MATEMATIK

NOTAT

17 - DIFFERENTIALLIGNINGER

AF:

CAND. POLYT.

MICHEL MANDIX

SIDSTE REVISION: APRIL 2024

Indholdsfortegnelse:

Differentialligninger - Introduktion

I. $y' = h(x)$

dfd

II. $y'' = h(x)$

III. $y' = g(y) \cdot h(x)$

IV. $y' = a \cdot y$

V. $y' = g(y)$

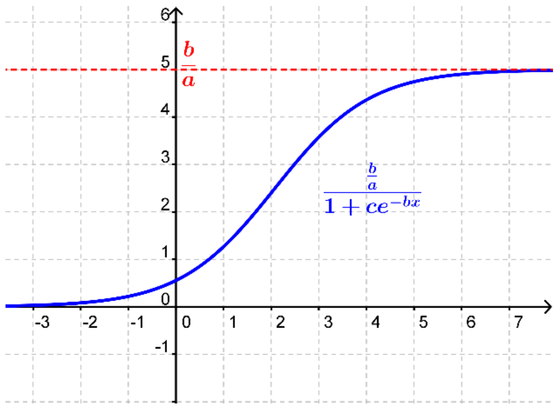
VI. $y' = y(b - ay)$ (Logistisk vækst)

Den logistiske vækst er en vigtig differentialligning, for den er ofte "redningen" i forbindelse med opstillingen af matematiske modeller. Forklaringen på dette skal findes i, at man ofte – bl.a. i medierne hører, at: "Befolkningstallet er eksponentielt voksende", men hvis man tænker lidt over det, så er det jo i virkeligheden noget sludder, for hvis befolkningstallet i et-eller-andet-land er eksponentielt voksende, så vil der jo på et tidspunkt hverken være plads eller ressourcer til at understøtte dette befolkningstal.

Med andre ord, så er det realistiske billede snarere, at befolkningstallet er voksende i en grad der kan minde om en eksponentiel udvikling, men pga. diverse faktorer, så vil stigningen af befolkningstallet på et tidspunkt flade ud og i sidste ende gå mod en konstant værdi. Det er her, at differentialligningen af typen: Logistisk vækst kommer ind i billedet. Løsningen af denne type differentialligning vil netop opføre sig således, nemlig at den begynder at vokse ud fra en funktionsværdi som ligner 0 (nul), og som begynder at vokse efter et eksponentielt mønster og ender med at flade ud og gå imod en konstant funktionsværdi.

Også i forbindelse med f.eks. smittespredning er den logistiske vækst praktisk. Det er jo ikke muligt at smitte flere end den samlede befolkning, så det er vel indlysende, at den eksponentielle udvikling (uden loft) ikke er meget bevendt. Den logistiske vækst vil derimod nærme sig et maksimum, som i smittespredningseksemplet må være den samlede befolkning.

Dette er bare et par eksempler. Det er klart, at denne matematiske model har masser af muligheder for bedre at beskrive en situation med en matematisk model, end den ofte (og ofte forkert) anvendte eksponentielle model.



Differentialligningen betragtes:

$$\frac{dy}{dx} = y(b - ay), \qquad a, b \in \mathbb{R}_+$$

Denne differentialligning har løsningen:

$$y = \frac{\frac{b}{a}}{1 + c \cdot e^{-bx}}, \qquad a, b \in \mathbb{R}_+$$

Det er – efter en vis tankevirksomhed – indlysende, at *a* og *b* skal være strengt positive, hvis man betragter grafen for løsningen til denne differentialligning.

Måske kan man endnu bedre indse dette, hvis man foretager følgende omskrivning af differentialligningen:

$$\frac{dy}{dx} = ky(M - y), \qquad k, M \in \mathbb{R}_+ \qquad \left(\text{hvor } a = k, \text{ og } M = \frac{b}{a} \text{ i forhold til forrige opskrivning}\right)$$

Det erindres at $\frac{dy}{dx}$ er et udtryk for differentialkvotienten eller for hældningen af funktionen *y*.

Det kræver lige en tanke, når differentialligningen betragtes. Der kan gives et mere end kvalificeret gæt på, hvordan løsningen kommer til at se ud.

