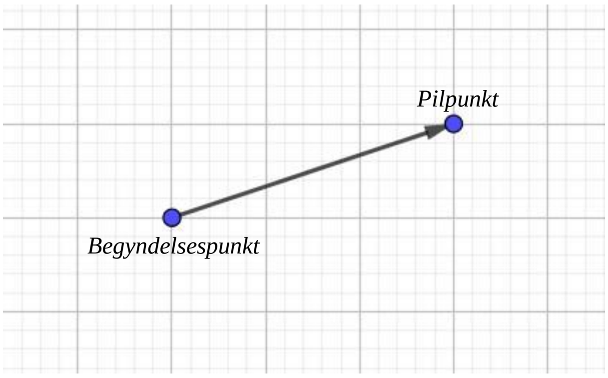
Således regnes det normalt for en fejl, såfremt man noterer en vektors koordinater som: $(\Delta x;\Delta y)$.

Symbolet for et rektangulært vektorkoordinat læses: ”v_x , (komma) v_y ”.

Så hvis der tages udgangspunkt i figur 3, så kan denne vektor noteres som: $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, da man fra punkt *A* (vektorens begyndelsespunkt) skal 3 enheder til højre (positiv retning) hen ad *x*-aksen og 1 enhed op (positiv retning) ad *y*-aksen, for at komme til punkt *B* (vektorens pilpunkt).

Man siger også, at dette er vektorens **vektorkoordinater**.

Sagt på en anden måde: Hvis man afsætter et vilkårligt punkt i et koordinatsystem og kalder det for en vektors **begyndelsespunkt**, så er **vektorkoordinaterne** den afstand man skal gå hhv. vandret og lodret, for at kunne afsætte **pilpunktet**.



Figur 3: Begyndelsespunkt og pilpunkt.

Stedvektorer:

Hvis en vektor har sit begyndelsespunkt i origo, kaldes denne vektor for en stedvektor.
Det vil sige, at vektorens vektorkoordinater er lig med dens pilpunkt. Da man frit kan flytte repræsentanterne for en vektor rundt som man lyster, kan enhver vektor placeres således. Det vil senere vise sig at være meget praktisk at regne med stedvektorer.

Dette kan stilles op som en ligning. Dette viser sig i øvrigt af være en kæmpe fordel senere, idet én vektorligning kan opdeles i to separate regnskaber – et *x*-regnskab og et *y*-regnskab.

$$Pilpunkt = Begyndelsespunkt + vektorkoordinater$$

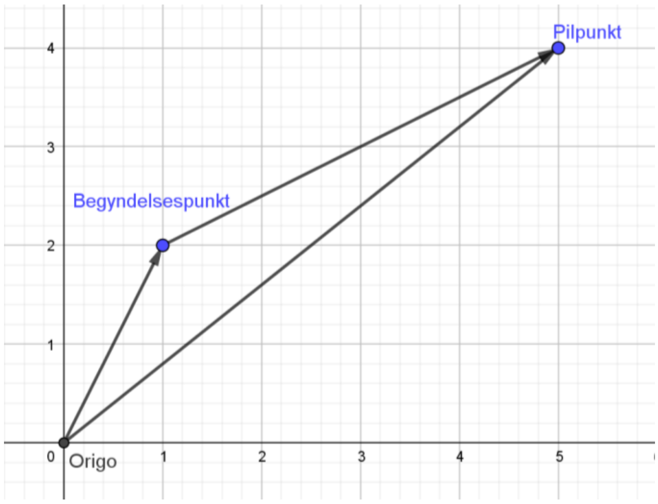
$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix}Pil_x\\Pil_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Beg._x\\Beg._y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v_x\\v_y\end{pmatrix}: \qquad \begin{cases}Pil_x=Beg._x+v_x\\Pil_y=Beg._y+v_y\end{cases}$$

Her er der et lille teoretisk notationsproblem. Som tidligere nævnt, skelnes der mellem punktkoordinater og vektorkoordinater. De kan ikke umiddelbart skrives i samme udtryk, (som gjort ovenfor), men her gøres brug af det faktum, at enhver vektor kan forskydes efter behag, så længe længde og vinkel bevares.

Så matematisk teknisk, forestiller man sig, at de to nævnte punkter (begyndelsespunktet og pilpunktet), ikke er punkter, men i stedet pilpunkter (eller vektorkoordinater) for to stedvektorer, som går fra origo (nødvendigvis) og så ud til de to omtalte punkter. Derved kan punkterne stilles på samme form som vektorkoordinaterne, og det hele passer sammen.

Emnet: "Vektoraddition" gennemgås i et af de følgende afsnit.



Figur 4: Begyndelsespunkt og pilpunkt "erstattet" af stedvektorer.

$$\begin{pmatrix} Pil_x \\ Pil_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Beg._x \\ Beg._y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} Beg._x \\ Beg._y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Pil_x \\ Pil_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Pil_x \\ Pil_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Beg._x \\ Beg._y \end{pmatrix}$$

Så uanset hvilke to oplysninger man kender om en vektor, så kan man udregne den sidste vha. ovenstående ligning.

Eksempel 3.1:

I et koordinatsystem er givet punkterne: $A(3;2)$ og $B(-1;-3)$.

Bestem koordinaterne til vektor $\overrightarrow{AB}$.

Når man regner med vektorer til daglig, tænker man måske blot, at vektoren udspringer i begyndelsespunktet og ”havner” i pilpunktet, som er vektorkoordinaterne ”væk” fra begyndelsespunktet. Det er tilladt at tænke, som en huskeregel, men hvis dette regnestykke skal gå op, så kan man jo ikke trække to punktkoordinater fra hinanden og få et vektorkoordinat ud af det. Så i virkeligheden, forestiller man sig, at der går en stedvektor (indlysende nok) fra origo og ud til begyndelsespunktet og en anden stedvektor går ud til pilpunktet. Derved bliver begyndelsespunktet og pilpunktet ”omdannet” til vektorkoordinater, som man så kan trække fra hinanden, hvilket vil resultere i differensen mellem de to punkter, hvilket jo må være selve vektoren. Derved er regnestykket helt i orden.

I et senere afsnit diskuteres vektorsubtraktion, som egentlig er det værktøj, som benyttes her. Indtil videre accepteres ligningerne på forrige side, så resultatet giver:

$$Pilpunkt = Begyndelsespunkt + vektorkoordinater$$

$$\Updownarrow$$

$$vektorkoordinater = Pilpunkt - Begyndelsespunkt$$

$$\Updownarrow$$

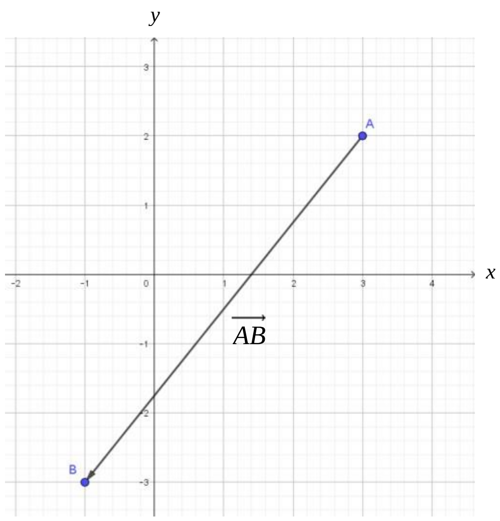
$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Pil_x \\ Pil_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Beg._x \\ Beg._y \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-3 \\ -3-2 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}}}$$



Det ses tydeligt på skitsen, at $\overrightarrow{AB}$ går fra højre mod venstre og nedad. Ser man desuden på koordinaterne, bevæger man sig -4 langs x-aksen og -5 langs y-aksen. Der er altså grund til at tro, at udregningen er foretaget korrekt.

Eksempel 3.2:

Givet vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

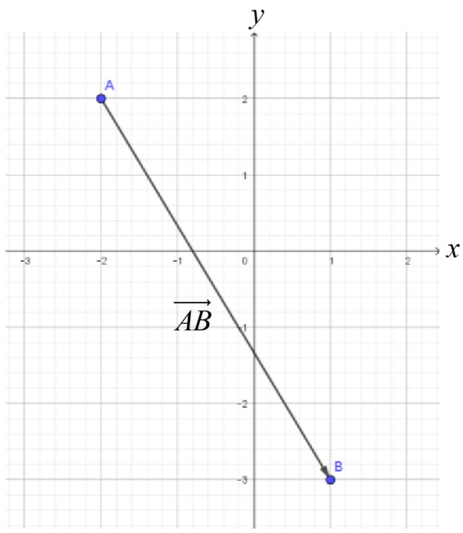
Vektor $\overrightarrow{AB}$ ønskes indlagt i et koordinatsystem med begyndelsespunkt i $A(-2;2)$.

Bestem koordinaterne til pilpunktet *B*.

Fuldstændig analogt til sidste eksempel. Når man regner med vektorer til daglig, tænker man måske blot, at vektoren udspringer i begyndelsespunktet og "havner" i pilpunktet, som er vektorkoordinaterne "væk" fra begyndelsespunktet. Det er tilladt at tænke, som en huskeregel, men hvis regnestykket skal gå op, så kan man jo ikke lægge et vektorkoordinat sammen med et punktkoordinat! Så i virkeligheden, forestiller man sig, at der går en stedvektor (indlysende nok) fra origo og ud til begyndelsespunktet. Derved bliver begyndelsespunktet "omdannet" til et vektorkoordinat, som man så kan lægge sammen med selve vektorens vektorkoordinat. Derved er regnestykket helt i orden.

I et senere afsnit diskuteres vektoraddition, som egentlig er det værktøj, som benyttes her. Indtil videre accepteres ligningerne på forrige side, så resultatet giver:

$$Pilpunkt = Begyndelsespunkt + vektorkoordinater$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{pmatrix} Pil_x \\ Pil_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Beg._x \\ Beg._y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{pmatrix} Pil_x \\ Pil_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 \\ 2+(-5) \end{pmatrix}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} Pil_x \\ Pil_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}}}$$



Eksempel 3.3 (som på figur 1):

Givet vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Begyndelsespunkt: $(x;y) = (2\,;1)$. **Bestem pilpunktet.**

$$Pilpunkt = Begyndelsespunkt + vektorkoordinater$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{pmatrix} Pil_x \\ Pil_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Beg._x \\ Beg._y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{pmatrix} Pil_x \\ Pil_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+4 \\ 1+2 \end{pmatrix}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\begin{pmatrix} Pil_x \\ Pil_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

Dvs. at pilpunktet ligger i: $(x;y) = (6\,;3)$

Eksempel 3.4 (uafhængigt af figur 1):

Givet vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$. Pilpunkt: $(x;y) = (4\,;-3)$.

Bestem begyndelsespunktet.

$$Pilpunkt = Begyndelsespunkt + vektorkoordinater$$
$$\Updownarrow$$
$$Begyndelsespunkt = Pilpunkt - vektorkoordinater$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{pmatrix} Beg._x \\ Beg._y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Pil_x \\ Pil_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{pmatrix} Beg._x \\ Beg._y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-5 \\ -3-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-5 \\ -3+2 \end{pmatrix}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\begin{pmatrix} Beg._x \\ Beg._y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Dvs. at begyndelsespunktet ligger i: $(x;y) = (-1\,;-1)$

Eksempel 3.5 (uafhængigt af figur 1):

Givet begyndelsespunkt: $(x;y)=(-2;4)$ og pilpunkt: $(x;y)=(-6;-5)$.

Bestem vektorkoordinatet.

$$Pilpunkt = Begyndelsespunkt + vektorkoordinater$$
$$\Updownarrow$$
$$vektorkoordinater = Pilpunkt - Begyndelsespunkt$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Pil_x \\ Pil_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Beg._x \\ Beg._y \end{pmatrix}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6-(-2) \\ -5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+2 \\ -5-4 \end{pmatrix}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -9 \end{pmatrix}}}$$

Øvelse 3.4:

Givet seks vektorers begyndelses- og pilpunkt. Bestem ved udregning de seks vektorers vektorkoordinater.

1) $\vec{a}$ går fra $A(-3;-4)$ til $B(-5;2)$	4) $\vec{d}$ går fra $G(-2;-3)$ til $H(4;1)$
2) $\vec{b}$ går fra $C(-1;3)$ til $D(-3;1)$	5) $\vec{e}$ går fra $I(-4;4)$ til $J(3;4)$
3) $\vec{c}$ går fra $E(-1;1)$ til $F(6;-1)$	6) $\vec{f}$ går fra $K(8;2)$ til $B(8;-1)$

Øvelse 3.5:

Givet seks vektorers begyndelsespunkt og vektorkoordinat. Bestem ved udregning de seks vektorers pilpunkter.

1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}$ & $A_{Begynd} = (4;6)$	4) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ & $D_{Begynd} = (-5;-2)$
2) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}$ & $B_{Begynd} = (6;4)$	5) $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ & $E_{Begynd} = (3;3)$
3) $\vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ & $C_{Begynd} = (3;-3)$	6) $\vec{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ & $F_{Begynd} = (-1;7)$

Øvelse 3.6:

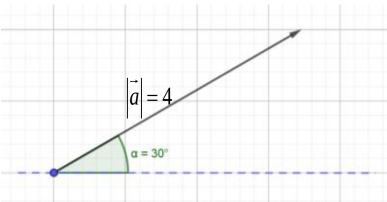
Givet seks vektorers pilpunkt og vektorkoordinat. Bestem ved udregning de seks vektorers begyndelsespunkter.

1) $\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}$ & $A_{Pil}=(4;4)$	4) $\vec{d}=\begin{pmatrix}-9\\0\end{pmatrix}$ & $D_{Pil}=(-4;3)$
2) $\vec{b}=\begin{pmatrix}-5\\-5\end{pmatrix}$ & $B_{Pil}=(-3;-1)$	5) $\vec{e}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ & $E_{Pil}=(0;1)$
3) $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ & $C_{Pil}=(7;-1)$	6) $\vec{f}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ & $F_{Pil}=(-1;8)$

Polære koordinater:

Skrives vektoren med **polære koordinater**, noteres det: $\vec{a}=\left(|\vec{a}|;v\right)$, hvor $|\vec{a}|$ er vektorens længde og v er vektorens vinkel mod vandret. Se figur 5.

Således vil en vektor med notationen: $\vec{a}=(4;30°)$, kunne tegnes f.eks. som følgende:



Figur 5: En vektor givet ved polære koordinater.

En vektor, som er opskrevet med polære koordinater, kan altid omskrives til en vektor med rektangulære koordinater.

Tænk over det! Denne situation er velkendt. Hvis nu vektorens længde var 1, så var det jo blot en radius i enhedscirklen. Dermed ville retningspunktet P være lig med koordinaterne:

$$P=\left(\cos(v);\sin(v)\right),$$

men da det er de færreste vektorer, som har længden 1 (de kaldes i øvrigt for enhedsvektorer), så griber man til den velkendte ligning på side 114 i bogen: "Reglen om ensvinklede trekanter", og finder ud af, at punktet P kan findes for en vilkårlig trekant ved at multiplicere koordinaterne med længden på trekantens hypotenuse.

$$\vec{a}_{polær}=\left(|\vec{a}|;v\right)$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{\vec{a}_{rektangulær}=\left(|\vec{a}|\cdot\cos(v);\ |\vec{a}|\cdot\sin(v)\right)}}$$

Eksempel 3.6:

En vektor, $\vec{a}$, har længden 3 og danner en vinkel på 34° med *x*-aksen.

Vektoren kan umiddelbart skrives på polær form:

$$\underline{\underline{\vec{a} = (\ 3\ ;\ 34°\ )}}$$

Husk, at den positive omløbsretning er mod urets retning!

Omregning mellem polære koordinater og rektangulære koordinater:

Som allerede beskrevet, så er sammenhængen mellem de polære koordinater og de rektangulære koordinater givet ved definitionen af sinus og cosinus i enhedscirklen, kombineret med reglen om de ensvinklede trekanter.

Derfor omskrives de polære koordinater relativt nemt til rektangulære koordinater ved hjælp af den følgende formel:

$$\vec{a}_{polær} = \left(\left|\vec{a}\right|;v\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{\vec{a}_{rektangulær} = \left|\vec{a}\right| \cdot \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left|\vec{a}\right| \cdot \cos(v) \\ \left|\vec{a}\right| \cdot \sin(v) \end{pmatrix}}}$$

Eksempel 3.7:

En vektor, $\vec{b}$, har længden 3 og danner en vinkel på 34° med *x*-aksen.

$$\vec{b}_{polær} = \left(\left|\vec{b}\right|;v\right) = (\ 3\ ;\ 34°\ )$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{\vec{b}_{rektangulær} = \left|\vec{b}\right| \cdot \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos(34°) \\ 3 \cdot \sin(34°) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2,49 \\ 1,68 \end{pmatrix}}}$$

Eksempel 3.8:

En vektor, $\vec{c}$, har længden 10 og danner en vinkel på 125° med *x*-aksen.

$$\vec{c}_{polær} = \left(\left|\vec{c}\right|;v\right) = (\ 10\ ;\ 125°\ )$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{\vec{c}_{rektangulær} = \left|\vec{c}\right| \cdot \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \cdot \cos(125°) \\ 10 \cdot \sin(125°) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -5,74 \\ 8,19 \end{pmatrix}}}$$

Øvelse 3.7: Omskriv følgende vektorer, givet ved polære koordinater til rektangulære koordinater.		
1) $\vec{a}=(2;60°)$	2) $\vec{b}=(26;81,45°)$	3) $\vec{c}=(4;210,70°)$

Omregning mellem rektangulære koordinater og polære koordinater:

Det er en anelse mere kompliceret at omregne et rektangulært vektorkoordinat til et polært vektorkoordinat. Her ligger problemet primært i, at en vektor har en retning. Fra tidligere, er det givet at har man to punkter eller en retning, så kan vinklen nemt findes ved at bruge følgende sammenhæng:

$$a=\alpha=\frac{y_2+y_1}{x_2-x_1}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{Rise}{Run}=\frac{Modstående\,katete}{Hosliggende\,katete}=\frac{\sin(v)}{\cos(v)}=\tan(v)$$

Men da en vektor jo ikke bare er en ret linje, men et linjestykke med en retning, så er det jo ikke ligegyldigt om der f.eks. er tale om en hældning på 45° eller en hældning på 225°. De to vinkler ligger på præcis den diametralt modsatte side i en enhedscirkel. Det bemærkes, at

$\tan(45°)=\tan(225°)=1$. Det vil igen sige, at denne tangens-værdi vil være rigtig for to modsat rettede vektorer, nemlig $\vec{v}=(1;45°)=\begin{pmatrix}1\cdot\cos(45°)\\1\cdot\sin(45°)\end{pmatrix}$ og for $\vec{v}=(1;225°)=\begin{pmatrix}1\cdot\cos(225°)\\1\cdot\sin(225°)\end{pmatrix}$.

