Matematik

Notat

18 - Logaritmer

af:

Cand. Polyt.

Michel Mandix

Sidste revision: april 2024

Indholdsfortegnelse:

Logaritmer - Introduktion

Det er forhåbentlig (mere end) kendt fra folkeskolen, at:

$3+3+3+3=12$ (Fire gange skal tallet 3 lægges sammen med sig selv).

Hvis der er mange ens tal, der skal lægges sammen bliver det hurtigt kedeligt og besværligt. På et tidspunkt i historien, er der nogen, der har fundet ud af, at det er nemmere at sige (i dette tilfælde) at tallet tre skal lægges sammen 4 gange. Hermed er notationen for gange (multiplikation) opfundet.

$3+3+3+3=4\cdot 3=12$

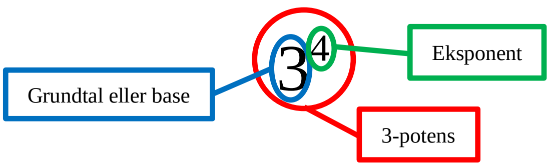
Nu er multiplikationen på plads. Men på samme måde, kan man også gange et tal med sig selv en masse gange. F.eks.:

$3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=81$ (Fire gange skal tallet 3 ganges med sig selv).

Også her kan man skyde en genvej ved at tælle, hvor mange ens faktorer der skal ganges sammen.

Her kommer potensnotationen ind i billedet. Her tæller man, hvor mange gange en faktor skal ganges med sig selv. Denne sammentælling ender som det lille tal, som står hævet efter den gentagne faktor (eksponenten).

$3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=3^4=81$ ("Tre i fjerde")



Denne notation er en god opfindelse. Nu er det nemt at skrive, hvis et tal skal lægges sammen med sig selv virkeligt mange gange eller hvis et tal skal ganges virkeligt mange gange med sig selv.

Med introduktionen af denne notation, er der hurtigt nogen, som vil spørge:

"Hvilket tal skal man opløfte tallet 3 i, for at få resultatet 81?"

$3^x=81$ (Bestem det tal x, der gør at tallet 3 opløftet i x giver 81).

$\Updownarrow$ $(3\cdot 3=3^2=9,\ \text{så}\ 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=3^2\cdot 3^2=3^4=9^2=81)$.

$\underline{\underline{x=4}}$

Dette giver forhåbentlig mening. Desværre er det ikke altid lige nemt at prøve sig frem eller "se" løsningen umiddelbart.

$\log_3(81)=4$ (Logaritmen med grundtal 3 til tallet 81 er lig med 4).

Det ovenstående udtryk kan også fortolkes som:

”Den eksponent, som er virkende på tallet 3, som giver 81”.

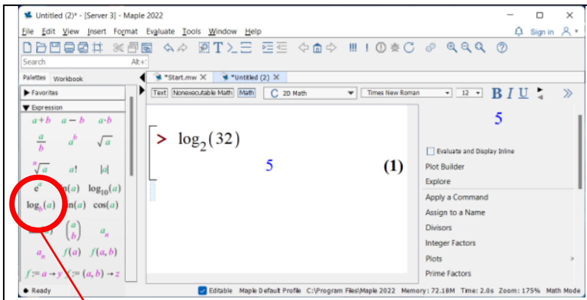
Det er altså vigtigt at forstå at:

RESULTATET AF ”LOG”-FUNKTIONEN ER ALTID EN <u>EKSPONENT</u>!

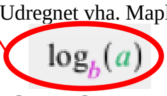
Et par eksempler:

Q: Hvad skal tallet 2 opløftes i, for at få tallet 32?