Løsningen, *y*, på hældningskurven er proportional med *y* selv, men det gælder kun for meget "små" værdier for *y*. Det kommer sig af parentesen ($M - y$). Hvis *y* er et (meget) lille tal så vil denne parentes blot give værdien *M*.

Derved kommer differentialligningen til at se således ud: $\frac{dy}{dx} = k \cdot M \cdot y, \quad k, M \in \mathbb{R}_+$

Løsningskurven går altså imod 0, når *y* går imod 0.

Altså er hældningen proportional med *y* – altså en eksponentiel vækst, idet hældningen vokser når *y* vokser. Igen, så gælder dette kun for små værdier af *y*.

For store værdier af *y* – dvs. når *y* antager værdier, som er tæt på *M*, så betragtes igen parentesen ($M - y$).
Denne parentes giver lige det modsatte, nemlig at denne parentes gå imod værdien $M - M = 0$.

Dette betyder at differentialligningen til at se således ud: $\frac{dy}{dx} = k \cdot 0 \cdot y = 0, \quad k, M \in \mathbb{R}_+$.

Altså vil hældningen af løsningskurven gå imod 0, når *y* nærmer sig *M*.

Derfor kommer løsningskurven til at se ud som den på ovenstående figur, hvor kurven flader ud og bliver nærmest vandret, når *y* kommer fra en værdi tæt på 0 med en vækst som minder om en eksponentiel vækst og efterhånden som grafen for løsningen nærmer sig populationens mætningsværdi (*M*), så flader kurven igen ud og bliver nærmest vandret.

Der eksisterer to trivielle løsninger til differentialligningen.

Den ene er $y = 0$. Hvis $y = 0$, så betragtes løsningskurven, der hvor $y = 0$ og det er jo på *x*-aksen. Ser man på løsningskurven, når den nærmer sig *x*-aksen, så bliver den jo vandret – dvs. Hældningen på venstresiden, som er lig med $\frac{dy}{dx}$ er lig med 0. Højresiden giver også 0, for når $y = 0$, så multiplicerer man jo $k \cdot (M\ )$ med 0, hvorved også højresiden giver 0. Dette kaldes for den trivielle nulløsning.

Den anden trivielle løsning er, hvis $y = M$. Igen ses det på grafen, at grafens hældning (= højresiden) er vandret (lig med 0), når *y* nærmer sig *M*. På højresiden kommer der til at stå: $k \cdot y \cdot 0 = 0$.

Begge disse løsninger er uinteressante, idet de ikke beskæftiger sig med populationens størrelsen.

Som allerede skitseret, kan man beskrive **alle andre løsninger** til differentialligningen som:

$$y = \frac{M}{1 + c \cdot e^{kMx}}, \quad k, M \in \mathbb{R}_+ \quad \text{eller} \quad y = \frac{\frac{b}{a}}{1 + c \cdot e^{-bx}}, \quad a, b \in \mathbb{R}_+$$

Dette kan bevises på mindst tre følgende måder:

Bevis ved indsættelse:

Som altid, kan man bevise at en funktion er en løsning til en differentialligning ved at differentiere funktionen og derefter indsætte hhv. udtrykket for *y* og for *y*' i udtrykket for differentialligningen og se, om det stemmer.

Så først differentieres løsningsfunktionen: *y* for at finde venstre side af differentialligningen.

Det ses, at udtrykket er en brøk, og derfor anvendes formlen for differentiation af en brøkfunktion:

$$y=\frac{M}{1+c\cdot e^{-kMx}}=\frac{u(x)}{v(x)} \qquad \begin{cases} u(x)=M \\ v(x)=1+c\cdot e^{-kMx} \end{cases} \qquad \begin{aligned} &u'(x)=0 \\ &v'(x)=-kM\cdot c\cdot e^{-kMx} \end{aligned}$$

$$y'=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}=\frac{0\cdot\left(1+c\cdot e^{-kMx}\right)-M\cdot\left(-kM\cdot c\cdot e^{-kMx}\right)}{\left(1+c\cdot e^{-kMx}\right)^2}$$