Grunden til at dette er korrekt er jo, at $\frac{\sin(v)}{\cos(v)}=\tan(v)$, men det gælder både

$\frac{\sin(45°)}{\cos(45°)}=\tan(45°)$ og for $\frac{\sin(225°)}{\cos(225°)}=\tan(225°)$, og derfor kan man ikke anvende tangens og nå frem til en entydig løsning. Imidlertid er kombinationen af sinus og cosinus derimod retvisende i forhold til retningen. Det vises ved følgende eksempel:

Eksempel 3.9:

En vektor, $\vec{a}$ (og $\vec{b}$, $\vec{c}$ og $\vec{d}$), har (alle) længden: $|\vec{a}|=\sqrt{{a_x}^2+{a_y}^2}$.

Af denne oplysning kan vinklen findes, idet: $v=\arctan\left(\frac{a_y}{a_x}\right)$.

Lad $\vec{a}=\begin{pmatrix}9\\4\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-9\\4\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}-9\\-4\end{pmatrix}$ og $\vec{d}=\begin{pmatrix}-9\\4\end{pmatrix}$ være fire forskellige vektorer.

Vektorernes vinkler mod vandret ses at være parvis ens: $v_{\vec{a}}=\arctan\left(\frac{4}{9}\right)$ og

$v_{\vec{c}}=\arctan\left(\frac{-4}{-9}\right)=\arctan\left(\frac{4}{9}\right)$ og $v_{\vec{b}}=\arctan\left(\frac{4}{-9}\right)$ og $v_{\vec{d}}=\arctan\left(\frac{-4}{9}\right)=\arctan\left(\frac{4}{-9}\right)$, selvom det samtidigt er åbenlyst, at vektor $\vec{a}$ og vektor $\vec{c}$ er modsat rettede (og ligeledes med vektor $\vec{b}$ og vektor $\vec{d}$) – og det kan siges, at de parvis er drejet 180° i forhold til hinanden.

Men $\tan(v)=\dfrac{\sin(v)}{\cos(v)}$, og kombinationen af sinus og cosinus vil give et entydigt resultat.

Deraf kan følgende skema udledes og anvendes:

	Fortegn			
a_x	+	–	–	+
a_y	+	+	–	–
Vinkel	v	v + 180°	v + 180°	v + 360°

Indsættes værdierne fra eksemplet fås:

Vektor givet i rektangulære koordinater	Vektorens længde	Vinkel (Husk "Deg" på lommeregneren)	Effektiv vinkel – baseret på vektorkoordinaternes fortegn	Vektor givet i rektangulære koordinater
$\vec{a}=\begin{pmatrix}9\\4\end{pmatrix}\begin{matrix}+\\+\end{matrix}$	$\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{9^2+4^2}=\sqrt{81+16}=\underline{\sqrt{97}}$	$v_{\vec{a}}=\arctan\left(\frac{a_y}{a_x}\right)=\arctan\left(\frac{4}{9}\right)=\underline{23{,}94°}$	$v_{total_{\vec{a}}}=v_{\vec{a}}=\underline{23{,}94°}$	$\vec{a}=\left(\sqrt{97};23{,}94°\right)$
$\vec{b}=\begin{pmatrix}-9\\4\end{pmatrix}\begin{matrix}-\\+\end{matrix}$	$\lvert\vec{b}\rvert=\sqrt{b_x^2+b_y^2}=\sqrt{(-9)^2+4^2}=\sqrt{81+16}=\underline{\sqrt{97}}$	$v_{\vec{b}}=\arctan\left(\frac{b_y}{b_x}\right)=\arctan\left(\frac{4}{-9}\right)=\underline{-23{,}94°}$	$v_{total_{\vec{b}}}=v_{\vec{b}}+180°=-23{,}94°+180°=\underline{156{,}04°}$	$\vec{b}=\left(\sqrt{97};156{,}04°\right)$
$\vec{c}=\begin{pmatrix}-9\\-4\end{pmatrix}\begin{matrix}-\\-\end{matrix}$	$\lvert\vec{c}\rvert=\sqrt{c_x^2+c_y^2}=\sqrt{(-9)^2+(-4)^2}=\sqrt{81+16}=\underline{\sqrt{97}}$	$v_{\vec{c}}=\arctan\left(\frac{c_y}{c_x}\right)=\arctan\left(\frac{-4}{-9}\right)=\underline{23{,}94°}$	$v_{total_{\vec{c}}}=v_{\vec{c}}+180°=23{,}94°+180°=\underline{203{,}94°}$	$\vec{c}=\left(\sqrt{97};203{,}94°\right)$
$\vec{d}=\begin{pmatrix}9\\-4\end{pmatrix}\begin{matrix}+\\-\end{matrix}$	$\lvert\vec{d}\rvert=\sqrt{d_x^2+d_y^2}=\sqrt{9^2+(-4)^2}=\sqrt{81+16}=\underline{\sqrt{97}}$	$v_{\vec{d}}=\arctan\left(\frac{d_y}{d_x}\right)=\arctan\left(\frac{-4}{9}\right)=\underline{-23{,}94°}$	$v_{total_{\vec{d}}}=v_{\vec{d}}+360°=-23{,}94°+360°=\underline{336{,}04°}$	$\vec{d}=\left(\sqrt{97};336{,}04°\right)$

Bemærk, at det faktisk er fire forskellige eksempler. De fire forskellige vektorer er blot taget med alle sammen for at illustrere forskellene i vinklerne.

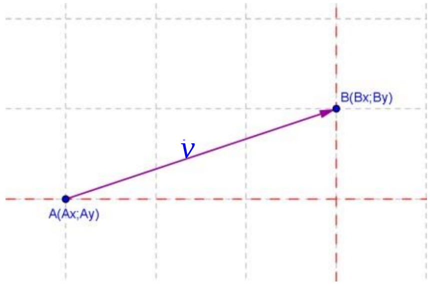
Øvelse 3.8:

Omskriv følgende vektorer, givet ved rektangulære koordinater til polære koordinater.

1) $\vec{a}=\begin{pmatrix}-5\\12\end{pmatrix}$	2) $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$	3) $\vec{c}=\begin{pmatrix}23\\11\end{pmatrix}$	4) $\vec{d}=\begin{pmatrix}-8\\-6\end{pmatrix}$

4. Længde af vektorer:

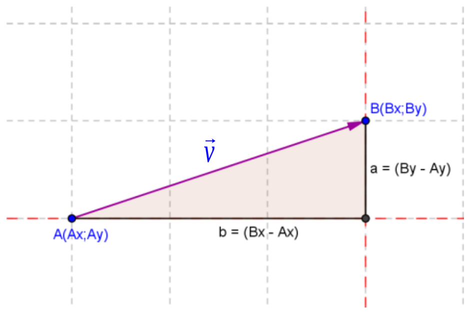
Som det allerede ses på figur 1, så er der allerede en del oplysninger, som kan benyttes, når længden af en vektor skal udregnes.



Figur 6: Der er indtegnet linjer gennem punkterne, som er parallelle med akserne i koordinatsystemet.

En hvilken som helst vektor kan tænkes indlagt i et retvinklet koordinatsystem. Tænk evt. tilbage til kapitlet om "Analytisk Plangeometri". Betragter man vektorens begyndelses- og pilpunkt, kan man indtegne linjer, som er parallelle med akserne. (Se fig. 6)

Derved fremkommer der en retvinklet trekant, som dannes af de linjer, som går igennem punkterne. *A* og *B*, og som er parallelle med linjerne (kateterne i den retvinklede trekant), og selve vektoren (hypotenusen i den retvinklede trekant). (Se figur 7)



Figur 7: Vektoren indlagt som hypotenusen i en retvinklet trekant.

Pythagoras' læresætning giver, at:

$$hypotenusen^2 = katete_1{}^2 + katete_2{}^2$$

Omskrevet til dette specifikke problem, fås:

$$(Vektorens\ længde)^2 = a^2 + b^2$$

$$\Updownarrow$$

$$|\vec{v}|^2 = (B_x - A_x)^2 + (B_y - A_y)^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{|\vec{v}| = \sqrt{(B_x - A_x)^2 + (B_y - A_y)^2}}}$$

Eksempel 4.1:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{\left|\vec{a}\right| = 5}}$$

Eksempel 4.2:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{\left|\vec{b}\right| = 2\sqrt{5} \approx 4,47}}$$

Bemærk, at der altid søges det eksakte svar!

I dette tilfælde er det eksakte svar lig med $\left|\vec{b}\right| = 2\sqrt{5}$, men det er ofte - af overskuelighedsmæssige årsager - godt at vise resultatet afrundet på decimalform også – altså som her: $\approx 4,47$.

Eksempel 4.3:

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,13 \\ -2,94 \end{pmatrix}$$

$$\left|\vec{c}\right| = \sqrt{1,13^2 + (-2,94)^2} = \sqrt{1,2769 + 8,6436} = \sqrt{9,9205}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{\left|\vec{c}\right| = 3,15}}$$

Hvis tallene i opgaven i forvejen er opgivet i decimaltal, så vil det ikke gå ud over præcisionen at returnere svaret i decimaltal. Som tommelfingerregel kan man anvende lige så mange decimaler i svaret, som tallene i opgaven var givet med. Ligeledes kan værdierne i mellemregningerne som standard anføres med fire decimaler.

Eksempel 4.4:

$$D=(D_x;D_y)=(1;-6) \text{ og } E=(E_x;E_y)=(3;-2)$$

$$|\overrightarrow{DE}|=\sqrt{(E_x-D_x)^2+(E_y-D_y)^2}=\sqrt{(3-1)^2+(-2-(-6))^2}=\sqrt{2^2+(-2+6)^2}$$
$$\Updownarrow$$
$$|\overrightarrow{DE}|=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$$
$$\Updownarrow$$
$$|\overrightarrow{DE}|=2\sqrt{5}\approx 4,47$$

Vær opmærksom på negative koordinater! Det er den hyppigste årsag til fejl!
Lav hellere en mellemregning for meget, for at få overblik over de negative tal! Vær også meget opmærksom på, hvad der er vektorens begyndelsespunkt og vektorens pilpunkt. Husk, at det er ("pilpunkt" − "begyndelsespunkt").

Øvelse 4.1:

Bestem ved hjælp af **figuren til øvelse 3.1**, følgende længder:

1) $\lvert\overrightarrow{AC}\rvert$	2) $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	3) $\lvert\vec{c}\rvert$	4) $\lvert\overrightarrow{DE}\rvert$
5) $\lvert\vec{e}\rvert$	6) $\lvert\overrightarrow{JH}\rvert$	7) $\lvert\overrightarrow{LM}\rvert$	8) $\lvert\overrightarrow{EI}\rvert$

Øvelse 4.2:

En trekant har vinkelspidserne: $A=(-1;1)$, $B=(2;4)$ og $C=(3;1)$.

1) Tegn trekanten
2) Udregn derefter koordinaterne til vektorerne: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ og $\overrightarrow{CA}$.
3) Udregn til sidst længderne af trekantens sidelængder.

Øvelse 4.3:

Bestem ved udregning, længden af vektoren: $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 4 \end{pmatrix}$

Øvelse 4.4:

Givet vektoren: $\vec{b}=\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix}$

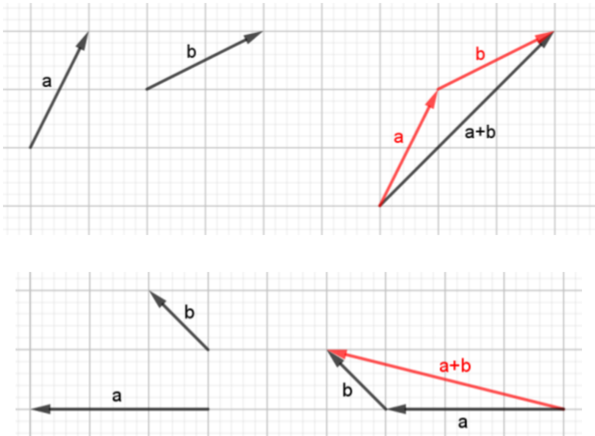
Bestem, ved udregning, tallet x således at $|\vec{b}|=5$.

5. Vektoraddition:

Den kommutative lov for vektoraddition:
Ser man på ”kræfternes parallelogram”, kan man indse den **kommutative lov for vektoraddition**:

$$\boxed{\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}},$$

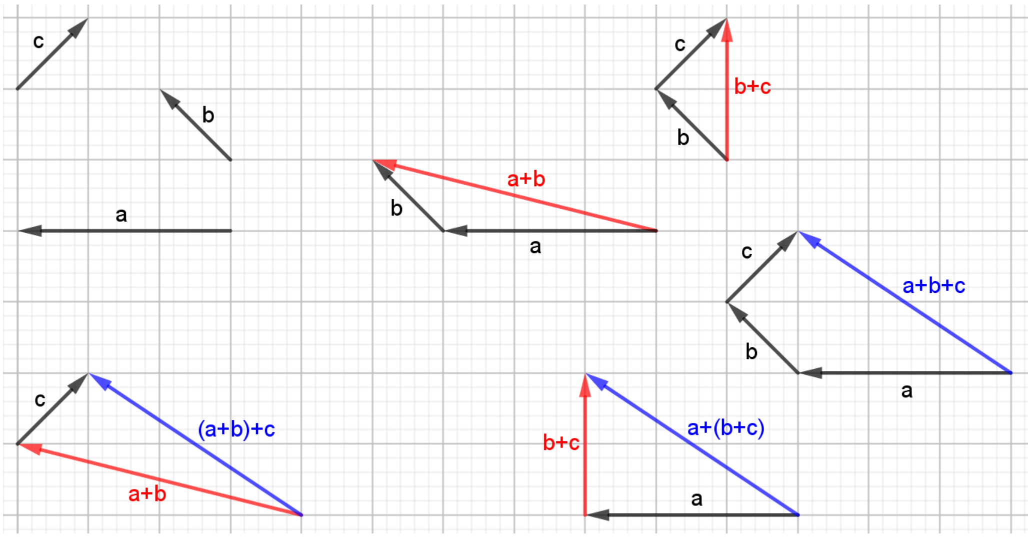
da det jo åbenlyst er ligegyldigt, om man går $\vec{a}$ eller $\vec{b}$ først, og så modsat bagefter. I begge tilfælde vil man ende i det samme punkt.



Figur 8: Ovenstående viser at $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{c}$.

Den associative lov for vektoraddition:
Indfører man for eksemplets skyld endnu en vektor, $\vec{c}$, kan man på samme måde indse den **associative lov for vektoraddition**:

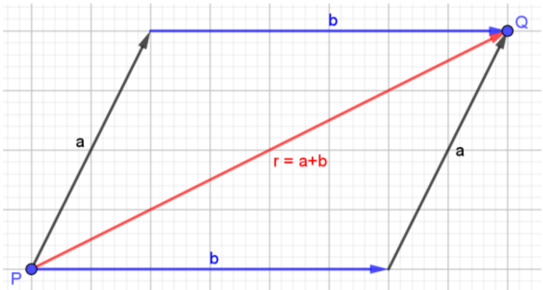
$$\boxed{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)}$$



Figur 9: Ovenstående viser at $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$ er lig med $\left(\vec{b}+\vec{c}\right)+\vec{a}$ (som er lig med $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$).

Hvad er vektoraddition så i virkeligheden?

Måske er ”kræfternes parallelogram” kendt fra fysikundervisningen. Kræfternes parallelogram siger i al sin enkelthed, at hvis man har et objekt der er påvirket af to kræfter, så er det ligegyldigt om objektet bliver påvirket af den ene eller den anden kraft først.



Figur 10: Kræfternes parallelogram

Ser man på figur 10, er det indlysende, at man kan komme fra punkt *P* til punkt *Q* ved at følge den sorte vektor $\vec{a}$ og derefter den blå vektor $\vec{b}$.

I og med at det er et parallelogram, er de to skrå, sorte vektorer – begge navngivet $\vec{a}$ tydeligvis identiske i forhold til vinkel og længde, ligesom de to blå, vandrette vektorer – begge navngivet $\vec{b}$ også er identiske – eller som man siger om vektorer, så er de **ækvivalente**.

Da ser man, at det også er muligt at komme fra punkt *P* til punkt *Q* ved først at følge den blå vektor $\vec{b}$ og derefter den sorte vektor $\vec{a}$.

Uanset hvilken vej man følger, har man ”gået” lige langt, og i begge tilfælde også lige langt i de to retninger. Følgelig havner man i det samme punkt *Q*.

Man kunne have sparet en del besvær, ved at gå direkte fra punkt *P* til punkt *Q*. Den direkte vej kan opnås ved at lægge den sorte vektor $\vec{a}$ og den blå vektor $\vec{b}$ sammen. Summen af de to vektorer kaldes **resultanten**.

Så grafisk foregår additionen af de to vektorer ved at lægge de to vektorer i forlængelse af hinanden, således at man lægger vektor $\vec{b}$'s begyndelsespunkt i det samme punkt som vektor $\vec{a}$'s pilpunkt.

Netop ved at se på kræfternes parallelogram, er det tydeligt, at den kommutative regel for vektoraddition gælder. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$. I begge tilfælde havner man i punkt *Q*.

Eksempel 5.1:

Har man givet to (eller flere) vektorer med rektangulære koordinater, lægges de sammen på følgende måde:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{b}=\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_x+b_x\\a_y+b_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+(-2)\\(-1)+4\end{pmatrix}\Leftrightarrow \underline{\underline{\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}}}$$

Sætning:

Lad $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ være vektorer, $\vec{o}$ være nul-vektoren og lad s og t være tal.

Da gælder:

1) $\vec{a}+\vec{o}=\vec{a}$
2) $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{o}$
3) $\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$ **(Den associative lov for vektoraddition)**
4) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ **(Den kommutative lov for vektoraddition)**

Bevis for regel 3):

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix} \text{ og } \vec{c}=\begin{pmatrix}c_x\\c_y\end{pmatrix}.$$

$$\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_x+c_x\\b_y+c_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_x+b_x+c_x\\a_y+b_y+c_y\end{pmatrix}$$

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\begin{pmatrix}a_x+b_x\\a_y+b_y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_x\\c_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_x+b_x+c_x\\a_y+b_y+c_y\end{pmatrix}$$

Q.E.D.

Øvelse 5.1:

Bevis de øvrige regneregler i ovenstående sætning.

Øvelse 5.2:

Givet tre vektorer: $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}$ og $\vec{c}=\begin{pmatrix}c_x\\c_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$.

1) Bestem vektorkoordinaterne til resultanten: $\vec{r}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.
2) Bestem længden af $\vec{r}$.

6. Ligevægt:

For at drage en parallel til fysikkens verden, kan man betragte en lommeregner (en HP'er, naturligvis), som ligger på et bord. Hvis den bevæger sig, er der flere muligheder:

- Der er en person, som skubber til den eller løfter den. (Mest sandsynligt).
- Der er et jordskælv i gang.
- En gravko er ved en fejltagelse kommet til at køre ind i huset.
- (Mest gældende for USA:) En flyvemaskine har ramt huset.
- Der er en (lidt for) aktiv poltergejst, som ikke er blevet uddrevet endnu.
  (Hvis det er en Texas Instruments Lommeregner giver det sig selv! – Der er grænser for, hvad selv poltergejsts og spøgelser bør finde sig i.)
- Eller en anden arbitrær årsag.