A: $2^x = 32 \Leftrightarrow x = 5 = \log_2(32)$

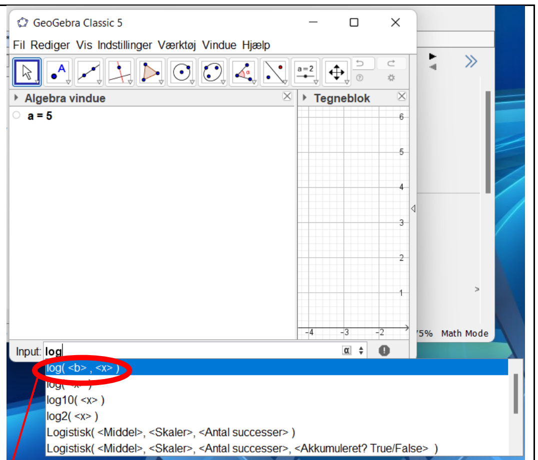


Udregnet vha. Maple



Klik på det indrammede ikon.
Marker *b* (eller tryk <TAB>)
Indtast ”2”
Marker *a* (eller tryk <TAB>)
Indtast ”32”
Tryk <ENTER>

Eksponenten 5 returneres.



Udregnet vha. GeoGebra

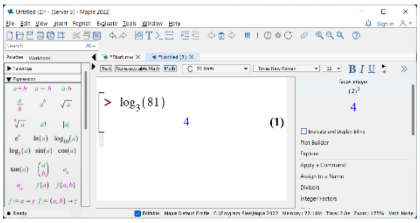
Begynd at skrive ”log” i Inputlinjen.
Når den viste menu vises,
Marker <b>
Indtast ”2”
Marker <x> (eller tryk ”,32”)
Indtast ”32”
Tryk <ENTER>
Resultatet ”a = 5” returneres.

Uanset metoden er konklusionen at, hvis man opløfter 2 i 5. potens, så er resultatet 32.

Der kommer et par eksempler mere. De er udregnet i Maple, men metoden er jo ligegyldig. Der er dog ikke angivet indtastningsdetaljer …

Q: Hvad skal tallet 3 opløftes i, for at få tallet 81?

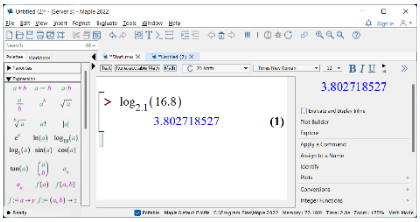
A: $3^x = 81 \Leftrightarrow x = 4 = \log_3(81)$



Q: Hvad skal tallet 2,1 opløftes i, for at få tallet 16,8?

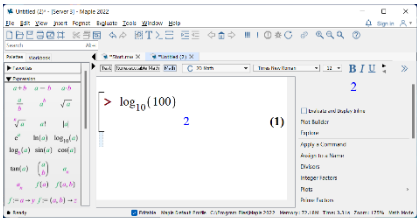
A: $2{,}1^x = 16{,}8 \Leftrightarrow x = 3{,}802718527 = \log_{2,1}(16{,}8)$

(Bemærk, at da Maple er et canadisk program, så skal decimaltal skrives med punktum i stedet for komma som decimaladskiller. Andre lignende programmer som f.eks. GeoGebra, som har base i engelsksprogede lande har samme krav til notationen. GeoGebra kan i visse tilfælde selv udskifte komma med punktum, men lad være med at stole på at programmet selv finder ud af det).



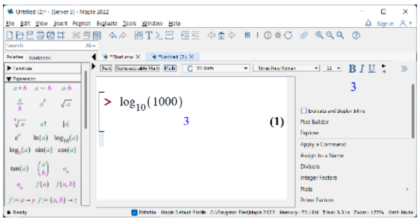
Q: Hvad skal tallet 10 opløftes i, for at få tallet 100?

A: $10^x = 100 \Leftrightarrow x = 2 = \log_{10}(100)$



Q: Hvad skal tallet 10 opløftes i, for at få tallet 1000?

