Matematik

Notat

18 - Logaritmer

af:

Cand. Polyt.

Michel Mandix

Sidste revision: april 2024

Indholdsfortegnelse:

Eksponentielle funktioner - Introduktion

Først og fremmest er det vigtigt at forstå de egenskaber, som en eksponentiel funktion har.

En eksponentiel funktion vil vokse eller aftage med en fast procentuel tilvækst pr. enhed. Denne enhed vil ofte, men ikke altid, være en tidsenhed.

Et eksempel, som blev kendt i Danmark i 2019 under Covid-19 pandemien var, da man hævdede at smittetallet i Danmark på det tidspunkt var på 1,1.

Der fulgte ikke megen yderligere beskrivelse med på det pressemøde, men det blev fortalt, at det kunne tolkes som at 10 personer ville smitte yderligere 11 personer. Disse 11 nysmittede ville så igen efterfølgende hver smitte 11 personer. For eksemplets skyld antages det, at det tager en dag at smitte en ny person.

Så ved udgangspunktet af pandemien (dag 0), er der 10 smittede.
På dag 1 er der 11 smittede.
På dag 2 vil der være 12,1 smittede. Naturligvis kan der ikke være 0,1 smittet person, men der er jo tale om teoretiske værdier.
Denne udvikling kunne lyde relativt harmløs, men husk, at udviklingen vokser med en fast procentuel rate. Dette betyder, at der efter en uge vil være 19,5 smittede. Det er stadig overkommeligt, men efter en måned vil der være 191,9 smittede. Det begynder at virke bekymrende.
Efter to måneder vil der være 3.045 smittede og efter bare tre måneder vil der være 53.130 smittede.
I 2023 (januar) var der lige i underkanten af 6 millioner mennesker i Danmark. Følger man udviklingen i Covid-19 smitten, vil dette tal nås efter knap 140 dage – altså på under 5 måneder.

Dette eksempel to vigtige ting:
1) Når der er tale om en eksponentiel udvikling, vil det pludselig gå stærkt med væksten.
2) Man skal ofte være forsigtig med at antage en eksponentiel udvikling som en matematisk model. I det viste eksempel, var hele Danmark jo IKKE smittet indenfor et halvt år, og selvom det antages, at alle ville blive smittede (hvilket tilsyneladende ikke er tilfældet), ville det jo ikke ske på 5 måneder.

Når dette er sagt, findes der en lang række eksempler, hvor den eksponentielle funktion er en meget god model for hvad der sker – både i naturen, men også mere konstrueret.

Et rigtigt godt eksempel er radioaktiv halveringstid. (Den konstante procentuelle relative tilvækst kan sagtens være negativ). Man taler om, at den radioaktive stråling halveres efter et bestemt tidsrum. Dette er relativt præcist beskrevet.
F.eks. kender de fleste til Chernobyl ulykken, som skete den 26. april 1986. Den nat sprang Reaktor nr. 4 i luften og der blev udledt 400 gange mere stråling, end da man kastede atombomben over Hiroshima ved afslutningen af 2. Verdenskrig.
Sådan en ulykke udleder forskellige slags stråling, som hver har forskellig halveringstid. Alt fra 8 dage til 24.000 år. En af de farligste isotoper mht. stråling er americium-241 som har en halveringstid på 433 år. For at strålingen skal komme ned på et niveau, hvor det ikke anses som farligt, skal strålingsniveauet halveres 8-10 gange. Det betyder, at området omkring Chernobyl kan tilflyttes igen om ca. 4.000 år.

Et andet eksempel er rentesregning. Al rentesregning bygger på eksponentielle udviklinger, men det beskrives i et notat for sig.

Men nu til matematikken …

Definition

En funktion, f kaldes for en eksponentiel funktion, hvis den kan skrives på formen:

$$f(x) = b \cdot a^x \,,$$

hvor: $a > 0,\ a \neq 1$ og $b > 0$.

a kaldes for *grundtallet* eller *fremskrivningsfaktoren* og *b* kaldes for *begyndelsesværdien* (*skæring med y-aksen*).