Under alle omstændigheder (måske på nær den med poltergejsten), er bevægelsen af lommeregneren et resultat af, at den er blevet påvirket af en eller flere kræfter, der tilsammen har kunnet overvinde tyngdekraften og gnidningskraften mellem lommeregneren og bordet. Med andre ord: Summen af kræfterne (eller resultanten) har medført en kraft, som er stor nok til at kunne overvinde de påvirkninger, som ellers ville gøre at lommeregneren lå stille på bordet, og medvirke til at den flytter sig.

Hvis lommeregneren derimod IKKE bevæger sig, må det betyde, at summen af alle de kræfter, der påvirker den er lig med 0. (Eller $\vec{o}$, for at være helt præcis).
Dette kaldes for et system i LIGEVÆGT.

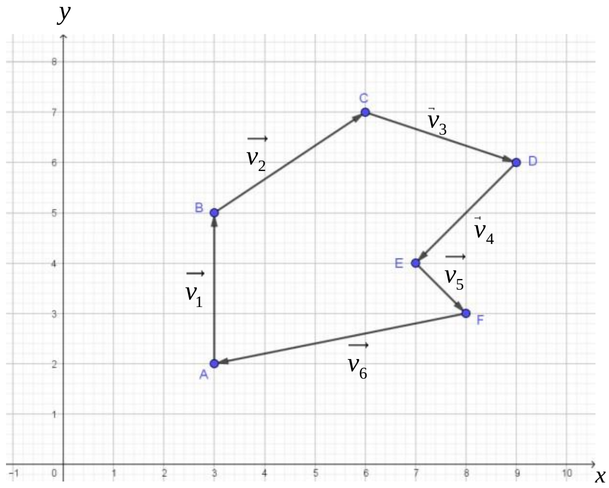
Dette kan matematisk skrives således:

Et system i ligevægt (vektorligevægt), kan beskrives således:

$$\vec{v_1} + \vec{v_2} + \vec{v_3} + \cdots + \vec{v_{n-1}} + \vec{v_n} = \vec{o}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{pmatrix} v_{1_x} \\ v_{1_y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{2_x} \\ v_{2_y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{3_x} \\ v_{3_y} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} v_{n-1_x} \\ v_{n-1_y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{n_x} \\ v_{n_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Grafisk kan det udtrykkes som, at hvis man lægger *n* vektorer sammen, så vil resultanten ligge i den første vektors begyndelsespunkt.

Eksempel 6.1:



Figur 11: Summen af vektorerne er lig med $\vec{o}$.

For eksemplets skyld udregnes situationen i figur 11.

De seks vektorer bestemmes (ved aflæsning). (Normalt ville de være givet i opgaven – enten direkte eller ved udregning).

$$\vec{v}_1=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix},\ \vec{v}_2=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix},\ \vec{v}_3=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix},$$

$$\vec{v}_5=\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix},\ \vec{v}_5=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\text{ og }\vec{v}_6=\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3+\vec{v}_4+\vec{v}_5+\vec{v}_6=\vec{r}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix}r_x\\r_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_{1_x}\\v_{1_y}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v_{2_x}\\v_{2_y}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v_{3_x}\\v_{3_y}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v_{4_x}\\v_{4_y}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v_{5_x}\\v_{5_y}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v_{6_x}\\v_{6_y}\end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix}r_x\\r_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix}r_x\\r_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+3+3+(-2)+1+(-5)\\3+2+(-1)+(-2)+(-1)+(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+3+3-2+1-5\\3+2-1-2-1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}}$$

Det er altså et system i ligevægt.

Måske endnu vigtigere er det, at da man altid kan reducere og isolere ligningen efter behov, så kan man i et givent tilfælde finde den kraft der skal tilføjes, for at bringe et system i ligevægt.

Eksempel 6.2:

Givet et system, som er påvirket af to kraftvektorer:

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Hvilken kraft skal der til, for at bringe systemet i ligevægt?

$$\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_{ligevægt}} = \vec{o}$$

$$\Updownarrow \qquad \left(\text{Da } \vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; (= nulvektoren) \right)$$

$$\begin{pmatrix} v_{1_x} \\ v_{1_y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{2_x} \\ v_{2_y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{ligevægt_x} \\ v_{ligevægt_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} v_{1_x} \\ v_{1_y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{2_x} \\ v_{2_y} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} v_{ligevægt_x} \\ v_{ligevægt_y} \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} v_{1_x} \\ v_{1_y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{2_x} \\ v_{2_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_{ligevægt_x} \\ -v_{ligevægt_y} \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_{ligevægt_x} \\ -v_{ligevægt_y} \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0+3 \\ 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_{ligevægt_x} \\ -v_{ligevægt_y} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_{ligevægt_x} \\ -v_{ligevægt_y} \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} v_{ligevægt_x} \\ v_{ligevægt_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}}} \qquad (\text{Bemærk fortegnene!!!})$$

Øvelse 6.1:

Givet tre kræfter (vektorer) med vektorkoordinaterne:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

1) Find ud af, vha. beregning, om de tre vektorer beskriver et system i ligevægt.

2) Hvis systemet ikke er i ligevægt, bestem da den vektor, der vil bringe systemet i ligevægt.

7. Multiplikation med tal (Skalering):

Vektorer kan multipliceres (ganges) med reelle tal. Der betragtes en egentlig vektor $\vec{a}$ samt et reelt tal, *t*.

Definition:	Ved vektoren $t \cdot \vec{a}$ forstås følgende vektor:	
	Hvis $t > 0$	$t \cdot \vec{a}$ og $\vec{a}$ er ensrettede og $t \cdot \vec{a}$ er *t* gange så lang som $\vec{a}$.
	Hvis $t = 0$	$t \cdot \vec{a} = 0$
	Hvis $t < 0$	$t \cdot \vec{a}$ og $\vec{a}$ er modsat rettede og $t \cdot \vec{a}$ er $(-t)$ gange så lang som $\vec{a}$.

Når en vektor, $\vec{v}$, multipliceres med en skalar, *n*, vil resultatet blive en ny vektor, $n \cdot \vec{v}$ som er faktoren *n* længere end den oprindelige vektor, men med samme retning.

Hvis faktoren *n* er negativ, vil den nye vektor dog være modsat rettet.

Generelt kan det noteres som: $n \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} n \cdot v_x \\ n \cdot v_y \end{pmatrix}$.

Sætning:

1) $s\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = s\vec{a} + s\vec{b}$ **(Den distributive lov for multiplikation af vektorer med tal)**

2) $s\left(t\vec{a}\right) = (st)\vec{a}$ **(Den distributive lov for multiplikation af vektorer med tal)**

Bevis for regel 1):

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$.

$$s\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = s\begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa_x \\ sa_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} sb_x \\ sb_y \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = s\vec{a} + s\vec{b}$$

Q.E.D.

Øvelse 7.1:

Bevis den anden regneregel i ovenstående sætning.

Eksempel 7.1:

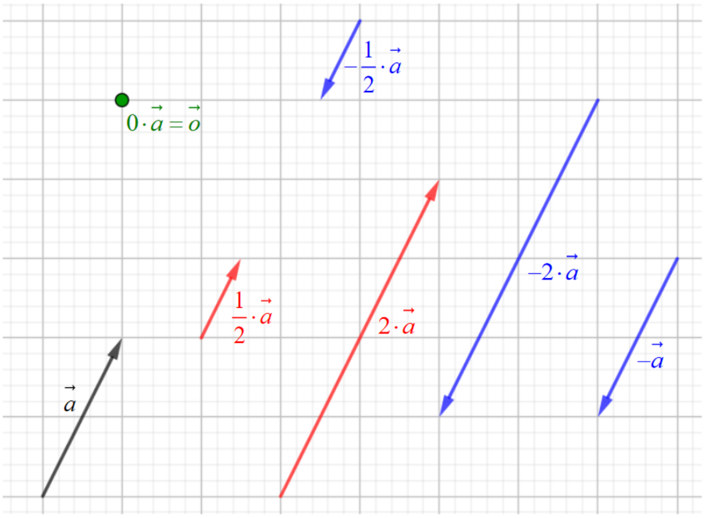
Givet en vektor, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\underline{\underline{2 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}}}, \quad \underline{\underline{\frac{1}{3} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot 4 \\ \frac{1}{3} \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,\overline{3} \\ 0,\overline{6} \end{pmatrix}}}, \quad \underline{\underline{(-3) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} (-3) \cdot 4 \\ (-3) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \end{pmatrix}}}$$

Øvelse 7.2:

Givet vektoren, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ med begyndelsespunktet $B = (2;-2)$.

1) Bestem $|\vec{v}|$.
2) Bestem punktkoordinatet til vektor $\vec{v}$'s pilpunkt i koordinatsystemet.
3) Bestem vektorkoordinaterne til vektoren $4 \cdot \vec{v}$.
4) Bestem længden $|4 \cdot \vec{v}|$.
5) Bestem koordinaterne til vektor $4 \cdot \vec{v}$'s pilpunkt, når det er givet, at vektor $4 \cdot \vec{v}$ har begyndelsespunkt i $B_{Ny} = (10;-5)$.



Figur 12: Multiplikation af skalar og vektor.

Som det ses på figur 7, så vil en multiplikation med en faktor, som er positiv og mindre end 1, resultere i en vektor, som er parallel med, ensrettet og kortere end den oprindelige vektor. Er faktoren større en 1, vil det resultere i en vektor, som er parallel med, ensrettet og længere end den oprindelige vektor. (Røde vektorer i figuren).

Hvis den faktor man multiplicerer med, er negativ, vil der gælde de samme regler, bortset fra at resultatet vil være en vektor, som er parallel med, men modsat rettet. (Blå vektorer i figuren).

Prikken øverst til venstre er resultatet af, at vektoren er multipliceret med 0. Derved fås et element (en nulvektor), som er uden udstrækning.

Parallelle vektorer:

I forbindelse med multiplikation af vektorer med tal, så vil resultatet altid give en vektor, som er parallel med den oprindelige vektor. Det er kun længden, som ændres. Det er klart, at hvis man multiplicerer med tallet 1, så vil man få den samme vektor som udgangspunktet. Er tallet større end 1, vil den nye vektor være længere end den oprindelige. Er tallet mellem 0 og 1, vil resultatet blive en vektor, der er kortere end den oprindelige.

Modsat rettede vektorer (Modsatte vektorer):

Særligt gælder, at hvis man multiplicerer med et negativt tal, så vil resultatet blive en vektor, som peger den modsatte vej.

Måske er det indlysende efter sidste eksempel, at hvis man ganger en vektor med faktoren -1, så vil resultatet være en vektor, som er lige så lang som den oprindelige vektor, men hvor pilen peger den stik modsatte vej.

Særligt gælder, at modsat rettede vektorer er: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ og $-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \end{pmatrix}$.

8. Vektorsubtraktion:

At trække to vektorer fra hinanden er fuldstændig lige så nemt som at lægge to vektorer sammen … Til gengæld er det ikke lige så nemt at forstå – ikke mindst, hvis man ønsker at kunne bevise det grafisk.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x + (-b_x) \\ a_y + (-b_y) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 8-4 \\ -3-2 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}}}$$

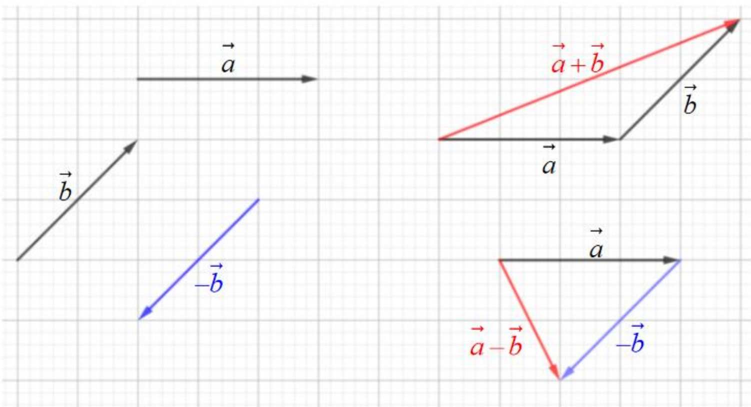
(Det forventes ikke, at man lægger den negative værdi til – blot at man trækker værdien fra … Eller med andre ord, at man springer det blå udtryk over).

Som det allerede er set (indirekte), kan man trække en vektor fra en anden vektor, blot ved at subtrahere den anden vektors koordinater fra den første vektors koordinater.
Det var nemt at forstå vektoradditionen grafisk. Først ”udføres” den ene vektor, og derefter ”udføres” den anden vektor, med udgangspunkt i den første vektors pilpunkt.

Dette vil ikke give mening for vektorsubtraktion!

Løsningen er dog ligetil:

Hvis man nu multiplicerer en vektor med (-1), så får man jo den modsat rettede vektor med samme længde. (Se forrige afsnit). Hvis man lægger den til en anden vektor, vil det svare til at subtrahere vektoren fra en anden vektor.



Figur 13: Princippet bag vektorsubtraktion.

9. Komposanter:

Vektoraddition er beskrevet i et tidligere afsnit. Vektoraddition handler om af sammensætte to eller flere vektorer til en resultant. Dette afsnit handler om det modsatte, nemlig at opdele (eller opløse, som det kaldes) en vektor efter to andre vektorer.

Man kan spørge sig selv: ”Hvad er det interessante i denne øvelse”? ”Er det ikke altid ret indlysende – bare ved at betragte vektorkoordinaterne – hvor langt man skal henholdsvis henad (højre eller venstre) og opad (eller nedad)”?

Svaret er ”jo”, der er bare den lille hage ved det, at det er ikke altid muligt at kunne flytte noget langs en vandret og en lodret akse.

Enhedsvektorer i koordinatsystemet (Basisvektorer):

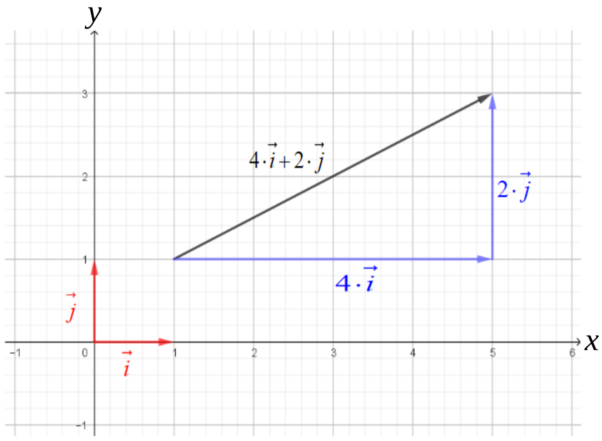
I det næste kapitel diskuteres begrebet (vilkårlige) enhedsvektorer. En enhedsvektor er defineret som en vektor, der har længden 1.

En enhedsvektor i (det kartesiske) koordinatsystem er en vektor med længden 1, der er parallel med enten *x*-aksen eller *y*-aksen. De benævnes ofte som $\vec{i}$ og $\vec{j}$ skrives som:

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Når enhedsvektorer i (det kartesiske) koordinatsystem nævnes kort allerede her, så er det fordi det er nemt at forestille sig, at alle vektorer kan dannes ved at tage ”*x*” antal $\vec{i}$ −vektorer og ”*y*” antal $\vec{j}$ −vektorer og derved danne enhver vektor i planet.

Eksempel 9.1:



Figur 14: Enhedsvektorer i koordinatsystemet.

I figur 14, kaldes vektorerne $4\cdot\vec{i}$ og $2\cdot\vec{j}$ for vektorernes komposanter. Og det er rimeligt indlysende, da komposanterne i dette tilfælde er parallelle med koordinatsystemets akser. Faktisk er det så indlysende, at det i de fleste tilfælde ikke er noget, man vil tænke særlig meget over.

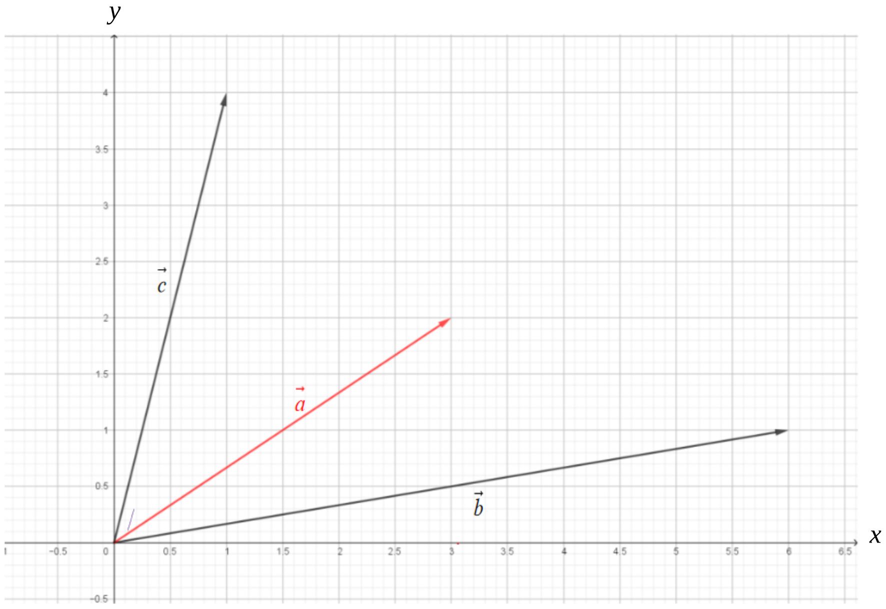
Problemerne begynder først, når de to vektorer (komposanter) man vil opløse sin vektor efter, ikke er parallelle med koordinatsystemets akser eller måske endda ikke er vinkelrette på hinanden.

Så man skal forestille sig en situation, hvor man vil beskrive en bestemt vektor ved at addere to andre vektorer (eller faktorer deraf), som kan være vilkårligt beliggende i koordinatsystemet. Når der skrives "faktorer deraf" er det fordi det kan være – ligesom i eksemplet med "Enhedsvektorer i koordinatsystemet", at der skal bruges en faktor af hhv. de to vektorer. Disse faktorer kan være positive eller negative – ligesom de kan være større end 1 eller mellem 0 og 1.