$\Updownarrow$

$$y'=\frac{-M\cdot\left(-kM\cdot c\cdot e^{-kMx}\right)}{\left(1+c\cdot e^{-kMx}\right)^2} \Leftrightarrow \underline{y'=\frac{dy}{dx}=\frac{kM^2\cdot c\cdot e^{-kMx}}{\left(1+c\cdot e^{-kMx}\right)^2}}$$

De to udtryk er nu klar til at blive indsat i differentialligningens højre side:

$$\textit{Venstre Side}=\textit{Højre Side}$$

$\Updownarrow$

$$\frac{dy}{dx}=k\cdot y\cdot(M-y)=k\cdot y\cdot M-k\cdot y^2$$

$\Updownarrow$

$$\frac{kM^2\cdot c\cdot e^{-kMx}}{\left(1+c\cdot e^{-kMx}\right)^2}=k\cdot\frac{M}{1+c\cdot e^{-kMx}}\cdot M-k\cdot\left(\frac{M}{1+c\cdot e^{-kMx}}\right)^2=\frac{k\cdot M^2}{1+c\cdot e^{-kMx}}-\frac{k\cdot M^2}{\left(1+c\cdot e^{-kMx}\right)^2}$$

$\Updownarrow$ (Sætter *Højre Side* på fællesnævner)

$$\frac{kM^2\cdot c\cdot e^{-kMx}}{\left(1+c\cdot e^{-kMx}\right)^2}=\frac{k\cdot M^2\cdot\left(1+c\cdot e^{-kMx}\right)}{\left(1+c\cdot e^{-kMx}\right)\cdot\left(1+c\cdot e^{-kMx}\right)}-\frac{k\cdot M^2}{\left(1+c\cdot e^{-kMx}\right)^2}=\frac{k\cdot M^2\cdot\left(1+c\cdot e^{-kMx}\right)-k\cdot M^2}{\left(1+c\cdot e^{-kMx}\right)^2}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{\frac{kM^2\cdot c\cdot e^{-kMx}}{\left(1+c\cdot e^{-kMx}\right)^2}=\frac{k\cdot M^2+k\cdot M^2\cdot c\cdot e^{-kMx}-k\cdot M^2}{\left(1+c\cdot e^{-kMx}\right)^2}=\frac{k\cdot M^2\cdot c\cdot e^{-kMx}}{\left(1+c\cdot e^{-kMx}\right)^2}}} \qquad \text{Q.E.D}$$

Differentialligninger

Differentialligningen kan også bevises ved at anvende separationsmetoden (Type V):

$$y' = \frac{dy}{dx} = y(b-ay) \Leftrightarrow \frac{dy}{y(b-ay)} = dx \qquad (\text{Separationsmetoden - } g(x)=1)$$

$\Updownarrow$ Der integreres på begge sider, som normalt. Højresiden er givet ved type V.

$$\int \frac{1}{y(b-ay)}dy = x + c$$

Mellemregning: Brøken opdeles i to brøker

Antagelse: $$\frac{1}{y(b-ay)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{b-ay} \Leftrightarrow \frac{y(b-ay)}{y(b-ay)} = \frac{A}{y}\cdot y(b-ay) + \frac{B}{b-ay}\cdot y(b-ay)$$

$\Updownarrow$

$$1 = A\cdot(b-ay) + By \Leftrightarrow 1 = Ab - Aay + By \Leftrightarrow 1 = Ab + y(-Aa+B)$$

(Da y er en variabel (Det skal gælde for alle y), vælges det (midlertidigt) at sætte $y=0$)

Da $y=0$ forsvinder det andet led på højresiden (Det giver 0), og efterlader:

$$Ab = 1 \Leftrightarrow \underline{A = \frac{1}{b}}$$

Det andet led på højresiden behandles:

$$y(-Aa+B) = 0 \Leftrightarrow -Aay + By = 0 \Leftrightarrow -Aa + B = 0 \qquad (\text{Dividerer med } y)$$