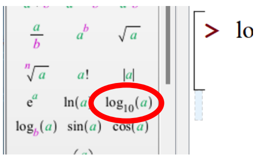
A: $10^x = 1000 \Leftrightarrow x = 3 = \log_{10}(1000)$



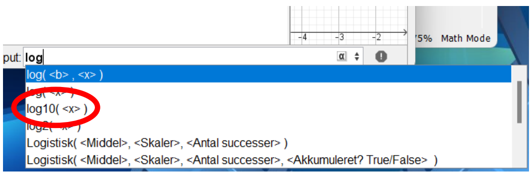
De to sidste eksempler viser, at hvis man opløfter tallet 10 i en potens, så bliver resultatet et 1-tal med lige så mange nuller, som den potens man har opløftet 10-tallet i. Denne regel gælder naturligvis også omvendt, så $10^x = 100000 \Leftrightarrow x = 5 = \log_{10}(100000)$.

I Danmark anvendes logaritmen med grundtal 10 meget ofte. Faktisk så ofte, at vis man udelader det lille indeks-tal som angiver grundtallet, så er grundtallet helt automatisk 10. (Ligesom at hvis man ikke skriver 2 foran rodtegnet, så er det automatisk en kvadratrod $\sqrt{x} = \sqrt[2]{x}$).

Bemærk, at Maple IKKE forstår denne genvej. Tilsyneladende vil Maple – hvis man udelader grundtallet – anvende den naturlige logaritme. Den naturlige logaritme bliver beskrevet senere i dette notat, men efterlades her. Det samme gælder for GeoGebra, men begge programmer har dog en indbygget funktion, som giver ti-tals logaritmen.



Maple



GeoGebra

Konklusion:

Logaritmen til et tal er den eksponent, som basen skal opløftes i for at give det tal, man tager logaritmen til.

Det er på nuværende tidspunkt indlysende, at der findes uendeligt mange forskellige logaritmer. Man kan jo benytte et hvilket som helst grundtal, så derfor er der uendeligt mange muligheder.

Principielt set, er det jo ligegyldigt at tale om ”antallet af forskellige” logaritmer, da notationen altid er den samme og dermed også udregningen, men alligevel er der ingen grund til panik, for i praksis vil man oftest benytte sig af bare to forskellige logaritmer.

De to logaritmer, man kommer til at bruge i langt de fleste tilfælde er titals-logaritmen og den naturlige logaritme.

Titals logaritmen er allerede nævnt i dette notat. Det er ”bare” en logaritme, som har grundtallet eller basen 10. Husk, at man her i Danmark nøjes med at skrive $\log(x)$ og altså ikke behøver at skrive $\log_{10}(x)$.

Sprog- og notationsmæssigt, kan der – inden for de forskellige faggrupper – være forskelle på, hvordan de forskellige logaritmer noteres. Særligt er der forskel på titalslogaritmen og den naturlige logaritme.

Den notation, som typisk anvendes på gymnasiale uddannelser i Danmark er, at titalslogaritmen betegnes som $\log(x)$ og den naturlige logaritme betegnes som $\ln(x)$. Alle andre logaritmer noteres med deres respektive basetal: $\log_a(x)$.

Helt generelt kan en logaritme omregnes fra en base til en anden med den følgende formel:

$$\log_a(r) = \frac{\log_b(r)}{\log_b(a)}.$$

Den anden almindeligt brugte logaritme er: ”Den naturlige logaritme”. Den naturlige logaritme udmærker sig ved at have grundtallet ”*e*”. *e* er symbolet for Eulers tal. Det er opkaldt efter den schweiziske matematiker, Leonhard Euler. Eulers tal er – ligesom π – et transcendent tal og kan tilnærmes værdien: ***e* = 2,718281828459 …**

Spøgefuldt kaldes dette tal blandt nørder for ”2,7-dobbelt Ibsen”. Dette er fordi den dansk-norske forfatter (dramatiker og digter) Henrik Ibsen blev født i år 1828. (Dengang var Norge en del af Danmark)
I Eulers tal er 2,7 efterfulgt af decimalerne 18281828, hvilket er Ibsens fødselsår skrevet to gange lige efter hinanden. Deraf ”2,7-dobbelt Ibsen”.