Opløsning af vektor i komposanter:

Let's dig in! Et lidt mere jordnært og matematisk eksempel:

Eksempel 9.2:

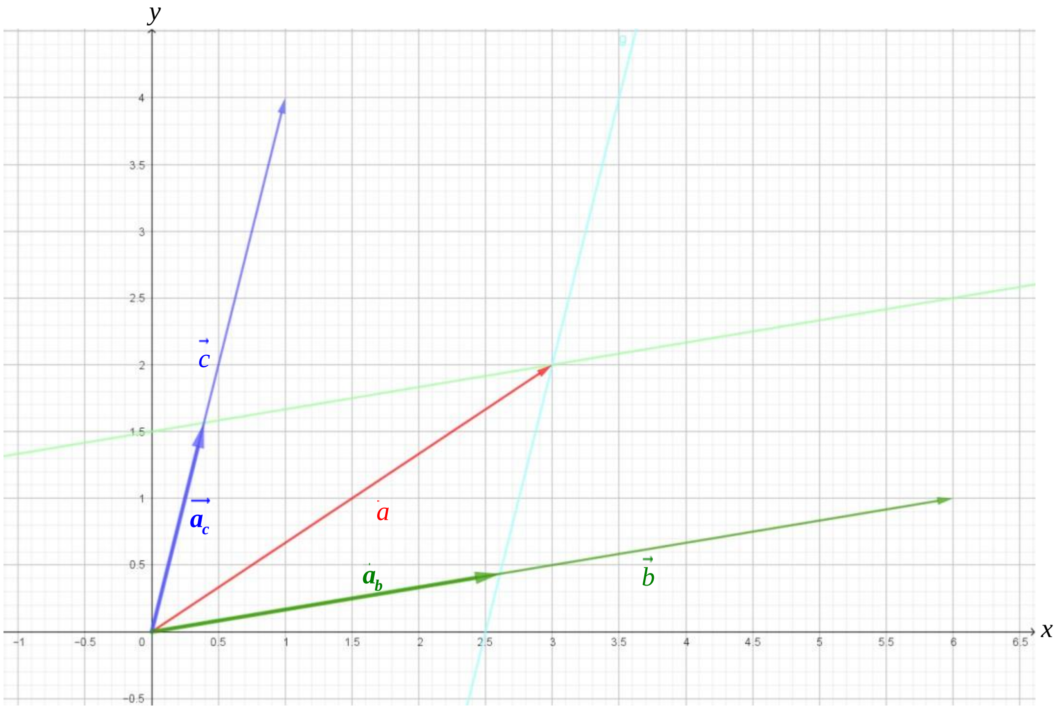


Figur 15: Udgangspunktet for at opdele en vektor i komposanter.

Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ (den røde) skal opløses i to komposanter, der går i henholdsvis vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$'s og vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$'s retning. Dvs.: Hvor langt skal man ud af hhv. vektor $\vec{b}$ og vektor $\vec{c}$ og lægge dem sammen for at få vektor $\vec{a}$?

Opg. a) Bestem koordinaterne til de to komposanter.

For forståelsens skyld, parallelforskydes **retningerne** for vektor $\vec{b}$ og vektor $\vec{c}$.



Figur 16: Vektorerne parallelforskydes.

Nu er opgaven sådan set løst grafisk, for nu er det muligt at se, hvor stor en portion af hhv. vektor $\vec{b}$ og vektor $\vec{c}$ (de to vektorer, der er lidt tykkere end de andre, navngivet $\overrightarrow{a_b}$ og $\overrightarrow{a_c}$ der sammenlagt skal bruges for at få vektor $\vec{a}$. ($\vec{a} = \overrightarrow{a_b} + \overrightarrow{a_c}$).

Der mangler stadig udregningen!

I og med at summen af komposanterne skal være lig med vektor $\vec{a}$, kan følgende ligning opstilles:

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_b} + \overrightarrow{a_c}$$

Som det ses på figuren, er både vektor $\vec{b}$ og vektor $\vec{c}$ længere, end de komposanter, der skal bruges. Men hvor meget? De skal altså multipliceres med en faktor for vektor $\vec{b}$ og vektor $\vec{c}$ for at få de rigtige komposanter.

Men hvor meget? Hvor store skal disse faktorer være?

$$\vec{a} = s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} \qquad \left(\overrightarrow{a_b} = s \cdot \vec{b} \ \text{ og } \ \overrightarrow{a_c} = s \cdot \vec{c}\right)$$

Vektor $\vec{a}$ kaldes også for en **linearkombination** af vektor $\vec{b}$ og vektor $\vec{c}$.

Men hvad er nu det? Én ligning med to ubekendte? Husk nu, at en vektorligning kan splittes op i en *x*-ligning og en *y*-ligning.

$$\vec{a} = s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot s \\ s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 4t \end{pmatrix} \quad : \quad \begin{cases} I: & 3 = 6 \cdot s + t \\ II: & 2 = s + 4 \cdot t \end{cases}$$

De to ligninger løses vha. indsættelsesmetoden. (Det er nemt at isolere f.eks. *t*).

Ligning *I* omskrives:

$$3 = 6 \cdot s + t \Leftrightarrow t = 3 - 6s$$

Dette indsættes i ligning *II*:

$$2 = s + 4 \cdot (3 - 6s) \Leftrightarrow 2 = s + 12 - 24s \Leftrightarrow -10 = -23s$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{s = \frac{10}{23} \approx 0{,}4348}$$

Udtrykket for *s* indsættes i udtrykket for *t*:

$$t = 3 - 6s$$

$$\Updownarrow$$

$$t = 3 - 6 \cdot \frac{10}{23} \Leftrightarrow t = \frac{69}{23} - \frac{60}{23}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{t = \frac{9}{23} \approx 0{,}3913}$$

Nu er faktorerne beregnet, og skal blot indsættes i udtrykkene for $\overrightarrow{a_b}$ og $\overrightarrow{a_c}$:

$$\overrightarrow{a_b} = s \cdot \vec{b}$$

$$\Updownarrow$$

$$\overrightarrow{a_b} = \frac{10}{23} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{a_b} = \begin{pmatrix} \frac{10}{23} \cdot 6 \\ \frac{10}{23} \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{\overrightarrow{a_b} = \begin{pmatrix} \frac{60}{23} \\ \frac{10}{23} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2,61 \\ 0,43 \end{pmatrix}}}$$

$$\overrightarrow{a_c} = t \cdot \vec{c}$$

$$\Updownarrow$$

$$\overrightarrow{a_b} = \frac{9}{23} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{a_b} = \begin{pmatrix} \frac{9}{23} \cdot 1 \\ \frac{9}{23} \cdot 4 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{\overrightarrow{a_b} = \begin{pmatrix} \frac{9}{23} \\ \frac{36}{23} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,39 \\ 1,57 \end{pmatrix}}}$$

Nu er det (sammen med skitsen) tydeligt, at vektor $\vec{a}$ kan dannes ved addition af de to vektorer: $\overrightarrow{a_b}$ og $\overrightarrow{a_c}$, der jo går i vektor $\vec{b}$ ’s og vektor $\vec{c}$ ’s retninger.

Kontrol: Ikke obligatorisk, men en god idé.

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_b} + \overrightarrow{a_c}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} \frac{60}{23} \\ \frac{10}{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{9}{23} \\ \frac{36}{23} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} \frac{69}{23} \\ \frac{46}{23} \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}}$$

Hvilket jo viser sig at stemme … 😊

Øvelse 9.1:

Afsæt $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ som stedvektorer i et koordinatsystem.

1) Tegn følgende linearkombinationer af $\vec{a}$ og $\vec{b}$:

   $\vec{x}=2\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{y}=-3\vec{a}+2\vec{b}$ og $\vec{z}=\vec{a}-2\vec{b}$.

2) Lad O betegne koordinatsystemets begyndelsespunkt (origo). Beskriv mængden af de punkter, P, der opfylder:

   $\overrightarrow{OP}=s\vec{a}+t\vec{b}$, hvor $s>0$ og $t>0$.

3) Beskriv følgende punktmængder:

   $A=\left\{P \mid \overrightarrow{OP}=s\vec{a}+t\vec{b},\ \text{hvor } s<0 \text{ og } t>0\right\}$

   $B=\left\{P \mid \overrightarrow{OP}=s\vec{a}+t\vec{b},\ \text{hvor } 0<s<2 \text{ og } 0<t<3\right\}$

Øvelse 9.2:

Opløs vektoren $\vec{x}$ efter $\vec{a}$ og $\vec{b}$ både ved aflæsning og beregning.

1) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ og $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.

2) $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ og $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$.

10. Enhedsvektorer:

Lidt begreber:

En enhedsvektor er en vektor, der har længden 1.

En enhedsvektor benævnes som regel: $\vec{e}$.

Hvis det er en enhedsvektor, der er baseret på en anden vilkårlig vektor – altså en vektor, som har samme retning som en "oprindelig" vektor, men med længden 1, kalder man den som regel for f.eks.: $\overrightarrow{e_a}$, hvis den oprindelige vektor blev kaldt for $\vec{a}$.

Hvad bruges enhedsvektorer til:

Man kan forestille sig, at man ved at et emne bliver påvirket af en kraft med en vis størrelse. Dog er man ikke helt sikker på, hvilken retning emnet bliver påvirket i.

Kan man regne retningen ud (som en vektor, der peger i den rigtige retning), så er det vel indlysende, at den retningsløse kraft (der jo blot er en skalar), bare skal have associeret en retning til sig.

Det kan gøres ved at multiplicere denne skalar (som jo er en retningsløs vektor) med en enhedsvektor (som jo er en vektor). Lige som det er tilfældet med multiplikation af skalarer, så vil størrelsen af produktet være uforandret, såfremt en af (eller begge) faktorerne er lig med 1. Så den egentlige konklusion af denne operation er, at "man multiplicerer med en retning", hvilket jo kan være ganske snedigt …

I kapitlet om vektorprojektion, beskrives et særdeles håndgribeligt eksempel på, hvad enhedsvektorer kan bruges til.

Bevis: Formlen for enhedsvektorers koordinater.

Igen – som så mange gange før og som så mange gange herefter – er det "Reglen om ensvinklede trekanter", som er den drivende kraft i dette bevis.

Det ønskes bevist, at:

$$\boxed{x_e = \frac{v_x}{|\vec{v}|} \quad \text{og} \quad y_e = \frac{v_y}{|\vec{v}|}}$$

Givet en vektor $\vec{v}$ med koordinaterne v_x og v_y, som vist på nedenstående figur.

Skal man bestemme koordinaterne til $\vec{v}$'s enhedsvektor, $\overrightarrow{e_v}$, opstilles to ensvinklede trekanter, som kan beskrives (ifølge "Reglen om ensvinklede trekanter") med følgende forhold:

$$\frac{x_e}{v_x} = \frac{1}{\left|\vec{v}\right|} \quad \text{og} \quad \frac{y_e}{v_y} = \frac{1}{\left|\vec{v}\right|}$$

$\Updownarrow$ (Disse to udtryk isoleres mht. hhv. x_e og y_e)

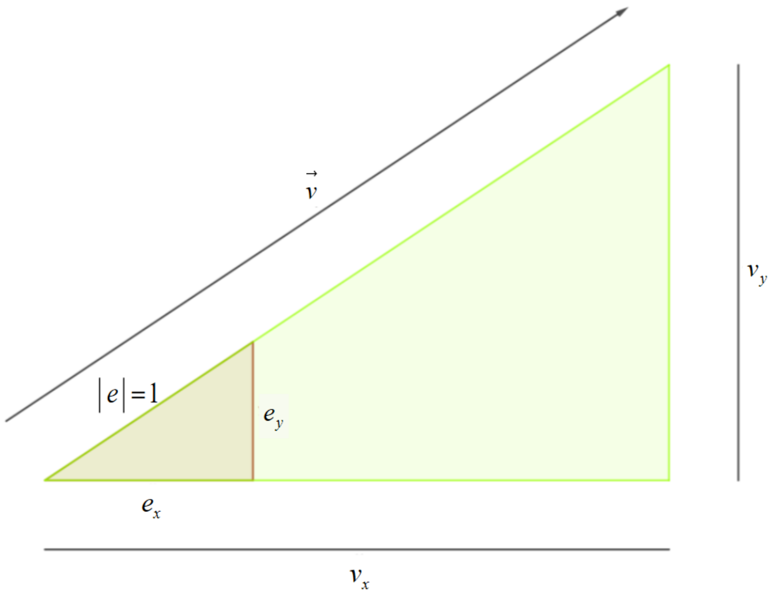
$$\underline{x_e = \frac{v_x}{\left|\vec{v}\right|}} \quad \text{og} \quad \underline{y_e = \frac{v_y}{\left|\vec{v}\right|}}$$

Da enhedsvektoren jo er en vektor, kan disse to udtryk samles i følgende:

$$\overrightarrow{e_{(v)}} = \frac{1}{\left|\vec{v}\right|} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{\overrightarrow{e_{(v)}} = \begin{pmatrix} \frac{v_x}{\left|\vec{v}\right|} \\ \frac{v_y}{\left|\vec{v}\right|} \end{pmatrix}}}$$



Q.E.D.

Figur 17: Enhedsvektorer bevises med "Reglen om ensvinklede trekanter".

Øvelse 10.1:

Bestem følgende vektorers enhedsvektorer.

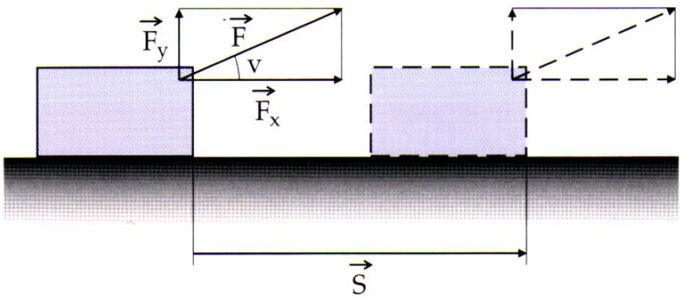
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{f} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

11. Skalarprodukt:

Lidt begreber:

Igennem dette notat er det blevet vist, at man kan lægge vektorer sammen og man kan trække vektorer fra hinanden. Derfor er det nærliggende at tro, at man også kan multiplicere vektorer. Det er imidlertid ikke tilfældet! I stedet kan man tage skalarproduktet, som på flere måder minder om multiplikation, men der er dog nogle ting, som er meget anderledes …

"Bogens eksempel": En last bliver trukket hen over et underlag ved hjælp af en kraft, $\vec{F}$, som vist på nedenstående figur.



Figur 18: Bogens illustration af skalarprodukt.

Vejlængden kan opfattes som en vektor $\vec{S}$, da $\vec{S}$ har både en længde og en retning. Trækkraften kan også opfattes som en vektor $\vec{F}$, som opløses i to komposanter: $\vec{F_x}$ og $\vec{F_y}$.

Definitionen på det arbejde, der udføres ved netop sådan en bevægelse, er kendt fra fysiktimerne. Den siger, at:

"Arbejdet er lig med produktet af vejlængden og kraften i bevægelsesretningen."

I en matematisk ligning, haves altså: $A = |\vec{F_x}| \cdot |\vec{S}|$.

Det vil altså sige, at hvis man multiplicerer vejlængden og kraften i bevægelsesretningen, så får man arbejdet.

Da det kun er selve trækkraften, og ikke trækkraften i bevægelsesretningen, som er kendt, så findes den vandrette komposant, $\vec{F_x}$, ved at multiplicere længden af vektor $\vec{F}$ med cosinus til den vinkel, som $\vec{F}$ har mod vandret. $|\vec{F_x}| = |\vec{F}| \cdot \cos(v)$.

Således fås udtrykket: $A = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos(v)$.

Dette er en spøjs matematisk størrelse. Det er en multiplikation af tre faktorer. Cosinus til vinklen *v* giver sig selv. Det er et tal (en skalar), og det er kendt fra kapitlet om trigonometri.

De to andre faktorer er længder – altså også skalarer. Det, der gør dem så specielle er, at det er længder af vektorer. Udtrykket indeholder altså to vektorer, men produktet vil give et reelt tal – altså en skalar. Deraf kommer navnet: "Skalarproduktet".

Da det er længderne af vektorerne, som bliver multipliceret, skal man altså være forsigtig med at sige, at man ganger eller multiplicerer to vektorer, for det er sådan set forkert.

Man taler dog om ”skalarproduktet af to vektorer”, og for at undgå misforståelser, så skrives skalarproduktet med en større prik end et normalt gangetegn. For det er jo ikke et rigtigt gangestykke.

Man skriver skalarproduktet mellem vektor $\vec{a}$ og vektor $\vec{b}$ som:

DEFINITION: $$\vec{a}\bullet\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v),$$

hvor *v* er vinklen mellem vektor $\vec{a}$ og vektor $\vec{b}$.

I nogle bøger, og i daglig tale i visse kredse, omtales skalarproduktet også som prik-produktet. Dette skyldes naturligvis notationsformen med den store prik. Det anbefales dog, at man holder sig til at benytte udtrykket: ”Skalarproduktet”. Både i tale og på skrift.

Handlingen beskrives som: ”At tage skalarproduktet af vektor $\vec{a}$ og vektor $\vec{b}$”.

Til gengæld accepteres det også at anvende verbummet: ”At prikke” – igen for at kunne skelne mellem en ordinær multiplikation og et skalarprodukt som et synonym for ”skalarproduktet.

Syntaks: ”At prikke vektor $\vec{a}$ og vektor $\vec{b}$”.

Der er en klar og entydig sammenhæng mellem skalarproduktet og vinklen mellem de to vektorer, som man tager skalarproduktet af. (Beviset kommer senere).

Bemærk (og lær!) følgende skema:

Vinkel:	Mindre end 90° (Spids vinkel)	Lig med 90° (Ret vinkel)	Større end 90° (Stump vinkel)
Skalarprodukt:	Positivt	0	Negativt

Især er det vigtigt at bemærke, at hvis vinklen mellem de to vektorer er lig med 90°, så er skalarproduktet lig med 0. En naturlig følge af, at $\cos(90°)$ er lig med 0.

Fortegnsvariansen af skalarproduktet er dog også meget væsentlig – ikke mindst som en ”on-the-fly” kontrol af beregninger af skalarprodukter.

Som allerede nævnt er skalarproduktet givet ved en DEFINITION.

Notat om vektorer – Skalarprodukt

Der findes imidlertid også en anden definition på skalarproduktet, som især er anvendelig, hvis vektoren er givet på koordinatform.

Givet to vektorer: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$

DEFINITION: Da kan skalarproduktet beregnes som: $\vec{a} \bullet \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$

Igen – da der er tale om en definition – er der mangel på beviser for dette udtryk.

Eksempel 11.1:

Givet to vektorer: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Da er skalarproduktet lig med: $\vec{a} \bullet \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 = -6 + 4 \Leftrightarrow \underline{\underline{\vec{a} \bullet \vec{b} = -2}}$

Når det kommer til at beregne vinklen mellem to vektorer, er det genialt at der er to forskellige definitioner op skalarproduktet.

Opsummering:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v)$$
$$\vec{a} \bullet \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$
$$\Updownarrow$$
$$\cos(v) = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{v = \arccos\left(\frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)}}$$

Eksempel 11.2:

Vinkel mellem vektorer:

Givet to vektorer: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

a) Bestem skalarproduktet $\vec{a} \bullet \vec{b}$.