$\Updownarrow$

$$B = aA \Leftrightarrow B = a\cdot\frac{1}{b} \Leftrightarrow \underline{B = \frac{a}{b}} \qquad \left(\text{Da } A = \frac{1}{b}\right)$$

Mellemregning:

Da: $$\frac{1}{y(b-ay)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{b-ay} = \frac{1}{by} + \frac{1}{b}\cdot\frac{a}{b-ay} = \frac{1}{b}\cdot\frac{1}{y} + \frac{a}{b}\cdot\frac{1}{b-ay}$$

Tilbage til beviset:

$$\int \frac{1}{y(b-ay)}dy = \frac{1}{b}\int\frac{1}{y}dy + \frac{a}{b}\int\frac{1}{b-ay}dy = \frac{1}{b}\ln|y| + \frac{1}{b}\int\frac{a}{b-ay}dy = x + c$$

(c er nu fælles arbitrær konstant for de to integraler)

$\Updownarrow$ (Fortsættes)

$\Updownarrow$ (Fortsat) Integration ved substitution:

$$\int \frac{1}{y(b-ay)}dy = \frac{1}{b}\ln|y| - \frac{1}{b}\int \frac{a}{a\cdot u}du = x+c \qquad \boxed{u = b-ay \quad \frac{du}{dy} = -a \Leftrightarrow dy = -\frac{du}{a}}$$

$\Updownarrow$

$$\int \frac{1}{y(b-ay)}dy = \frac{1}{b}\ln|y| - \frac{1}{b}\ln|b-ay| = \frac{\ln|y|-\ln|b-ay|}{b} = x+c$$

$\Updownarrow$ (Ganger igennem med $-b$)

$$-\ln|y| + \ln|b-ay| = -x+c$$

$\Updownarrow$

$$\ln|b-ay| - \ln|y| = -x+c$$

$\Updownarrow$

$$\frac{\ln\left(\frac{b-ay}{y}\right)}{b} = -x+c, \qquad 0 < y < \frac{b}{a},$$

hvilket passer fint, da mætningsgraden er mellem 0 og $\frac{b}{a}$. Sikrer man sig ved at sætte denne begrænsning, kan parenteserne omkring ln udskiftes med runde parenteser, da argumentet kun kan være positivt.

$\Updownarrow$

$$\ln\left(\frac{b-ay}{y}\right) = -bx+bc$$

(Ganger igennem med b)

$\Updownarrow$

$$e^{\ln\left(\frac{b-ay}{y}\right)} = e^{-bx+bc}$$

(Ophæver den naturlige logaritme ved at sætte begge sider som potens til e)

$\Updownarrow$

$$\frac{b-ay}{y} = e^{-bx+bc} \Leftrightarrow \frac{b-ay}{y} = c\cdot e^{-bx}, \quad c = e^{bc}$$

(c er en ny fortolkning af den arbitrære konstant)

$\Updownarrow$

$$\frac{b}{y} - a = c\cdot e^{-bx}$$

$\Updownarrow$

$$\frac{b}{y} = a + c\cdot e^{-bx}$$

$\Updownarrow$

$$y = \frac{b}{a+c\cdot e^{-bx}}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{y = \frac{\frac{b}{a}}{1+c\cdot e^{-bx}} \qquad a,b\in\mathbb{R}_+}} \qquad Q.E.D.$$

Det tredje og sidste bevis (her) er vha. Panserformlen.

Det kunne være lige så relevant (og måske endda mere) at placere dette bevis i det næste kapitel, som handler om første ordens lineære differentialligninger, som jo netop løses vha. Panserformlen, men det sættes her, da det trods alt er mere relevant at beskrive netop den logistiske differentialligning på ét sted.

Igen er givet differentialligningen: $\frac{dy}{dx} = a \cdot y \cdot (M - y), \quad a, M \in \mathbb{R}_+$. Pga. diverse omskrivninger senere hen, vælges det at arbejde med denne notation for differentialligningen. Det er dog muligt at føre det samme bevis for den "gode, gamle" notation med *a* og *b*.