Til udregning af eksponentielle ligninger, er det nødvendigt at anvende logaritmefunktioner for at få ”*x*’et ned på plads”.

Til dette eksisterer der et antal regneregler. Disse regneregler kan vises for logaritmer med ethvert basetal, så her vises regnereglerne for titalslogaritmen og for den naturlige logaritme og for den generelle logaritme med base *a*.

Titalslogaritmen: $\log(x)$(Base 10)	Den naturlige logaritme: $\ln(x)$(Base $e = 2{,}71828...$)	Den generelle logaritme: $\log_a(x)$(Base a)
$\log(1)=0$	$\ln(1)=0$	$\log_a(1)=0$
$\log(10)=1$	$\ln(e)=1$	$\log_a(10)=1$
$\log(a\cdot b)=\log(a)+\log(b)$	$\ln(a\cdot b)=\ln(a)+\ln(b)$	$\log_a(r\cdot s)=\log_a(r)+\log_a(s)$
$\log\left(\frac{a}{b}\right)=\log(a)-\log(b)$	$\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$	$\log_a\left(\frac{r}{s}\right)=\log_a(r)-\log_a(s)$
$\log\left(\frac{1}{a}\right)=-\log(a)$	$\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln(a)$	$\log_a\left(\frac{1}{r}\right)=-\log_a(r)$
$\log(a^x)=x\cdot\log(a)$	$\ln(a^x)=x\cdot\ln(a)$	$\log_a(r^x)=x\cdot\log_a(r)$
$\log\left(\sqrt[a]{x}\right)=\frac{\log(x)}{a}$	$\ln\left(\sqrt[a]{x}\right)=\frac{\ln(x)}{a}$	$\log_a\left(\sqrt[r]{x}\right)=\frac{\log_a(x)}{r}$

Det bemærkes, at bortset fra logaritmens basetal, så er formlerne fuldstændigt identiske. Det kan bl.a. ses af de to følgende definitioner:

$$\ln(x)=\int_1^x \frac{1}{y}dy \quad (\text{Definition}) \ ,$$

$$\log_a(r)=\frac{\ln(r)}{\ln(a)} (\text{Definition})$$

Beviser for udvalgte logaritmeregneregler:

Givet pr. definition: $a=10^{\log(a)}$ og $b=10^{\log(b)}$. Alle beviser føres for titalslogaritmen, men beviserne kan overføres til alle logaritmer, blot ved at ændre notationen for logaritmen til et bestemt basetal.

Bevis for logaritmeregneregel 3) – $\log(a\cdot b)=\log(a)+\log(b),\ a>0, b>0$:

$$\log(a\cdot b)=\log(a)+\log(b)$$

Udtrykkene for a og b indsættes på venstre side og omskriver

$$\log(a\cdot b)=\log\left(10^{\log(a)}\cdot 10^{\log(b)}\right)$$

$\Updownarrow$ Anvender potensregneregel: $a^p\cdot a^q=a^{p+q}$

$$\log(a\cdot b)=\log\left(10^{\log(a)+\log(b)}\right)=\log\left(10^{(\log(a)+\log(b))}\right)$$

$\Updownarrow$ $\log(x)$ og 10^x ophæver hinanden

$$\underline{\underline{\log(a\cdot b)=\log(a)+\log(b)}} \qquad Q.E.D.$$

Bevis for logaritmeregneregel 4) – $\log\left(\frac{a}{b}\right)=\log(a)-\log(b),\ a>0,\ b>0$:

$$\log\left(\frac{a}{b}\right)=\log(a)-\log(b)$$

Udtrykkene for a og b indsættes på venstre side og omskriver

$$\log\left(\frac{a}{b}\right)=\log\left(\frac{10^{\log(a)}}{10^{\log(b)}}\right)$$

$\Updownarrow$ Anvender potensregneregel: $a^p\cdot a^q=a^{p+q}$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right)=\log\left(10^{\log(a)-\log(b)}\right)=\log\left(10^{(\log(a)-\log(b))}\right)$$

$\Updownarrow$ $\log(x)$ og 10^x ophæver hinanden

$$\log\left(\frac{a}{b}\right)=\log(a)-\log(b)$$

Q.E.D.