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$
$$\Updownarrow$$
$$\vec{a} \bullet \vec{b} = (-3) \cdot 4 + 5 \cdot 6 = -12 + 30$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{\vec{a} \bullet \vec{b} = 18}}$$

b) Bestem vinklen mellem vektor $\vec{a}$'s og vektor $\vec{b}$

$$\cos(v) = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$
$$\Updownarrow$$
$$v = \arccos\left(\frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$
$$\Updownarrow$$
$$v = \arccos\left(\frac{18}{\sqrt{(-3)^2 + 5^2} \cdot \sqrt{4^2 + 6^2}}\right)$$

(Skalarproduktet er allerede udregnet i spm. a).)

$$\Updownarrow$$
$$v = \arccos\left(\frac{18}{\sqrt{9+25} \cdot \sqrt{16+36}}\right) = \arccos\left(\frac{18}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{52}}\right) = \arccos\left(\frac{18}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 13}}\right)$$
$$\Updownarrow$$
$$v = \arccos\left(\frac{18}{2 \cdot \sqrt{34} \cdot \sqrt{13}}\right) = \arccos\left(\frac{9}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{13}}\right)$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{v = 64{,}65°}}$$

Notat om vektorer – Skalarprodukt

Regneregler for skalarprodukt

Ligesom der er regneregler for addition og subtraktion af vektorer, så gælder der regneregler for skalarproduktet.

Sætning:

1) $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$

2) $\vec{a} \bullet \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$

3) $t \bullet \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(t \cdot \vec{a}\right) \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet \left(t \cdot \vec{b}\right)$

4) $\vec{a} \bullet \vec{a} = \left|\vec{a}\right|^2$

1. Siger, at det er ligegyldigt i hvilken rækkefølge man prikker to vektorer med hinanden.

2. Den anden siger, at hvis man vil prikke en vektor med en vektorsum, så svarer det til at prikke vektoren ind på hver vektor i summen. Med andre ord, kan man prikke ind i parentes.

3. Den tredje regel siger, at hvis man vil gange et tal med et skalarprodukt, så svarer det til at gange tallet på den ene vektor og derefter tage skalarproduktet eller at gange tallet på den anden vektor og derefter tage skalarproduktet.

4. Den fjerde regel er meget nyttig. Den siger, at hvis man prikker en vektor med sig selv, så får man længden af vektoren kvadreret. (Længden af vektoren i anden potens).

Alle reglerne kan let bevises ved at regne venstre- og højresiden ud med koordinater hver for sig og se, at det giver det samme.

F.eks. kan regel 4 vises således:

Venstre: $\vec{a} \bullet \vec{a} = a_x \cdot a_x + a_y \cdot a_y = a_x{}^2 + a_y{}^2$

Højre: $\left|\vec{a}\right|^2 = \left(\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2}\right)^2 = a_x{}^2 + a_y{}^2$

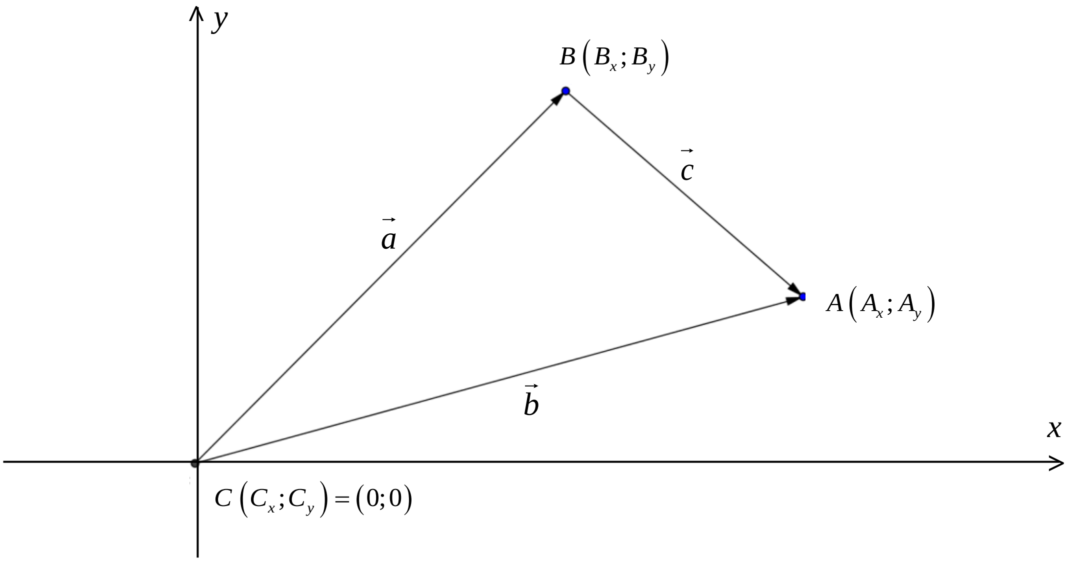
Øvelse 11.1:

Bevis de øvrige regneregler i ovenstående sætning.

Bevis: Skalarprodukt og vinkel mellem vektorer

Sammenhængen mellem skalarproduktet og vinklen mellem to givne vektorer, $\vec{a}=\begin{pmatrix}A_x\\A_y\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}B_x\\B_y\end{pmatrix}$, ønskes bevist. Desuden findes $\vec{c}=\begin{pmatrix}c_x\\c_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_x-B_x\\A_y-B_y\end{pmatrix}$.

Det er vigtigt at huske, at selve skalarproduktet er **defineret** som: $\vec{a}\bullet\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y$.



Figur 19: Trekanten dannes af to vektorer.

Af figuren ses det, at:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}B_x\\B_y\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}A_x\\A_y\end{pmatrix}\quad \text{og}\quad \vec{c}=\begin{pmatrix}A_x-B_x\\A_y-B_y\end{pmatrix}$$

$$\left|\vec{a}\right|=\left|CB\right|=\sqrt{\left(B_x^{\ 2}-C_x\right)+\left(B_y^{\ 2}-C_x\right)}=\sqrt{\left(B_x^{\ 2}-0\right)+\left(B_y^{\ 2}-0\right)}\Leftrightarrow \underline{\left|\vec{a}\right|=\sqrt{B_x^{\ 2}+B_y^{\ 2}}}$$

$$\left|\vec{b}\right|=\left|CA\right|=\sqrt{\left(A_x^{\ 2}-C_x\right)+\left(A_y^{\ 2}-C_x\right)}=\sqrt{\left(A_x^{\ 2}-0\right)+\left(A_y^{\ 2}-0\right)}\Leftrightarrow \underline{\left|\vec{b}\right|=\sqrt{A_x^{\ 2}+A_y^{\ 2}}}$$

$$\left|\vec{c}\right|=\left|AB\right|=\sqrt{\left(A_x-B_x\right)^2+\left(A_y-B_y\right)^2}$$

Cosinusrelationen (se tidligere bevis), giver f.eks.:

$$c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\left(C\right)$$

Ved at indsætte de fundne udtryk for længderne af vektorerne $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$, som jo netop svarer til siderne a, b og c i trekanten fås følgende:

Notat om vektorer – Skalarprodukt

$|c|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2 \cdot |a| \cdot |b| \cdot \cos(C)$

$\Updownarrow$ Indsætter værdierne fra tegningen

$\left(\sqrt{(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{B_x{}^2 + B_y{}^2}\right)^2 + \left(\sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2}\right)^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(C)$

$\Updownarrow$ Kvadratrod i anden potens ophæver sig selv

$(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 = B_x{}^2 + B_y{}^2 + A_x{}^2 + A_y{}^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(C)$

$\Updownarrow$ Kvadratsætninger

$\cancel{A_x^2} + \cancel{B_x^2} - 2 \cdot A_x \cdot B_x + \cancel{A_y^2} + \cancel{B_y^2} - 2 \cdot A_y \cdot B_y = \cancel{B_x^2} + \cancel{B_y^2} + \cancel{A_x^2} + \cancel{A_y^2} - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(C)$

$\Updownarrow$ Reducerer

$-2 \cdot A_x \cdot B_x - 2 \cdot A_y \cdot B_y = -2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(C)$

$\Updownarrow$ Dividerer igennem med -2

$A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(C)$

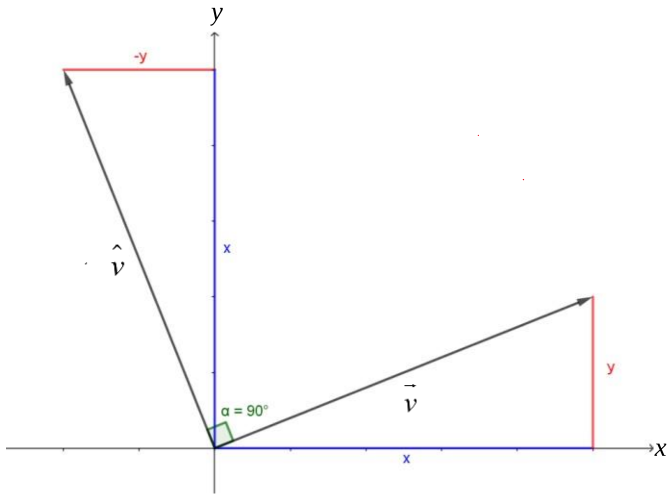
$\Updownarrow$ Det erindres, at skalarproduktet er defineret som: $\vec{a} \bullet \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(C)$$

Q.E.D.

12. Tværvektorer:

Hvis en vektor drejes 90° **mod uret** om begyndelsespunktet, fås tværvektoren (til den oprindelige vektor).



Figur 20: Tværvektor.

Som det kan ses på ovenstående figur, noteres tværvektoren med accenttegnet ”cirkumfleks” (^). I sprogenes verden kan dette tegn betyde mange, mange forskellige ting. F.eks. kan det betyde, at et bogstav (vokal) skal udtales på en anderledes måde i forhold til sprogets normale regler. Det kan også (særligt på fransk) betyde, at der engang i historien har været et bogstav (på latin, som fransk stammer fra), som nu mangler. F.eks. ”La bête” (”dyret” eller ”bæstet” på dansk), som i gammel fransk (latin) hed ”bestia”.

I matematikken kendes dette tegn nok bedst fra, når man i et computerprogram skal opløfte en værdi i en eller anden potens. F.eks. ”a^2 ” noteres i de fleste CAS-programmer som ”*a*^2”. I statistikkens verden, bruges tegnet til at angive at der er tale om et estimat.

Når man arbejder med vektorer, betyder accent cirkumfleks, at der er tale om en tværvektor.

I daglig udtale, siger man om $\hat{v}$, at det er ”v *hat*”.

Dette ”hat” kan også (lidt kækt måske) benyttes som et verbum. At ”hatte” en vektor vil sige, at man udregner vektorens tværvektor.

En tværvektor udregnes således:

Givet vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$. Da er vektor $\vec{a}$ ’s tværvektor lig med: $a = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}$.

Øvelse 12.1:

Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være vektorer og *t* et tal. Lad $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$ og $\vec{y} = t \cdot \vec{a}$.

Vis ved hjælp af ovenstående sætning, at:

$x = a + \hat{b}$ og $y = t \cdot a$.

Bevis for tværvektor

At indse hvordan man får tværvektoren kan gøres på følgende måde:

Man skal først erkende at en vektor kan skrives udtrykt ved sin længde og vinkel *v* i forhold til *x*-aksen – dvs. som et polært koordinatsæt.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\vec{a}| \cdot \cos(v) \\ |\vec{a}| \cdot \sin(v) \end{pmatrix}, (\text{Se afsnittet i dette notat om "Polære koordinater"}).$$

Husk, at *v* er vektorens vinkel mod vandret!

Tværvektoren er den vektor der står vinkelret på vektoren drejet mod urets retning, og har samme længde. Det vil altså sige at der lægges 90° til vinklen, mens længden forbliver den samme.

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} |\vec{a}| \cdot \cos(v + 90°) \\ |\vec{a}| \cdot \sin(v + 90°) \end{pmatrix}$$

Det erindres fra trigonometrien, at

$$\cos(v + 90°) = -\sin(v) \quad \text{og} \quad \sin(v + 90°) = \cos(v)$$

Og dermed er det givet, at:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\vec{a}| \cdot \cos(v) \\ |\vec{a}| \cdot \sin(v) \end{pmatrix} \quad \text{medfører at:} \quad \hat{a} = \begin{pmatrix} |\vec{a}| \cdot (-\sin(v)) \\ |\vec{a}| \cdot \cos(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}$$

Q.E.D.

Øvelse 12.2:

Lad $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

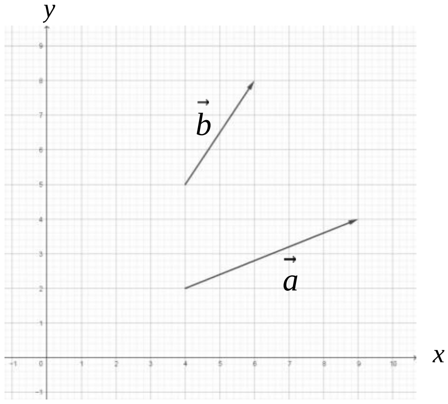
Bestem vektorkoordinaterne til:

$\vec{x} = \vec{a} + \hat{a}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - 3\hat{a}$ og $\vec{z} = -\vec{a} + 2\hat{a}$

13. Vektorprojektion:

En vektor kan projiceres ind på en anden vektor. I praksis vil det sige, at man finder en vektors ”skyggebillede” ind på en anden vektor.

Eksempel 13.1:

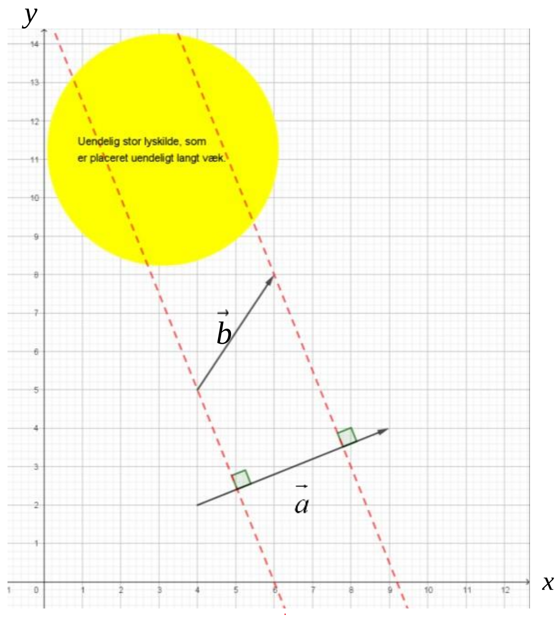


Figur 21: To vektorer. Vektor $\vec{b}$'s skyggebillede skal projiceres ned på vektor $\vec{a}$.

På ovenstående figur ses to vektorer: $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

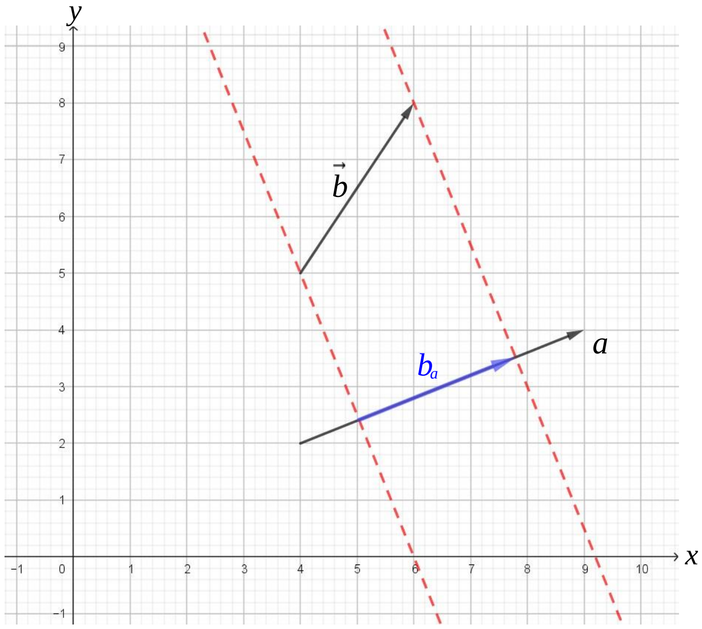
Skal man bestemme projektionen af vektor $\vec{b}$ ned på vektor $\vec{a}$, skal man forestille sig en lyskilde, som er uendelig stor og uendeligt langt væk og som er placeret ”et eller andet sted” oppe til venstre for de to vektorer.

Forestiller man sig yderligere, at denne lyskilde får vektor $\vec{b}$ til at kaste en ”skygge” ned på vektor $\vec{a}$, så må denne skygge aftegne sig på en del af vektor $\vec{a}$. Da lyskilden tænkes at være uendelig stor og uendeligt langt væk, må skyggebilledet tegne sig vinkelret ned på vektor $\vec{a}$.



Figur 22: Da lyskilden er uendelig stor og uendeligt langt væk, er skyggen vinkelret ned på vektor $\vec{a}$.

Resultatet er den ”skygge”, som aftegnes på vektor $\vec{a}$. Den er indtegnet med blåt på næste figur.

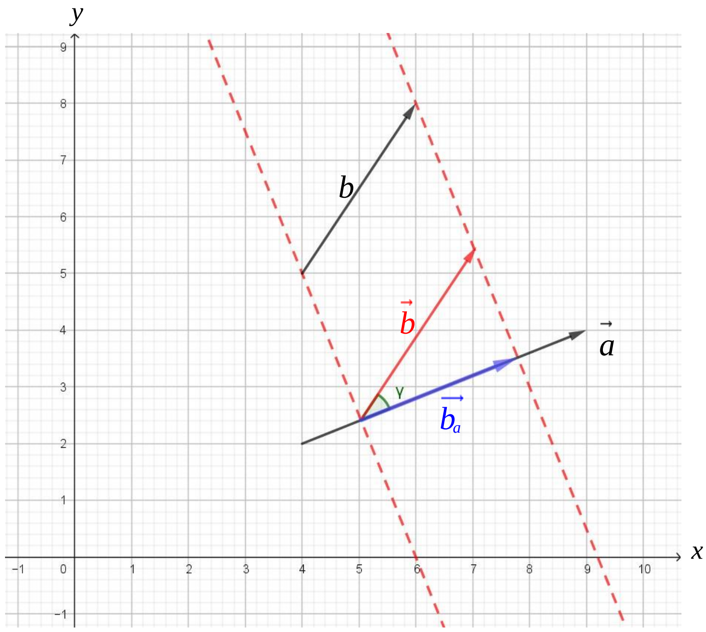


Figur 23: Skyggebilledet svarer til den indtegnede blå vektor $\overrightarrow{b_a}$.

Denne nye blå vektor er projektionen af vektor $\vec{b}$ ned på vektor $\vec{a}$. Den skrives som: $\overrightarrow{b_a}$.

Det er imidlertid ikke nok at tegne den. Det er naturligvis vigtigt, at man kan beregne projektionen.