Det ønskes vist, at den givne differentialligning har den ikke-trivielle fuldstændige løsning:

$$y = \frac{M}{1 + c \cdot e^{kMx}}, \quad k, M \in \mathbb{R}_+$$

Selve differentialligningen, $\frac{dy}{dx} = a \cdot y \cdot (M - y), \quad a, M \in \mathbb{R}_+$, omskrives ved at distribuere $a \cdot y$ ind i parentesen, hvilket giver:

$$\frac{dy}{dx} = a \cdot y \cdot (M - y), \quad a, M \in \mathbb{R}_+$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = a \cdot y \cdot M - a \cdot y^2$$

Dette er en **ikke**-lineær differentialligning af første orden med konstante koefficienter, så den kan ikke umiddelbart løses vha. Panserformlen.

Det viser sig, at hvis der indføres en passende funktionssubstitution, så kan differentialligningen føres tilbage til en lineær differentialligning med konstante koefficienter, hvor løsningen kan findes vha. Panserformlen.

Der indføres en substitution: $y = \frac{1}{z}, \quad z = z(x)$

Dette vil føre differentialligningen over i en lineær differentialligning af første orden med konstante koefficienter – i *z*. Så kan den løses mht. *z*, og derefter finde *y* vha. den oprindelige substitution, hvor *y* er den reciprokke værdi af *z*.

$y = \frac{1}{z}$ indsættes i differentialligningen.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{d}{dx}\left(z^{-1}\right) = -z^{-2} \cdot z' \qquad \text{(Differentieret som en sammensat funktion, og } z = z(x)\text{)}$$

Dette indsættes i den oprindelige differentialligning:

$$-z^{-2}\cdot z' = k\cdot z^{-1}\cdot\left(M - z^{-1}\right)$$

$\Updownarrow$

$$-z^{-2}\cdot z' = k\cdot M\cdot z^{-1} - k\cdot z^{-2}$$

$\Updownarrow$ Der ganges igennem med $\left(-z^{2}\right)$

$$-z^{2}\cdot\left(-z^{-2}\cdot z'\right) = -z^{2}\cdot\left(k\cdot M\cdot z^{-1} - k\cdot z^{-2}\right)$$

$\Updownarrow$

$$z' = -k\cdot M\cdot z + k$$

$\Updownarrow$

$$z' + k\cdot M\cdot z = k \qquad \left(\begin{array}{l}\text{Dette er en første ordens differentialligning med konstante koefficienter}\\ \left(\dfrac{dz}{dx} + k\cdot M\cdot z = k\right)\\ \left(\dfrac{dy}{dx} + a\cdot y = b \ \text{ kan løses som: } y = \dfrac{b}{a} + c\cdot e^{-a\cdot x}\right)\\ a = k\cdot M \qquad\qquad b = k\end{array}\right)$$

$\Updownarrow$

$$z = z(x) = \frac{k}{k\cdot M} + q\cdot e^{-k\cdot M\cdot x}$$

$\Updownarrow$

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{\dfrac{k}{k\cdot M} + q\cdot e^{-k\cdot M\cdot x}}$$

$\Updownarrow$

$$y = \frac{1}{\dfrac{1}{M} + q\cdot e^{-k\cdot M\cdot x}} = \frac{1}{\dfrac{1}{M} + \dfrac{M\cdot q\cdot e^{-k\cdot M\cdot x}}{M}} = \frac{1}{\dfrac{1 + M\cdot q\cdot e^{-k\cdot M\cdot x}}{M}} = \frac{M}{1 + c\cdot e^{-k\cdot M\cdot x}} \qquad \left(\text{Da } M\cdot q = c\right)$$

Q.E.D.

VII. Første ordens lin. diff.lign. med variable koefficienter

VII. $y' + f(x) \cdot y = g(x)$

En differentialligning af ovennævnte type, beskrives matematisk således:

$\boxed{\frac{dy}{dx} + f(x) \cdot y = g(x)}$ (Type 7.1)

Man kalder den lineær, fordi den er lineær i y. Den er ”pæn i y” og den er differentieret højest én gang.