At *b* kan tolkes som skæring med *y*-aksen, kan vises ved at ethvert punkt på *y*-aksen må have *x*-koordinaten 0. Indsættes 0 i stedet for *x* i udtrykket for den eksponentielle funktion fås:

$$f(0) = b \cdot a^0$$

$\Updownarrow$ Da ethvert tal i 0'te potens altid er lig med 1 er $a^0 = 1$.

$$f(0) = b \cdot 1$$

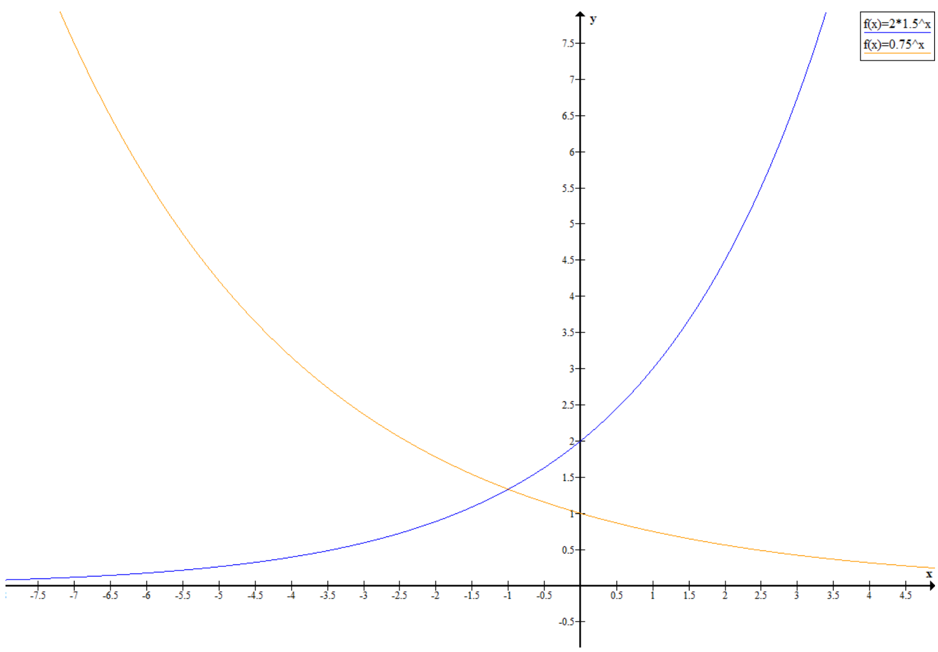
$\Updownarrow$

$$\underline{f(0) = b}$$

Grundtallet *a* dikterer om grafen for funktionen er voksende eller aftagende. Hvis $0 < a < 1$ er grafen **aftagende**. Hvis $a > 1$ er grafen for funktionen **voksende**. (Se nedenstående figur).

Det bemærkes i definitionen, at *a* ikke kan antage værdien 1. Enkelte vil mene, at *a* godt kan være lig med 1, men da *a* er opløftet i *x*'te potens, kan man sige, at hvis *a* er lig med 1, så er det vel ligegyldigt, hvilken potens 1 er opløftet i, så vil det altid give 1. $(1 \cdot 1 \cdot \ \ldots\ \cdot 1 = 1)$

Dette resulterer i: $f(x) = b \cdot 1^x = b \cdot 1 = b$ – altså en vandret funktion, som skærer *y*-aksen i værdien *b*. Så man kan kalde den eksponentielle funktion, hvor *a* = 1 for et specialtilfælde af den eksponentielle funktion, men den er jo ikke specielt interessant, hvorfor den som regel udelades.



Eksponentielle funktioner

Grafen viser at definitionsmængden for en eksponentiel funktion er: $\underline{Dm(f) = \mathbb{R} =]-\infty;\infty[}$,
dvs. alle reelle tal, såfremt funktionen ikke er kunstigt begrænset i *x*-værdierne.
Bemærk således, at enhver eksponentiel funktion uden kunstig begrænsning eksisterer
PÅ BEGGE SIDER af *y*-aksen.

Det bemærkes desuden af værdimængden for en eksponentiel funktion er: $\underline{Dm(f) = \mathbb{R}_{+} =]0;\infty[}$
– dvs. at værdimængden for en eksponentiel funktion er strengt positiv. (Rører aldrig *x*-aksen).

Særligt siger man, at hvis $b = 1$ dvs. at funktionsudtrykket bliver: $f(x) = a^x$, så er der tale om en eksponenti**a**lfunktion.

Sammenfatning:

Grundformel – generel formel:	(Eksponenti**e**l funktion)	$f(x) = b \cdot a^x$
	(Eksponenti**a**l funktion)	$f(x) = a^x$