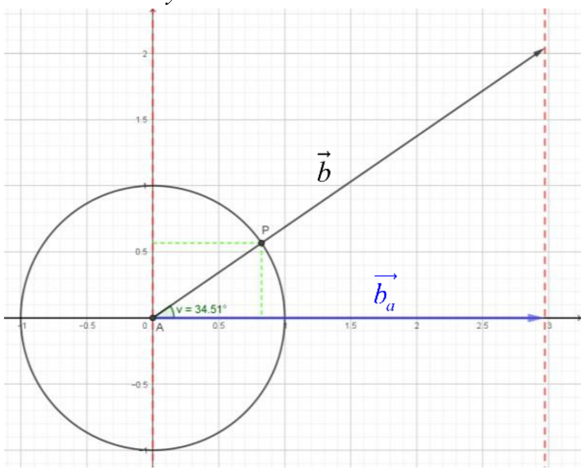
For forståelsens skyld flyttes vektor $\vec{b}$ således at vektor $\vec{b}$ har sit begyndelsespunkt et sted på vektor $\vec{a}$.



Figur 24: Vektor $\vec{b}$ parallelforskydes af nemheds hensyn, så den netop rører ved vektor $\vec{a}$.

Notat om vektorer – Vektorprojektion

Tænker man – bare for et øjeblik – at man drejer vektor $\vec{a}$, vektor $\vec{b_a}$ og vektor $\vec{b}$, således at vektor $\vec{a}$ bliver vandret, så kan vektor $\vec{b}$ og vektor $\vec{b_a}$ placeres med deres pilpunkt i origo i et lokalt koordinatsystem.



Figur 25: Hele figuren drejes af pædagogiske hensyn, så vektor $\vec{b_a}$ bliver vandret.

Af denne figur ses det, at længden af vektor $\vec{b_a}$ kan findes ved at multiplicere længden af vektor $\vec{b}$ med cosinus til vinklen mellem vektor $\vec{a}$ og vektor $\vec{b}$. Resten kommer af den gode gamle regel om ensvinklede trekanter.

$$\underline{\left|\vec{b_a}\right| = \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(v)} \qquad \text{"Længden af projektionen, hvis vektor } \vec{b} \text{ er givet i polære koordinater:"}$$

I dette eksempel er vektor $\vec{b}$ kun givet ved et sæt koordinater, så dette er altså ikke godt nok …

Denne længde kan også bestemmes på en anden måde. Definitionen (en af dem) af skalarproduktet erindres som:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(v) \Leftrightarrow \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\left|\vec{a}\right|} = \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(v)$$

Højresiden af denne ligning er netop blevet bestemt, hvilket giver:

$$\underline{\left|\vec{b_a}\right| = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\left|\vec{a}\right|}} \qquad \text{"Længden af projektionen, hvis vektor } \vec{b} \text{ er givet i rektangulære koordinater:"}$$

$$\left|\vec{b_a}\right| = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y}{\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2}} = \frac{5 \cdot 2 + 2 \cdot 3}{\sqrt{5^2 + 2^2}} = \frac{10+6}{\sqrt{25+4}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{\left|\vec{b_a}\right| = \frac{16}{\sqrt{29}} \approx 2{,}97}}$$

Så uanset om vektor $\vec{b}$ er givet ved polære eller rektangulære koordinater, er længden af vektor $\vec{b}$ nu kendt ved beregning.

Selve projektionsvektoren er dog ikke bestemt endnu – kun længden af den …

Så hvad er det, der mangler? Det er selvfølgelig retningen. Det er tidligere i dette notat gennemgået, hvorledes man kan ”multiplicere med en retning”. Det er ved at multiplicere med en enhedsvektor, som har samme retning, som den vektor, der projiceres ned på – og det er jo i dette tilfælde: vektor $\vec{a}$.

Beregning af vektor $\vec{a}$ ’s enhedsvektor:

$$\overrightarrow{e_a} = \frac{1}{\left|\vec{a}\right|} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{e_a} = \begin{pmatrix} \frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|} \\ \frac{a_y}{\left|\vec{a}\right|} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{e_a} = \begin{pmatrix} \frac{a_x}{\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2}} \\ \frac{a_y}{\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2}} \end{pmatrix}$$

$\Updownarrow$

$$\overrightarrow{e_a} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{5^2 + 2^2}} \\ \frac{2}{\sqrt{5^2 + 2^2}} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{e_a} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{25+4}} \\ \frac{2}{\sqrt{25+4}} \end{pmatrix}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\overrightarrow{e_a} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{29}} \\ \frac{2}{\sqrt{29}} \end{pmatrix}}$$

Dette er altså den ønskede retning. Nu er der kun tilbage at multiplicere projektionens længde med projektionens retning.

$$\overrightarrow{b_a} = \left|\overrightarrow{b_a}\right| \cdot \overrightarrow{e_a}$$

$\Updownarrow$

$$\overrightarrow{b_a} = \frac{16}{\sqrt{29}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{29}} \\ \frac{2}{\sqrt{29}} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{16}{\sqrt{29}} \cdot \frac{5}{\sqrt{29}} \\ \frac{16}{\sqrt{29}} \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} \end{pmatrix}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{\overrightarrow{b_a} = \begin{pmatrix} \frac{80}{29} \\ \frac{32}{29} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2{,}75 \\ 1{,}10 \end{pmatrix}}}$$

14. Trekants areal og tyngdepunkt:

Trekants areal bestemt vha. vektorer

Allerede i kapitlerne om ”Geometri”, ”Trigonometri” og ”Analytisk plangeometri”, blev der introduceret forskellige metoder til beregning af en trekants areal.

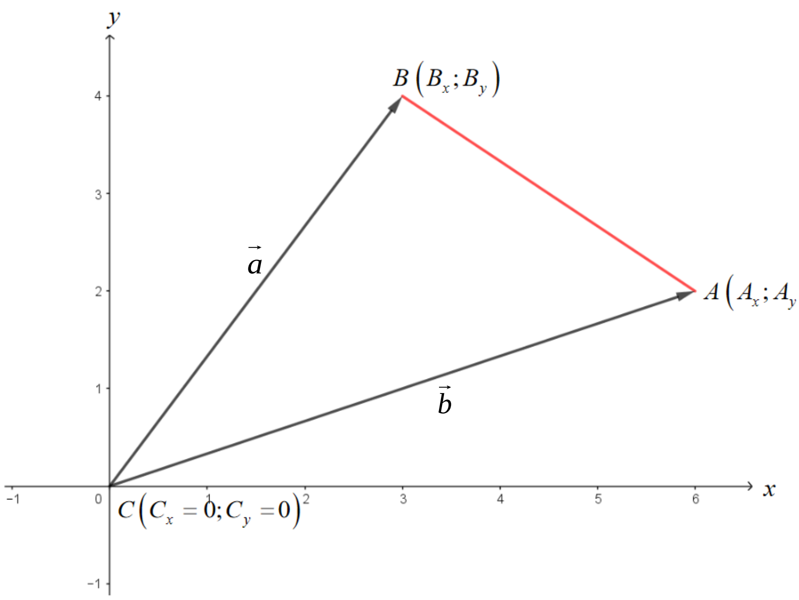
Her tilføjes endnu en metode, som i høj grad bygger på den metode, der blev vist i ”Analytisk plangeometri”. (Determinantmetoden).

En trekant tænkes placeret i et koordinatsystem med hjørnepunkterne:
$A\left(A_x;A_y\right)$, $B\left(B_x;B_y\right)$ og $C\left(C_x;C_y\right)$.

Da er arealet givet ved determinantformlen:

$$Areal=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \\ C_x & C_y \\ A_x & A_y \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\left|A_xB_y-B_xA_y+B_xC_y-C_xB_y+C_xA_y-A_xC_y\right|$$

Da vektorer kan flyttes rundt efter behov, tegnes to stedvektorer i et koordinatsystem, hvor de to vektorer opfattes som to af siderne i en trekant.



Figur 26: Trekanten dannes af to vektorer.

De to vektorer, $\vec{a}$ og $\vec{b}$ har altså hhv. koordinaterne: $\vec{a}=\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$.

Trekantens tre hjørner indsættes i determinantformlen:

$$Areal = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \\ C_x & C_y \\ A_x & A_y \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \left| A_x \cdot B_y - B_x \cdot A_y + B_x \cdot C_y - C_x \cdot B_y + C_x \cdot A_y - A_x \cdot C_y \right|$$

$\Updownarrow$

$$Areal = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \\ 0 & 0 \\ A_x & A_y \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \left| A_x \cdot B_y - B_x \cdot A_y + B_x \cdot 0 - 0 \cdot B_y + 0 \cdot A_y - A_x \cdot 0 \right|$$

$\Updownarrow$

$$\underline{Areal = \frac{1}{2} \cdot \left| A_x \cdot B_y - B_x \cdot A_y \right|}$$

Dette resultat bruges til at danne en ny determinantformel:

$$\boxed{Areal = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \left| A_x \cdot B_y - B_x \cdot A_y \right|}$$

Fordi der er brugt vektorer i denne metode (som jo kan flyttes rundt efter behag), så er hele ”trekanten” flyttet, således at et af hjørnepunkterne kommer til at ligge i origo, hvorved alle de led, som indeholder referencer til punktet *C*, forsvinder. Dette resulterer i en væsentlig kortere og meget mere overskuelig metode til beregning af en trekants areal.

Q.E.D.

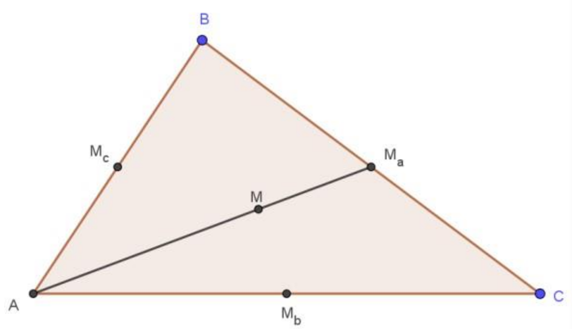
Trekants tyngdepunkt bestemt vha. vektorer

Det forudsættes kendt fra tidligere – bl.a. kapitel 7 – ”Rumfang”, at en trekants tyngdepunkt er beliggende i medianernes skæringspunkt.

Det kan bevises vha. vektorer, at trekantens tyngdepunkt ligger i punktet:

$$T(x;y)=\left(\frac{A_x+B_x+C_x}{3};\frac{A_y+B_y+C_y}{3}\right).$$

En trekant betragtes;



Figur 26: Trekanten med det indtegnede tyngdepunkt.

I trekant *ABC* indtegnes medianen fra punkt *A*.

Punktet *M* afsættes således at $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AM_a}$.

Det ønskes nu at finde et udtryk for *M* – hvilket som en vektor vil sige: $\overrightarrow{OM}$.
Ud fra dette udtryk argumenteres der for, at trekantens medianer skærer hinanden i punkt *M*.

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AM_a}$$

$$\Updownarrow$$

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\cdot\left(\overrightarrow{OM_a}-\overrightarrow{OA}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)-\overrightarrow{OA}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{OC}-\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{OA}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{OC}}$$

Da $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ og $\overrightarrow{OC}$ er stedvektorer, omskrives udtrykket til:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{OC}$$

$$\Updownarrow$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} C_x \\ C_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_x}{3} \\ \frac{A_y}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{B_x}{3} \\ \frac{B_y}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{C_x}{3} \\ \frac{C_y}{3} \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} \frac{A_x}{3} + \frac{B_x}{3} + \frac{C_x}{3} \\ \frac{A_y}{3} + \frac{B_y}{3} + \frac{C_y}{3} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} \frac{A_x + B_x + C_x}{3} \\ \frac{A_y + B_y + C_y}{3} \end{pmatrix}}$$

Da dette også er en stedvektor, kan det oversættes til et punktkoordinat:

$$\underline{\underline{M = (x;y) = \left(\frac{A_x + B_x + C_x}{3} ; \frac{A_y + B_y + C_y}{3} \right)}}$$

$$\boxed{\textbf{Q.E.D.}}$$

15. Den rette linje:

Det er allerede i et tidligere notat nævnt, at linjens ligning kan have flere former. Den, der kendes fra den daglige matematikundervisning, er naturligvis:

$$y = a \cdot x + b\,,$$

hvor a er hældningskoefficienten og b er skæringsværdien på y-aksen.

Imidlertid kan ligningen for den rette linje – særligt hvis man færdes i USA – se således ud:

$$ax + by + c = 0$$

I Danmark kaldes linjen ligning på denne form: ”Linjens ligning på normalform” eller ”Formlen for linjens ligning”.

Dette udtryk kan relativt nemt reduceres, således at man får isoleret y.

$$ax + by + c = 0 \Leftrightarrow by = -ax - c \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b} \cdot x - \frac{c}{b}$$

Sættes ”$-\frac{a}{b}$” lig med en ny koefficient, ”a” og sættes ”$-\frac{c}{b}$” til en anden konstant, ”b”, fås:

$$\underline{\underline{y = a \cdot x + b}}$$

Betragtes linjens ligning på normalform gives:

$$ax + by + c = 0$$

Tænkes på et punkt, $P\left(x_0; y_0\right)$ på denne linje, må det passe ind i linjens ligning:

$$ax_0 + by_0 + c = 0$$

Trækkes de to udsagn fra hinanden, fås:

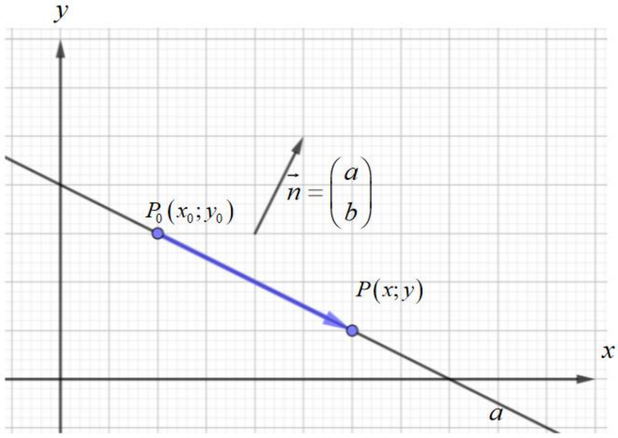
$$\begin{array}{rrrrl} & ax & +by & +c & = 0 \\ - & ax_0 & +by_0 & +c & = 0 \\ \hline \multicolumn{4}{l}{a\left(x - x_0\right) + b\left(y - y_0\right)} & = 0 \end{array}$$

$P(x;y)$ er (som sædvanligt) et "løbende punkt" på linjen, så linjens retning (en af dem), kan bestemmes ved udtrykket:

$$\overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

Som det allerede – indirekte – er nævnt forskellige steder i dette notat, så kan vektoren $\overrightarrow{P_0P}$ betragtes som **retningsvektoren** for linjen, *l*.

Normalvektoren, $\vec{n}$, er kun taget med for eksemplets skyld. Normalvektoren bliver forklaret i næste kapitel.



Figur 27: Ret linje gennem punkt P_0 og punkt *P*.

Parameterfremstillings for en linje i planet:

Der er faktisk adskillige løsninger på dette problem: Den ene er at angive linjen som en **parameterfremstilling,** en anden er at skrive linjens ligning på **normalform**. Metoden med at beregne linjens hældning i koordinatsystemet og kombinere hældningen med linjens skæring med *y*-aksen kendes allerede i detaljer fra kapitlet om analytisk plangeometri. Sidstnævnte vil ikke blive beskrevet i dette kapitel.

Parameterfremstilling: En parameterfremstilling for en ret linje i planet forklares ved, at man kender et vilkårligt punkt på linjen. Dette punkt bliver udgangspunktet for parameterfremstillingen. Som altid med en ret linje, kan den bestemmes vha. to punkter eller et punkt og en hældning. Hældningen vil her blive betegnet som en retning, givet ved retningsvektoren.

Så retningsvektoren må være det samme som vektoren, som går fra punkt *A* til punkt *B*. (Eller modsat – fra punkt *B* til punkt *A*).

Hvis man forestiller sig, at der eksisterer et punkt på linjen, som flytter sig jævnt hen over tid. Lad tiden være givet i variablen, *t*. Antages det, at linjen begynder i udgangspunktet (det kendte punkt), til tiden $t = 0$, så er det indlysende, at punktet ikke har flyttet sig endnu. Det må stadig stå i udgangspunktet.

Eksempel 15.1: (Parameterfremstilling)

Bestem en ligning for linjen gennem punkterne: $A(2;3)$ og $A(8;10)$.

I opgaven er der givet to kendte punkter på linjen. Ud fra disse to punkter, er det muligt at beregne retningsvektoren. I dette eksempel anvendes retningen fra *A* til *B*, men det kunne nu lige så godt være den modsatte retning.

$$\vec{r} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-2 \\ 10-3 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}}$$

Nu kendes retningen. Og der kendes hele to punkter på linjen, nemlig *A* og *B*. Eftersom der er tale om den samme linje hele vejen, er det ligegyldigt hvilket af de kendte punkter, man benytter til sin parameterfremstilling.

Introduktionen af ”tidsvariablen” *t* vises i følgende udtryk:

$$\overrightarrow{OP}_{(t=0)} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{\overrightarrow{OP}_{(t=0)} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}}$$

Punkt *A* vælges, da cifrene er mindre end dem i punkt *B*.

Tiden går, og på et tidspunkt er der gået 1 tidsenhed. Nu er punktets beliggenhed:

$$\overrightarrow{OP}_{(t=1)} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{\overrightarrow{OP}_{(t=1)} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + r_x \\ y_0 + r_y \end{pmatrix}}}$$

… og så videre. Indsætter man en ”negativ tid” vil punktet blot gå den modsatte vej ud af linjen, regnet fra udgangspunktet.

Forestiller man sig nu – måske lidt søgt, at tiden antager alle værdier på én gang, så vil alle punkterne for alle *t*-værdierne danne en ret linje.

Selvsagt er der uendeligt mange korrekte svar til, at man skal bestemme en parameterfremstilling for en ret linje. Dels kan man indsætte en hvilken som helst retningsvektor, bare den peger i den rigtige retning. F.eks. er følgende retningsvektorer alle identiske, når det drejer sig om at beskrive en bestemt retning:

$$\vec{r_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{r_2} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{r_3} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{r_4} = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \end{pmatrix} \text{ etc.,}$$

En anden kilde til et uendeligt antal løsninger er, at et hvilket som helst punkt, som er beliggende på linjen, kan fungere som udgangspunkt. Og da en linje består af uendeligt mange punkter, så er der altså også mulighed for uendeligt mange udgangspunkter.

Så én af de uendeligt mange løsninger på en parameterfremstilling af den linje, som søges i eksemplet er:

$$l: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}}}$$

Bemærk (mest for sjov), at følgende parameterfremstillinger er lige så gyldige/korrekte:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Øvelse 15.1:

1) Forklar med egne ord, hvorfor den (noget kryptiske) sidste løsning faktisk er en gyldig parameterfremstilling til linjen, som går igennem punkterne $A(2;3)$ og $B(8;10)$.

2) Bestem *t*-værdien for linjen i punktet *B*.