Løsningen til denne type differentialligning er:

$\boxed{y = e^{-F(x)} \cdot \left\{ \int g(x) \cdot e^{F(x)} dx + c \right\}}$ distribueres faktoren $e^{-F(x)}$ ind i Tuborg-parentesen fås udtrykket:

$y = e^{-F(x)} \cdot \int g(x) \cdot e^{F(x)} dx + e^{-F(x)} \cdot c$ Denne løsning refereres ofte til som ”Panserformlen”.

Differentialligninger

Bevis:

$$\frac{dy}{dx}+f(x)\cdot y=g(x)$$

$\Updownarrow$ "Ganger igennem med $e^{F(x)}$"

$$\frac{dy}{dx}\cdot e^{F(x)}+f(x)\cdot y\cdot e^{F(x)}=e^{F(x)}\cdot g(x)$$

Hele venstresiden ses at være resultatet af differentiation med produktreglen:

$$f(x)=u(x)\cdot v(x) \Leftrightarrow f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+v'(x)\cdot u(x)$$

Dog skal der kombineres med kædereglen, da $e^{F(x)}$ er en sammensat funktion.

$$\frac{d}{dx}\left(e^{F(x)}\cdot y\right)=\frac{d}{dx}e^{F(x)}\cdot y+\frac{d}{dx}y\cdot e^{F(x)}=e^{F(x)}\cdot f(x)\cdot y+e^{F(x)}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$\Updownarrow$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{F(x)}\cdot y\right)=\frac{dy}{dx}\cdot e^{F(x)}+f(x)\cdot y\cdot e^{F(x)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{F(x)}\cdot y\right)=e^{F(x)}\cdot g(x)$$

$\Updownarrow$ Integrerer for at slippe af med $\frac{dy}{dx}$

$$\int\frac{d}{dx}\left(e^{F(x)}\cdot y\right)dx=\int e^{F(x)}\cdot g(x)\,dx$$

$\Updownarrow$ Integral og differentiation ophæver hinanden

$$e^{F(x)}\cdot y=\int e^{F(x)}\cdot g(x)\,dx+c$$

$\Updownarrow$ Dividerer med $e^{F(x)}$

$$y=\frac{\int e^{F(x)}\cdot g(x)\,dx+c}{e^{F(x)}}$$

$\Updownarrow$ $\frac{1}{a^n}=a^{-n}$ (Se evt. notat om regneregler)

$$y=e^{-F(x)}\cdot\left\{\int e^{F(x)}\cdot g(x)\,dx+c\right\}=e^{-F(x)}\cdot\int g(x)\cdot e^{F(x)}dx+e^{-F(x)}\cdot c$$

Q.E.D.

Ovenstående bevis benyttes til at bevise at:

Differentialligningen $\boxed{\frac{dy}{dx}+a\cdot y=b}$ (Type 7.2)

Har løsningen: $\boxed{y=\frac{b}{a}+c\cdot e^{-ax}}$

$$y = e^{-F(x)} \cdot \left\{ \int e^{F(x)} \cdot g(x)\,dx + c \right\}$$

$\Updownarrow$ $f(x) = a$ og $g(x) = b$

$$y = e^{-ax} \cdot \left\{ \int b \cdot e^{ax}\,dx + c \right\}$$

$\Updownarrow$ Konstanten "parkeres"

$$y = e^{-ax} \cdot \left\{ b \cdot \int e^{ax}\,dx + c \right\}$$

$\Updownarrow$ Integration ved substitution

$$y = e^{-ax} \cdot \left\{ b \cdot \frac{1}{a} \cdot e^{ax} + c \right\}$$

$\Updownarrow$ Distribuerer e^{-ax} ind i Tuborg-parentesen

$$\underline{\underline{y = \frac{b}{a} + c \cdot a^{-ax}}}$$

Q.E.D.