Alternativt bevis for logaritmeregneregel 4) – $\log\left(\frac{a}{b}\right)=\log(a)-\log(b),\ a>0,\ b>0$:

$$\frac{a}{b}\cdot b=a$$

$\Updownarrow$ Logaritmen tages på begge sider

$$\log\left(\frac{a}{b}\cdot b\right)=\log(a)$$

$\Updownarrow$ Anvender 3. regneregel for logaritmer: $\log(a\cdot b)=\log(a)+\log(b)$ på venstre side

$$\log\left(\frac{a}{b}\right)+\log(b))=\log(a)$$

$\Updownarrow$ Trækker $\log(b)$ fra på begge sider

$$\log(a\cdot b)=\log(a)-\log(b)$$

Q.E.D.

Alternativt bevis for logaritmeregneregel 4) – $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b),\ a > 0, b > 0$:

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

Venstre side omskrives vha. potensregnereglen: $\frac{1}{a} = a^{-1}$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log\left(a \cdot \frac{1}{b}\right) = \log\left(a \cdot b^{-1}\right)$$

$\Updownarrow$ Anvender 3. regneregel for logaritmer: $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) + \log\left(b^{-1}\right)$$

$\Updownarrow$ Anvender 6. regneregel for logaritmer: $\log\left(a^x\right) = x \cdot \log(a)$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) + (-1)\log(b)$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{\log(a \cdot b) = \log(a) - \log(b)}}$$

Q.E.D.

Bevis for logaritmeregneregel 6) – $\log\left(a^x\right) = x \cdot \log(a),\ a > 0,\ x \in \mathbb{R}$:

$$\log\left(a^x\right) = x \cdot \log(a)$$

$a = 10^{\log(a)}$ indsættes i udtrykket på venstre side og omskriver

$$\log\left(a^x\right) = \log\left(\left(10^{\log(a)}\right)^x\right)$$

$\Updownarrow$ Anvender potensregneregel: $\left(a^p\right)^q = a^{p \cdot q}$

$$\log\left(a^x\right) = \log\left(10^{\log(a) \cdot x}\right) = \log\left(10^{\log(a)} \cdot 10^x\right)$$

$\Updownarrow$ $\log(x)$ og 10^x ophæver hinanden

$$\underline{\underline{\log\left(a^x\right) = x \cdot \log(a)}}$$

Q.E.D.

Logaritmer

Bevis for logaritmeregneregel 7) – $\log\left(\sqrt[x]{a}\right)=\frac{1}{x}\cdot\log(a),\ a>0,\ x\in\mathbb{R}$:

$$\log\left(\sqrt[x]{a}\right)=\frac{1}{x}\cdot\log(a)$$

$a=10^{\log(a)}$ indsættes i udtrykket på venstre side og omskriver-

Desuden benyttes potensregneregel: $\sqrt[n]{a^p}=a^{\frac{p}{n}}$

$$\log\left(\sqrt[x]{a}\right)=\log\left(\left(10^{\log(a)}\right)^{\frac{1}{x}}\right)$$

⇕ Anvender potensregneregel: $\left(a^p\right)^q=a^{p\cdot q}$

$$\log\left(\sqrt[x]{a}\right)=\log\left(10^{\log(a)\cdot\frac{1}{x}}\right)=\log\left(10^{\log(a)}\cdot 10^{\frac{1}{x}}\right)$$

⇕ $\log(x)$ og 10^x ophæver hinanden

$$\underline{\underline{\log\left(\sqrt[x]{a}\right)=\frac{1}{x}\cdot\log(a)}}$$

Q.E.D.