Linjens ligning på normalform:

Den anden måde at angive en linje på er at skrive linjens ligning på normalform.

Her udregnes igen retningsvektoren for linjen:

Eksempel 15.2: (Linjens ligning på normalform)

Bestem en ligning for linjen gennem punkterne: $A(2;3)$ og $B(8;10)$.

$$\vec{r} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-2 \\ 10-3 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}}$$

Normalvektoren (som jo bare skal symbolisere en retning) kan f.eks. være lig med tværvektoren af retningsvektoren:

$$\vec{n} = \hat{r} = \begin{pmatrix} -r_y \\ r_x \end{pmatrix}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\vec{n} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \end{pmatrix}}$$

I begyndelsen af dette kapitel, blev linjens ligning på normalform kort introduceret som:

$$ax + by + c = 0,$$

Hvilket blev omskrevet til:

$$a\left(x - x_0\right) + b\left(y - y_0\right) \quad = 0\,.$$

I næste kapitel ses og bevises det, at *a* og *b* er hhv. *x*- og *y*-koordinaterne til en normalvektor til linjen. En normal(vektor) er jo som bekendt en linje (eller i dette tilfælde) en vektor, som står vinkelret på en linje eller en vektor.

Da kan linjen ligning (på normalform) skrives som:

$$a\left(x - x_0\right) + b\left(y - y_0\right) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$-7\left(x - 2\right) + 6\left(y - 3\right) = 0$$

Dette distribueres og reduceres til:

$$-7x + 14 + 6y - 18 = 0 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{-7x + 6y - 4 = 0}}$$

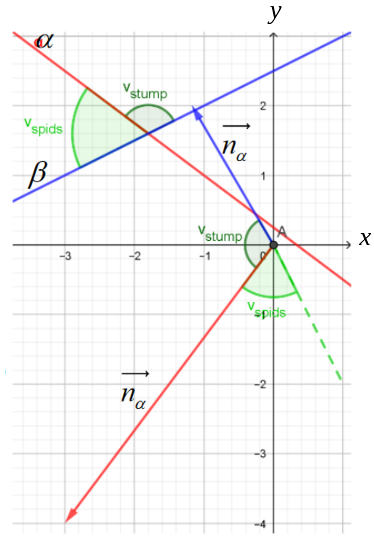
Vinkel mellem linjer:

Kender man – eller kan man omskrive til – to linjers ligninger på normalform, kan man bestemme vinklen mellem den på en meget nem måde.

Det indses, at den vinkel, som er mellem linjerne, må være præcis den samme, som er mellem de to linjers respektive normalvektorer. Normalvektorerne er jo begge forskudt (eller rettere drejet) 90° i forhold til den linje eller vektor de er normaler til.

Så har man givet de to linjer ved deres ligninger på normalform, så kender man jo også deres normalvektorer. Det er jo blot koefficienterne til *x*- og *y*-leddene.

Traditionelt returnerer man ***den spidse vinkel*** mellem de to linjer. Det er klart, at hvis man lader to linjer skære hinanden som ikke er vinkelrette, så må der dannes to par vinkler, hvoraf det ene par udgør en spids vinkel og det andet par udgør en stump vinkel, så medmindre andet er angivet, og man regner sig frem til en stump vinkel, så skal man lige finde supplementvinklen til den først fundne vinkel.



Figur 28: Vinklen mellem vektorerne er den samme som vinklen mellem normalvektorerne.

Eksempel 15.3: (Vinkler mellem linjer)

Givet de to linjer, α og β på normalform:

$$\alpha: (-3)x(-4)y+1=0 \quad \text{og} \quad \beta: (-1)x+2y-5=0$$

Af ligningerne kan de to normalvektorer udtrækkes: (Husk fortegn!)

$$\overrightarrow{n_\alpha}=\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \overrightarrow{n_\beta}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

Så – en gang til: Vinklerne mellem de to linjer må være den samme som vinklen mellem de to normalvektorer. Så i stedet for at begynde at finde retningsvektorer for linjerne, så kan man blot finde vinklen mellem normalvektorerne.

$$\cos(v)=\frac{a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \Leftrightarrow v=\arccos\left(\frac{a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$v=\arccos\left(\frac{n_{\alpha_x}\cdot n_{\beta_x}+n_{\alpha_y}\cdot n_{\beta_y}}{\sqrt{{n_{\alpha_x}}^2+{n_{\alpha_y}}^2}\cdot\sqrt{{n_{\beta_x}}^2+{n_{\beta_y}}^2}}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$v=\arccos\left(\frac{(-3)\cdot(-1)+(-4)\cdot 2}{\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+2^2}}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$v=\arccos\left(\frac{3-8}{\sqrt{9+16}\cdot\sqrt{1+4}}\right) \Leftrightarrow v=\arccos\left(\frac{-5}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{5}}\right)$$

$$\Updownarrow$$

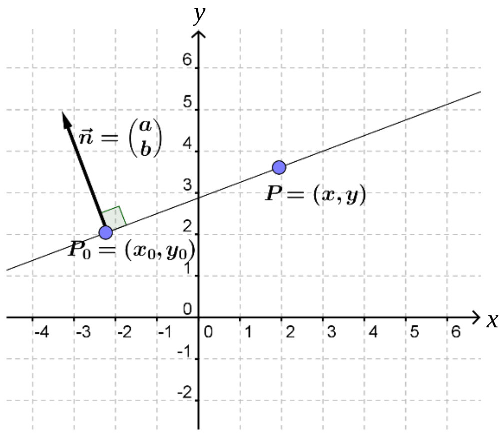
$$v=\arccos\left(\frac{-5}{5\cdot\sqrt{5}}\right) \Leftrightarrow v=\arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right) \Leftrightarrow \underline{v=116,46^\circ}$$

Men da det er den spidse vinkel, der skal returneres, udregnes supplementvinklen:

$$v_{Endelig}=180^\circ-116,46^\circ \Leftrightarrow \underline{\underline{v_{Endelig}=63,43^\circ}}$$

16. Normalvektor:

Der eksisterer dog også en anden oprindelse af dette udtryk for den rette linje, og det har i høj grad noget med vektorer at gøre. Betragt følgende figur:



Figur 29: Normalvektoren er vinkelret på linjen.

På denne figur ses en ret linje, som er defineret ved, at den går igennem de to punkter: P og P_0. Dette er forklaret i forrige kapitel.

I punktet P_0 står en vektor, $\vec{n}$, vinkelret på linjen. Da den er vinkelret på linjen, kaldes den en normalvektor. Denne vektor gives koordinaterne: $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

P_0 er et fast punkt, og benævnes som normalt med $P_0 = (x_0; y_0)$, hvorimod P er vilkårligt punkt på linjen, som benævnes $P = (x; y)$.

Nu dannes der en vektor, som går fra punkt P til punkt P_0.
Som sædvanligt arbejdes der med stedvektorer, da det ikke er muligt at "blande" punktkoordinater og vektorkoordinater.

$$\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}$$
$$\Updownarrow$$
$$\overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}}$$

Det er givet, at normalvektoren står vinkelret på linjen og dermed også på den vektor, $\overrightarrow{P_0P}$, som nu er blevet beregnet – da både punkt P og punkt P_0 ligger på linjen.

Normalvektoren har – som, allerede nævnt – vektorkoordinaterne: $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Da normalvektoren, $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ og linjen – repræsenteret af vektor $\overrightarrow{P_0P}$, er vinkelrette på hinanden, så må deres indbyrdes skalarprodukt være lig med 0.

$$\vec{n} \bullet \overrightarrow{P_0P} = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) = 0$$

Reduceres der videre på dette udtryk, fås:

$$a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$ax - ax_0 + by - by_0 = 0$$
$$\Updownarrow \quad \text{Da } "-ax_0" \text{ og } "-by_0" \text{ begge er konstanter, samles de til } "c".$$
$$\underline{\underline{ax + by + c = 0}}$$

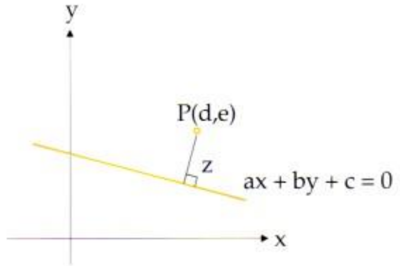
Q.E.D.

17. Afstand mellem punkt og linje:

Skal man bestemme (den vinkelrette) afstand fra et punkt, $P(d,e)$ til en linje, som er skrevet på formen: $ax+by+c=0$, kan det gøres med følgende formel:

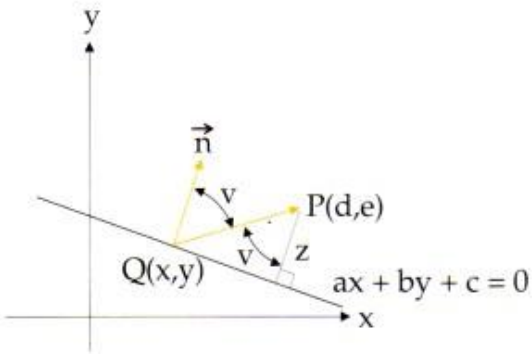
$$dist = z = \frac{|a \cdot d + b \cdot e + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \, .$$

Bemærk den numeriske parentes, der er sat om tælleren. Da koefficienterne (f.eks. koordinaterne) sagtens kan være negative, kan tælleren blive negativ. Da en afstand imidlertid aldrig kan være negativ, tages den numeriske (positive) værdi af tælleren.



Figur 30: Afstanden mellem punkt og linje måles altid vinkelret ned på linjen ...

Følgende tegning er taget fra bogen:



Figur 31: … hvilket er praktisk, når normalvektoren også står vinkelret på linjen.

Der vælges et vilkårligt punkt, $Q(x;y)$ på linjen. Det behøver ikke på nogen måde at være vinkelret på punktet *P*. *Q* vælges helt tilfældigt. I dette punkt afsættes en normalvektor, $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Vinklen mellem normalvektoren, $\vec{n}$, og vektor $\overrightarrow{QP}$ kaldes for *v*.

Nu benyttes (begge) definitionerne på skalarproduktet:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\vec{n} \bullet \overrightarrow{QP} = |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{QP}| \cdot \cos(v) = a \cdot (d-x) + b(e-y)}$$

Normalvektorens længde og længden af *z* kan også udtrykkes:

$$\underline{|\vec{n}| = \sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{og} \quad \underline{z = |\overrightarrow{QP}| \cdot \cos(v)}$$

Disse to udtryk indsættes i udtrykket for skalarproduktet:

$$\vec{n} \bullet \overrightarrow{QP} = \left|\vec{n}\right| \cdot \left|\overrightarrow{QP}\right| \cdot \cos(v) = a \cdot (d - x) + b(e - y)$$

$\Updownarrow$

$$\vec{n} \bullet \overrightarrow{QP} = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot z = ad - ax + be - by$$

Da $ax + by + c = 0$ i linjens ligning, er $c = -ax - by$

$$\sqrt{a^2 + b^2} \cdot z = ad + be + c$$

$\Updownarrow$

$$z = \frac{ad + be + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Q.E.D.

18. Determinanter:

Et lidt overset værktøj til bestemmelse af vinkel mellem to vektorer er at benytte determinanter. Umiddelbart kan udregningen af determinanter godt minde en hel del om måden, hvorpå man udregner skalarprodukter, så det kan give anledning til forvirring og at man i kampens hede kan huske forkert, når man skal foretage beregningerne.

Notationen omkring determinanter er, at de noteres på en af følgende to måder, som begge er lige gode:

$$\det\left(\vec{a};\vec{b}\right) \qquad \text{(Anbefales!)}$$

$$\left[\vec{a};\vec{b}\right]$$

Om determinanter, gælder følgende, når det er givet at $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$:

$$\det\left(\vec{a};\vec{b}\right)=\hat{a}\bullet\vec{b}=a_x\cdot b_y-b_x\cdot a_y \quad \left(\text{Bemærk: } \hat{a} \text{ samt rækkefølge og fortegn !!!}\right)$$

$$\det\left(\vec{a};\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin(v), \text{ hvor } v \text{ er vinklen mellem de to vektorer.}$$

$$\sin(v)=\frac{\hat{a}\bullet\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{a_x\cdot b_y-b_x\cdot a_y}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$$

Det erindres, at et udtryk, som minder meget om dette, kunne opskrives for skalarproduktet mellem vektorerne:

$$\vec{a}\bullet\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y$$

$$\vec{a}\bullet\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos(v), \text{ hvor } v \text{ er vinklen mellem de to vektorer.}$$

$$\cos(v)=\frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$$

Bemærk, at dette allerede er beskrevet i kapitlet om "Skalarproduktet". Det er kun medtaget her for sammenligningens skyld!

19. Opgaver fra "Teknisk Matematik":

Opgave 422 Vektorer i planet (Afbildning og bestemmelse af vektorer) p. 544

Givet flg. Punkter: $A_{(7;8)}$, $B_{(3;2)}$, $C_{(2;4)}$, $D_{(1;9)}$, $E_{(-1;-6)}$ og $F_{(-8;-3)}$
Punkterne danner tre vektorer: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ og $\overrightarrow{EF}$.

a) Indtegn vektorerne i et koordinatsystem.

b) Bestem vektorernes koordinater.

c) Bestem $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{CD}|$ og $|\overrightarrow{EF}|$.

Opgave 423 Vektorer i planet (Afbildning og bestemmelse af vektorer) p. 544

Givet vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Vektor $\vec{a}$ indlægges i et koordinatsystem og skal have begyndelsespunkt i $(2;1)$.

a) Bestem $|\vec{a}|$.

b) Bestem koordinaterne til pilpunktet til $\vec{a}$.

Opgave 424 Vektorer i planet (Afbildning og bestemmelse af vektorer) p. 544

Givet vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Vektor $\vec{b}$ indlægges i et koordinatsystem, hvor den har pilpunktet $(3;-1)$.

a) Bestem $|\vec{b}|$.

b) Bestem koordinaterne til begyndelsespunktet for $\vec{b}$.

Opgave 425 Vektorer i planet (Skalering) p. 546

Givet 3 stedvektorer: $A_{(9;2)}$, $B_{(-3;5)}$ og $C_{(7;-4)}$

a) Bestem stedvektorernes længder.

b) Bestem vinklerne, som stedvektorerne danner med vandret.

Opgave 426 Vektorer i planet (Skalering) p. 546

Bestem koordinaterne til en stedvektor $\vec{a}$'s endepunkt, når den danner en vinkel på 42° med *x*-aksens positive akse og har længden $|\vec{a}| = 7$.

Opgave 427 Vektorer i planet (Skalering) p. 546

Bestem vektoren $\vec{b}$'s endepunkt, når den danner en vinkel på 254° med *x*-aksens positive akse og har længden $|\vec{b}| = 9$.

Opgave 428 Vektorer i planet (Skalering) p. 546

Givet er en vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, som er beliggende i et koordinatsystem med begyndelsespunkt i $(4;2)$.

a) Bestem $|\vec{a}|$.

b) Bestem koordinaterne til vektorens pilpunkt i koordinatsystemet.

c) Bestem koordinaterne til: $-\frac{1}{2} \cdot \vec{a}$.

d) Bestem $\left| -\frac{1}{2} \cdot \vec{a} \right|$.

Vektor $\left| -\frac{1}{2} \cdot \vec{a} \right|$ har begyndelsespunkt i $(x;y) = (1;1)$.

e) Bestem koordinaterne til vektor $\left| -\frac{1}{2} \cdot \vec{a} \right|$'s pilpunkt.

Opgave 429 Vektorer i planet (Vektoraddition) p. 551

Bestem længden $\left|\vec{e}+\vec{f}\right|$, når vektor $\left|\vec{e}\right|$ = 39,2 og vektor $\left|\vec{f}\right|$ = 16,3 og når de danner en vinkel på 138° med hinanden.

Opgave 430 Vektorer i planet (Vektoraddition) p. 551

Bestem længden $\left|\vec{p}+\vec{q}\right|$, når vektor $\left|\vec{p}\right|$ = 11,52 og vektor $\left|\vec{q}\right|$ = 21,53 og når de danner en vinkel på 72,4° med hinanden.

Opgave 431 Vektorer i planet (Vektoraddition) p. 551

Givet to vektorer: $\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$.

a) Bestem koordinaterne til vektor $-\vec{a}$.
b) Bestem koordinaterne til vektor $-\vec{b}$.
c) Bestem koordinaterne til resultanten $\vec{a}+\vec{b}$.
d) Bestem koordinaterne til vektoren $2\cdot\vec{a}$.
e) Bestem koordinaterne til vektoren $\frac{1}{2}\cdot\vec{b}$.
f) Bestem koordinaterne til resultanten $2\cdot\vec{a}+\frac{1}{2}\cdot\vec{b}$.

Opgave 432 Vektorer i planet (Vektoraddition) p. 552

Givet tre vektorer: $\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ og $\vec{c}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

a) Bestem koordinaterne til resultanten

b) Bestem længden af resultanten

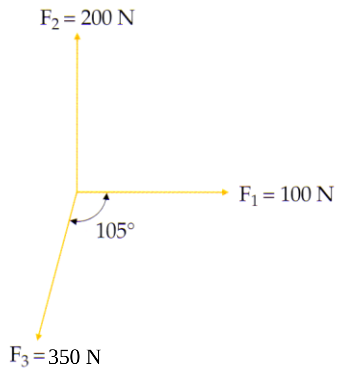
Opgave 433 Vektorer i planet (Ligevægt) p. 553

Givet to vektorer: $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$.

Bestem en vektor (størrelse og retning), der kan holde ligevægt med summen af vektor og vektor $\vec{b}$.

Notat om vektorer – Opgaver fra ”Teknisk Matematik”

Opgave 434 Vektorer i planet (Ligevægt) p. 553!



Bestem den kraftvektor, der i størrelse og retning kan holde ligevægt med de tre givne kraftvektorer.

Opgave 435 Vektorer i planet (Komposanter) p. 558

Givet tre vektorer: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Vektor $\vec{a}$ skal opløses i to komposanter, der går i henholdsvis vektor $\vec{b}$ ’s og vektor $\vec{c}$ ’s retning.

a) Bestem koordinaterne til komposanterne:

Opgave 436 Vektorer i planet (Komposanter) p. 558

Fem vektorer, alle med længden 4, danner henholdsvis vinklerne 12°, 80°, 164°, 232° og 302° med *x*-aksens positive retning.

a) Bestem koordinaterne til resultanten af de fem vektorer.

b) Bestem længden af resultanten.

c) Bestem den vinkel som resultanten danner med *x*-aksen.

Opgave 437 Vektorer i planet (Komposanter) p. 559

Fire vektorer med længderne 4, 5, 6 og 7 danner henholdsvis vinklerne 40°, 110°, 140° og 190° med *x*-aksens positive retning.

a) Bestem koordinaterne til resultanten af de fire vektorer.

b) Bestem længden af resultanten.

c) Bestem den vinkel som resultanten danner med *x*-aksen.