Beviset fra differentialligningen af type 7.1 benyttes ligeledes til at bevise at:

Differentialligningen $\boxed{\frac{dy}{dx} + a \cdot y = g(x)}$ (Type 7.3)

Har løsningen: $\boxed{y = e^{-ax} \int g(x) \cdot e^{ax}\,dx + c \cdot e^{-ax}}$

$$y = e^{-F(x)} \cdot \left\{ \int e^{F(x)} \cdot g(x)\,dx + c \right\}$$

$\Updownarrow$ $f(x) = a$ og $g(x) = g(x)$

$$y = e^{-ax} \cdot \left\{ \int g(x) \cdot e^{ax}\,dx + c \right\}$$

$\Updownarrow$ Distribuerer e^{-ax} ind i Tuborg-parentesen

$$\underline{\underline{y = e^{-ax} \int g(x) \cdot e^{ax}\,dx + c \cdot e^{-ax}}}$$

Q.E.D.

Sluttelig bruges beviset fra differentialligningen af type 7.1 til at vise at:

Differentialligningen $\boxed{\frac{dy}{dx} = k \cdot y}$ (Type 7.4)

Har løsningen: $\boxed{y = c \cdot e^{kx}}$

Først omskrives differentialligningen til formen:

$$\frac{dy}{dx} = k \cdot y$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{dy}{dx} - ky = 0$$

$$y = e^{-F(x)} \cdot \left\{ \int e^{F(x)} \cdot g(x)\,dx + c \right\}$$

$$\Updownarrow \qquad f(x) = -k \ \text{ og } \ g(x) = 0 \ \left(\text{Pas på med minus gange minus}\right)$$

$$y = e^{kx} \cdot \left\{ \int 0 \cdot e^{-kx} dx + c \right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$y = e^{kx} \cdot \left\{ \int 0\,dx + c \right\}$$

$$\Updownarrow$$

$\int 0\,dx$ forsvinder $(=0)$

Distribuerer e^{kx} ind i Tuborg-parentesen

$$\underline{\underline{y = c \cdot e^{kx}}}$$

Q.E.D.

Differentialligninger

Panserformlen anvendt i praksis:
Eksempel

$$y' + \frac{2}{x} \cdot y = 4x + 3$$

$$a(x) = \frac{2}{x} = 2 \cdot \frac{1}{x}, \qquad b(x) = 4x + 3, \qquad x \neq 0$$

$$A(x) = \int 2 \cdot \frac{1}{x} dx = 2 \cdot \int \frac{1}{x} dx$$

$\Updownarrow$

$$A(x) = 2 \cdot \ln|x|$$

$\Updownarrow$ $\ln\left(|a|^x\right) = x \cdot \ln|a|$ (Se evt. notat om regneregler)

$$A(x) = \ln\left(|x|^2\right)$$

$\Updownarrow$ x^2 er altid positiv

$$\underline{A(x) = \ln\left(x^2\right)}$$

$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$ (Se evt. notat om regneregler)

$e^{-\ln(x^2)} = e^{\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)} = e^{\ln(x^{-2})}$

$$y = f(x) = e^{\ln(x^{-2})} \cdot \int (4x+3) \cdot e^{\ln(x^2)} dx + c \cdot e^{\ln(x^{-2})}$$

$\Updownarrow$ $e^{\ln(a)} = a$ (Se evt. notat om regneregler)

$e^{\ln(x^{-2})} = x^{-2}$ og $e^{\ln(x^2)} = x^2$

$$y = f(x) = x^{-2} \cdot \int (4x+3) \cdot x^2 dx + c \cdot x^{-2}$$

$\Updownarrow$

$$y = f(x) = x^{-2} \cdot \int 4x^3 + 3x^2 dx + c \cdot x^{-2}$$

$\Updownarrow$ Integrerer

$$y = f(x) = x^{-2} \cdot \left[\frac{4}{3+1} \cdot x^{3+1} + \frac{3}{2+1} \cdot x^{2+1}\right] + c \cdot x^{-2}$$

$\Updownarrow$ Reducerer

$$y = f(x) = x^{-2} \cdot \left[\frac{4}{4} \cdot x^4 + \frac{3}{3} \cdot x^3\right] + c \cdot x^{-2}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{y = f(x) = x^2 + x + c \cdot x^{-2}, \qquad x \neq 0,\ c \in \mathbb{R}}}$$

Opgave: Identificér typen

$$\frac{dy}{dx} = 4x^2 - 16x$$

$$\frac{dy}{dx} + 5x \cdot y = 23x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 8$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot 4y$$