Opgave 438 Vektorer i planet (Vektorsubtrahering) p. 561

Vektor $\vec{p}$ har længden 11,3, vektor $\vec{b}$ har længden 8,98 og vinklen mellem de to vektorer er 113°.

a) Bestem længden af sumvektoren $\vec{p}+\vec{b}$.

b) Bestem længden af differensvektoren $\vec{p}-\vec{b}$.

Opgave 439 Vektorer i planet (Vektorsubtrahering) p. 562

Vektor $\vec{u}$ har længden 11, vektor $\vec{v}$ har længden 16 og vinklen mellem de to vektorer er 36°.

a) Bestem længden af sumvektoren $\vec{u}+\vec{v}$.

b) Bestem længden af differensvektoren $\vec{u}-\vec{v}$.

Opgave 440 Vektorer i planet (Vektorsubtraktion) p. 562

Givet tre vektorer: $\vec{r}$, $\vec{s}$ og $\vec{t}$

$|\vec{r}| = 3{,}48$, og danner vinklen 44,3° med *x*-aksen.

$|\vec{s}| = 4{,}16$, og danner vinklen 116,8° med *x*-aksen.

$|\vec{t}| = 6{,}16$, og danner vinklen 321,6° med *x*-aksen.

a) Bestem koordinaterne til vektoren.
b) Bestem $|\vec{r}-\vec{s}+\vec{t}|$.

c) Bestem den vinkel, som $\vec{r}-\vec{s}+\vec{t}$ danner med *x*-aksen.

Opgave 441 Vektorer i planet (Vektorsubtraktion) p. 562

Givet tre vektorer:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ og $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

a) Bestem koordinaterne til $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ samt $\left|\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}\right|$.

b) Bestem koordinaterne til $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ samt $\left|\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}\right|$.

c) Bestem koordinaterne til $-\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ samt $\left|-\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}\right|$.

Opgave 442 Vektorer i planet (Enhedsvektor) p. 563

Givet punkterne $A(4;1)$ og $B(-2{,}5)$ i et almindeligt koordinatsystem.

Bestem koordinaterne til vektor $\overrightarrow{AB}$'s enhedsvektor $\vec{e}$.

Opgave 443 Vektorer i planet (Enhedsvektor) p. 564

Givet vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix}$

Bestem koordinaterne til vektor $\vec{a}$'s enhedsvektor $\vec{e}$.

Opgave 444 Vektorer i planet (Enhedsvektor) p. 564

Givet vektorerne $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ og $\vec{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Bestem koordinaterne til sumvektoren $\vec{r} + \vec{s}$'s enhedsvektor $\vec{e}$.

b) Bestem koordinaterne til sumvektoren $\vec{r} - \vec{s}$'s enhedsvektor $\vec{e}$.

Opgave 445 Vektorer i planet (Enhedsvektor i koordinatsystemet) p. 565

Givet vektorerne $\vec{a} = 4 \cdot \vec{i} + \vec{j}$ og $\vec{b} = -\vec{i} + 2 \cdot \vec{j}$

Husk at vektorerne $\vec{i}$ og $\vec{j}$ blot er enhedsvektorer i hhv. *x*-aksens og *y*-aksens retning.

a) Bestem koordinaterne til $\vec{a}$ og længden $|\vec{a}|$.

b) Bestem koordinaterne til $\vec{b}$ og længden $|\vec{b}|$.

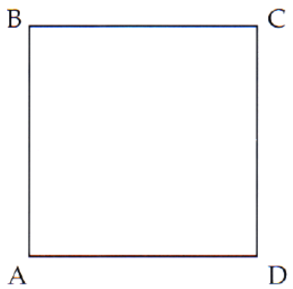
c) Bestem koordinaterne til $\vec{a} + \vec{b}$ og længden $|\vec{a} + \vec{b}|$.

d) Bestem koordinaterne til $\vec{a} - \vec{b}$ og længden $|\vec{a} - \vec{b}|$.

e) Bestem koordinaterne til $5 \cdot \vec{a} - 1{,}5 \cdot \vec{b}$ og længden $|5 \cdot \vec{a} - 1{,}5 \cdot \vec{b}|$.

Opgave 446 Vektorer i planet (Skalarprodukt) p. 567

Givet et kvadrat med sidelængde lig med 3:



Bestem følgende skalarprodukter:

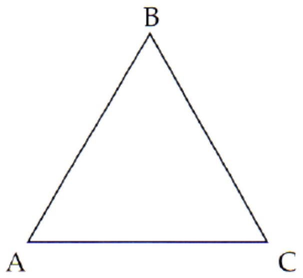
a) $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CD}$

b) $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BD}$

Opgave 447 Vektorer i planet (Skalarprodukt) p. 567

Givet en ligesidet trekant med sidelængde lig med 5.



Bestem følgende skalarprodukter:

a) $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC}$

c) $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BA}$

Opgave 448 Vektorer i planet (Skalarprodukt) p. 570

Bestem vinklen mellem vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$, når:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

Opgave 449 Vektorer i planet (Skalarprodukt) p. 571

Bestem *t* således at vektor $\vec{a}$ og vektor $\vec{b}$ kommer til at stå vinkelret på hinanden.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ t \end{pmatrix}$ **og** $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} t \\ 3 \end{pmatrix}$ **og** $\vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ -12 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ **og** $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Opgave 450 Vektorer i planet (Skalarprodukt) p. 571

I et koordinatsystem er givet en trekant *ABC* med *A*(–2;2), *B*(8; –8) og *C*(–4; –4).

a) Undersøg om trekanten er retvinklet.

b) Bestem størrelsen af trekantens vinkler.

Opgave 451 Vektorer i planet (Skalarprodukt) p. 571

I et koordinatsystem er givet fire punkter $A_{(-1;2)}$, $B_{(1;6)}$, $C_{(9,2)}$ og $D_{(7;-2)}$.

Undersøg om firkant *ABCD* er et rektangel.

Opgave 452 Vektorer i planet (Skalarprodukt) p. 571
Undlad i opgavesæt !!!

Givet vektorerne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bemærk, at fortegnet er ændret på vektor $\vec{b}$ ’s *x*-koordinat i forhold til i opgaven, samt at vektor $\vec{a}$ ’s koordinater er ombyttet. Ellers kan det ikke lade sig gøre i forhold til facitlisten!

Undersøg om vektorerne $\left(4 \cdot \vec{a} - \vec{b}\right)$ **og** $\left((-2) \cdot \vec{a} + 3 \cdot \vec{b}\right)$ **står vinkelret på hinanden.**

Opgave 453 Vektorer i planet (Tværvektor) p. 572

Bestem koordinaterne til tværvektoren a , når:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \end{pmatrix}$

Opgave 454 Vektorer i planet (Tværvektor) p. 572

Givet vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ med begyndelsespunkt: $(7;9)$.

Bestem tværvektorens a 's pilpunkt i koordinatsystemet.

Opgave 455 Vektorer i planet (Tværvektor) p. 572

En trekant er beliggende i et koordinatsystem og har hjørnepunkterne $(0;0)$, $(-1;-4)$ og $(5;-4)$. Trekanten drejes 90° mod uret om $(0;0)$.

Bestem koordinaterne til den nye trekants hjørnepunkter.

Opgave 456 Vektorer i planet (Tværvektor) p. 573

Et kvadrat *ABCD* er beliggende i et koordinatsystem med $A_{(1;-4)}$ og $B_{(0;2)}$.

Bestem koordinaterne til *C* og *D*.

Opgave 457 Vektorer i planet (Tværvektor) p. 573

Givet vektorerne $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ og $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

a) Bestem koordinaterne til vektoren $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ samt $\left|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right|$.

b) Bestem koordinaterne til vektoren til $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ samt $\left|\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}\right|$.

c) Bestem skalarproduktet af $3 \cdot \vec{b} \bullet \left(\vec{a} - \vec{c}\right)$.

d) Bestem koordinaterne til vektoren $-5 \cdot \vec{c}$.

e) Bestem koordinaterne til vektoren $-5 \cdot \hat{c}$.

f) Bestem koordinaterne til vektoren $-5 \cdot \hat{\hat{c}}$.

g) Bestem skalarproduktet af $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \bullet \left(\vec{b} - \vec{a}\right)$.

h) Bestem $\angle\left(\vec{b}, \vec{c}\right)$.

Opgave 458 Vektorer i planet (Areal og tyngdepunkt) p. 576

Bestem areal og koordinaterne til tyngdepunktet i følgende trekanter, hvor hjørnerne er:

a) $A_{(0;0)}$, $B_{(4;6)}$ og $C_{(7;5)}$

b) $A_{(-2;-3)}$, $B_{(-5;6)}$ og $C_{(-1;-7)}$

c) $A_{(3;-1)}$, $B_{(2;3)}$ og $C_{(-2;1)}$

Opgave 459 Vektorer i planet (Projektion) p. 579

Givet to vektorer $|\vec{a}|=7$ og $|\vec{b}|=3$. Endvidere er vinklen mellem de 2 vektorer 60°.

a) Bestem længden af vektor $\vec{b}$'s projektion på vektor $\vec{a}$.

b) Bestem længden af vektor $\vec{a}$'s projektion på vektor $\vec{b}$.

c) Bestem længden af differensvektor $\vec{a}-\vec{b}$'s projektion på vektor $\vec{a}$.

d) Bestem længden af differensvektor $\vec{a}-\vec{b}$'s projektion på vektor $\vec{b}$.

Opgave 460 Vektorer i planet (Projektion) p. 580

Givet vektorerne $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$

Projicér vektor $\vec{b}$ på vektor $\vec{a}$ og bestem projektionsvektorens længde og dens koordinater.

Opgave 461 Vektorer i planet (Normalvektor/Afstand) p. 582

Givet en linje $k: -2x+4y-8=0$

Bestem:

a) Koordinaterne til linjens normalvektor $\vec{n}$.

b) Afstanden mellem linjen og punktet $(2,6)$.

c) Afstanden mellem linjen og punktet $(0,0)$.

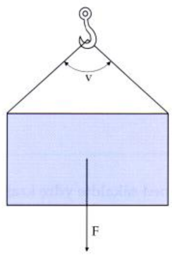
Opgave 462 Vektorer i planet (Normalvektor/Afstand) p. 582

Givet linjerne $4x+12y-60=0$ og $3x+9y+18=0$

Bestem afstanden mellem de to linjer.

Opgave 463 Vektorer i planet (Problemopgaver) p. 583

En container med en samlet tyngde F = 25 kN (kiloNewton) skal løftes af en kran. Til løfteopgaven anvendes wirer med forskellig længde.



For at vurdere belastningen af wirerne, skal størrelsen af kræfter i wirerne bestemmes, når vinklen v (se figuren) er:

a) $v = 60°$

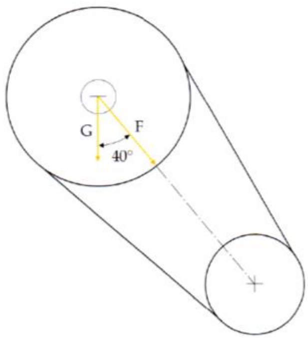
b) $v = 90°$

c) $v = 120°$

d) $v = 150°$

Opgave 464 Vektorer i planet (Problemopgaver) p. 584

En aksel er gennem et kileremstræk påvirket af tyngden af en kileremsskive $|\vec{G}| = 1{,}2\,\text{kN}$ og gennem kileremstrækket af en kraft $|\vec{F}| = 3{,}43\,\text{kN}$, som virker i retningen som vist på figuren.

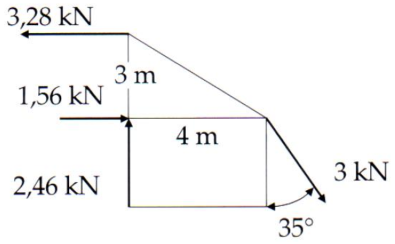


a) Bestem den resulterende kraftpåvirkning på akslen.

b) Bestem retningen af den resulterende kraftpåvirkning.

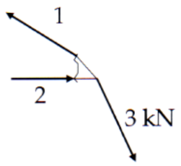
Opgave 465 Vektorer i planet (Problemopgaver) p. 584

En gitterkonstruktion er belastet med såkaldte ydre kræfter som vist på figuren.



a) Vis, at summen af de ydre kræfter er lig med 0.

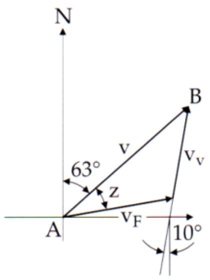
I knudepunktet som vist på figuren, skal summen af ydre kræfter og de indre kræfter være lig med 0. De indre kræfter er kræfterne i stængerne.



b) Ud fra de nævnte forudsætninger, skal størrelsen af stangkraft nr. 1 og størrelsen af stangkraft nr. 2 bestemmes.

Opgave 466 Vektorer i planet (Problemopgaver) p. 585

En flyvemaskine flyver fra en lufthavn *A* mod en anden lufthavn *B*, der ligger som vist på figuren i en retning på 63° i forhold til nord.



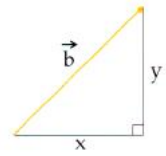
Flyvemaskinens hastighed $|\vec{v_f}|$ er 310 km/timen, men der er samtidig en vind fra syd (10° i forhold til nord). Vindens hastighed $|\vec{v_v}|$ er målt til 8 meter/sekund.

a) Bestem vinkel *z* under forudsætning af, at flyvemaskinen flyver direkte mod lufthavn *B*.

b) Bestem flyvemaskinens resulterende hastighed, *v*.

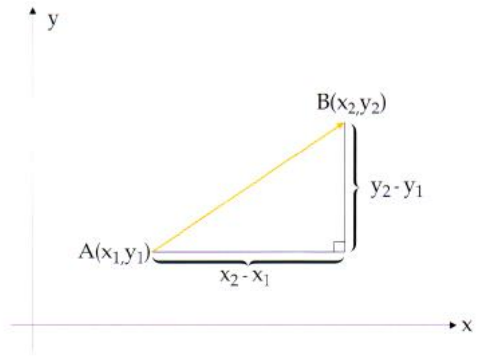
Vektorkoordinater

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



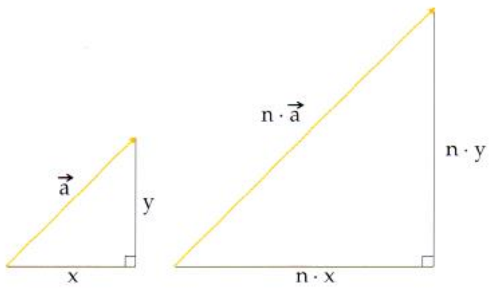
Vektorkoordinater i et koordinatsystem

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$



Multiplikation af skalar med vektor

$$n \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} n \cdot x \\ n \cdot y \end{pmatrix}$$

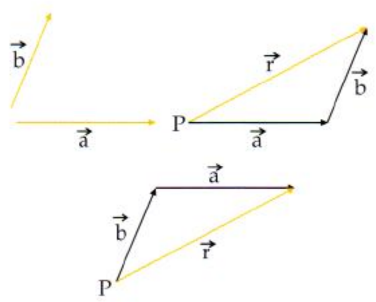


Addition af to vektorer

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$$

Hvis $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ er

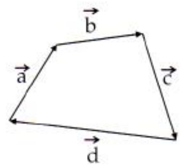
$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$



Notat om vektorer – Formelsamling fra bogen

Vektorer i ligevægt

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

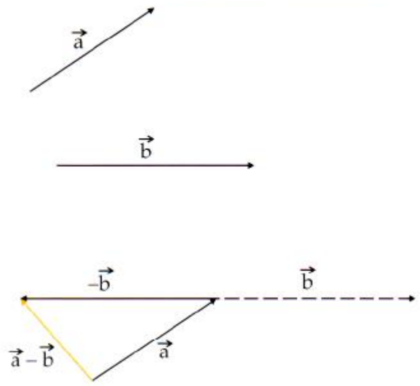


Subtraktion af vektorer

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Hvis $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ er

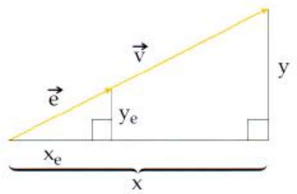
$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$$



Enhedsvektor

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \end{pmatrix}$$

$$x_e = \frac{x}{|\vec{v}|} \quad \text{og} \quad y_e = \frac{y}{|\vec{v}|}$$

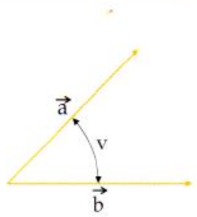


Skalarprodukt

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos v$$

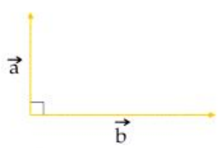
$$\vec{a} \bullet \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

$$\cos v = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$



$$\cos v = \vec{e}_a \bullet \vec{e}_b$$

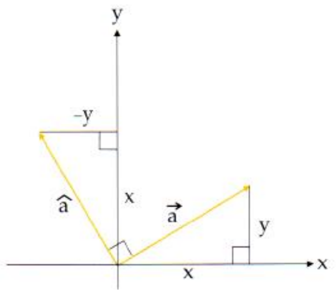
Skalarproduktet $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$, når vektorerne står vinkelret på hinanden.



Tværvektor

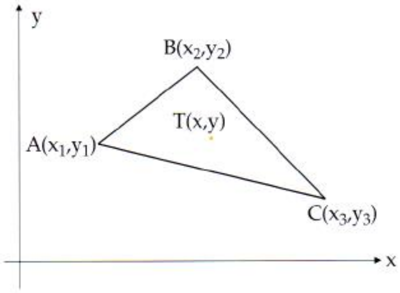
Hvis $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ er

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$



Trekantens tyngdepunkt

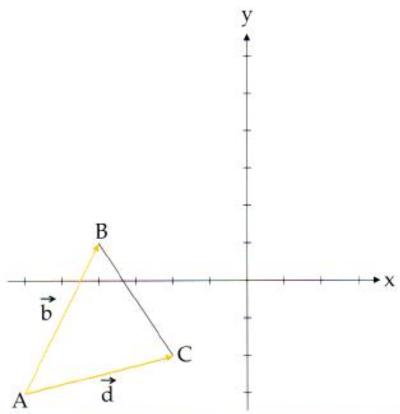
$$T(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$



Trekantens areal

$$\text{Areal} = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{matrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1|$$

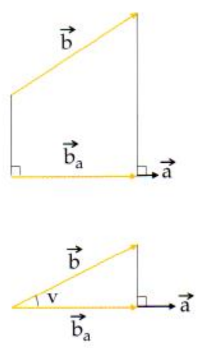


Projektion

$$|\vec{b_a}| = |\vec{b}| \cdot \cos v$$

$$|\vec{b_a}| = \frac{|\vec{a} \bullet \vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

$$\vec{b_a} = |\vec{b_a}| \cdot \vec{e_a}$$



Notat om vektorer – Formelsamling fra bogen

Afstand fra punkt til ret linje	
$z = \dfrac{\lvert ad + be + c \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2}}$