MATEMATIK

NOTAT 21

LINEÆR PROGRAMMERING

AF:

CAND. POLYT.

MICHEL MANDIX

SIDSTE REVISION: APRIL 2024

Oversigt over græske bogstaver:

Kapitaler	Minuskler	Navn
Α	α	Alfa
Γ	γ	Gamma
Ε	ε	Epsilon
Η	η	Eta
Ι	ι	Jota
Λ	λ	Lambda
Ν	ν	Ny
Ο	o	Omikron
Ρ	ρ	Rho
Τ	τ	Tau
Φ	φ	Phi
Ψ	ψ	Psi

Kapitaler	Minuskler	Navn
Β	β	Beta
Δ	δ	Delta
Ζ	ζ	Zeta
Θ	θ	Theta
Κ	κ	Kappa
Μ	μ	My
Ξ	ξ	Xi
Π	π	Pi
Σ	σ	Sigma
ϒ	υ	Ypsilon
Χ	χ	Chi
Ω	ω	Omega

Indholdsfortegnelse:

Kort om Lineær Programmering (LP)'s historie:

LP er en af de nyere matematiske discipliner.

Det blev udviklet af amerikanerne under 2. Verdenskrig, hvor man ønskede at optimere måden, hvorpå man lastede lastbiler, fly og skibe, således at man kunne medbringe så meget gods som muligt.

Inden amerikanerne berømmes alt for meget, skal det nævnes, at grundideen for LP blev formuleret et par år inden af en sovjetisk matematiker, Leonid Kantorovich, men hans ideer slog ikke igennem i Sovjetunionen.

I 1941, blev ideen taget op igen af Frank Lauren Hitchcock, som målrettede metoden til at beregne logistiske problemer.

Ikke nok med, at amerikanerne ønskede at transportere så meget gods som muligt, det var også et mål at kombinere dette gods, så det blev så effektivt som muligt i kampen mod tyskerne. Det er f.eks. ikke snedigt at sende 20.000 maskingeværer, hvis der ikke samtidig sendes nogle soldater med, som kan betjene dem.

Matematisk baggrundsforståelse:

Lineær Programmering (LP) er en videreudvikling af lineære funktioner, som var en del af stoffet på 1. år – nærmere bestemt i Grundforløbet. På dette tidlige tidspunkt, blev der arbejdet med lineære funktioner med en uafhængig variabel, *x*, $\left(y = f\left(x\right) = ax + b\right)$, hvilket lidt mere sprogligt betyder, at *y* afhænger af den *x*-værdi der indsættes i funktionsforskriften.

Definition af en funktion [1], [2].

En størrelse $y = f(x)$ kaldes en funktion af en størrelse x, hvis der til enhver værdi af x svarer præcis én værdi af y.

Den mængde af tal, indenfor hvilken den uafhængige variabel x kan variere, kaldes definitionsmængden $Dm(f)$.

Den mængde af tal, der udgøres af samtlige funktionsværdier (de afhængige variable) kaldes funktionens værdimængde $Vm(f)$.

[1] stx Mat A1 side 263
[2] HVB 2023

Udtryk (Kort forklaring):

Kriteriefunktion: En funktion med to uafhængige variable. Ofte *x* og *y*, og også ofte vil det være et udtryk for enten dækningsbidraget maksimering) eller omkostninger (minimering).
Typisk vil *x* omhandle en vare (item) og *y* vil omhandle en anden vare.
Idet kriteriefunktionen er en funktion af to uafhængige variable, kan den ikke tegnes i et traditionelt koordinatsystem.
$(z = f(x,y) = \cdots)$
Indtegning af kriteriefunktionen vil ofte ikke være nødvendigt, så ingen panik.

Polygonområde: Et område i koordinatsystemet, som angiver de "tilladte" værdier af kombinationer af *x* og *y*. Dette polygonområde er dannet vha. begrænsningsfunktioner.

Begrænsningsfunktion: En ulighed i to variable, *x* og *y*, som skal omskrives til formen:
$y \le ax + b \qquad (\text{eller } y \ge ax + b)$.
Dette kan også beskrives som knappe ressourcer.

F.eks. Der skal laves to typer stole. Den ene type stol (*x*) tager fire timer at lave og den anden type stol (*y*)tager to timer at lave. I værkstedet kan der kun afsættes 20 timer (på en uge) til at producere disse to typer stole.

$$4x + 2y \le 20$$
$$\Updownarrow$$
$$2y \le -4x + 20$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{y \le -2x + 10}$$

Bemærk, at hvis disse funktioner indtastes i GeoGebra, så er det nemmest bare at skrive dem, præcis som de står i opgaven. Så er det ikke nødvendigt at omskrive dem til formen:
$y \le ax + b \qquad (\text{eller } y \ge ax + b)$.
Det er dog stadig nødvendigt AT KUNNE GØRE DET vha. manuel beregning.

Niveaulinje: En alternativ afbildning af kriteriefunktionen i to variable, som i stedet tegnes som en ret linje.
$N(t): \quad ax + by + c = t$

Lineær programmering

Optimering: Lineær Programmering (LP) omhandler det problem, at optimere en tilstand på baggrund af to variable.
Den nemmeste forklaring (nu) er at beskrive det som: ”Den bedste kombination af *x* og *y* findes ved at parallelforskyde niveaulinjen op eller ned, indtil sidste (eller første) kontakt med polygonområdet.

Hjørnemetoden: At indsætte værdier for *x* og *y* (hjørnepunkternes koordinater) i kriteriefunktionen og derved se, hvor den største (eller mindste) værdi fremkommer.

Eksempel 01

En virksomhed producerer og sælger lommeregnere og computere.

Dækningsbidrag:

Lommeregner:	200,00 *kr./stk.*
Computer:	1.000,00 *kr./stk.*

Lad x være antallet af solgte lommeregnere og lad y være antallet af solgte computere.

$$z = DB(x;y) = f(x;y) = \text{Det samlede dækningsbidrag i } kr. \quad \text{(Kriteriefunktionen)}$$

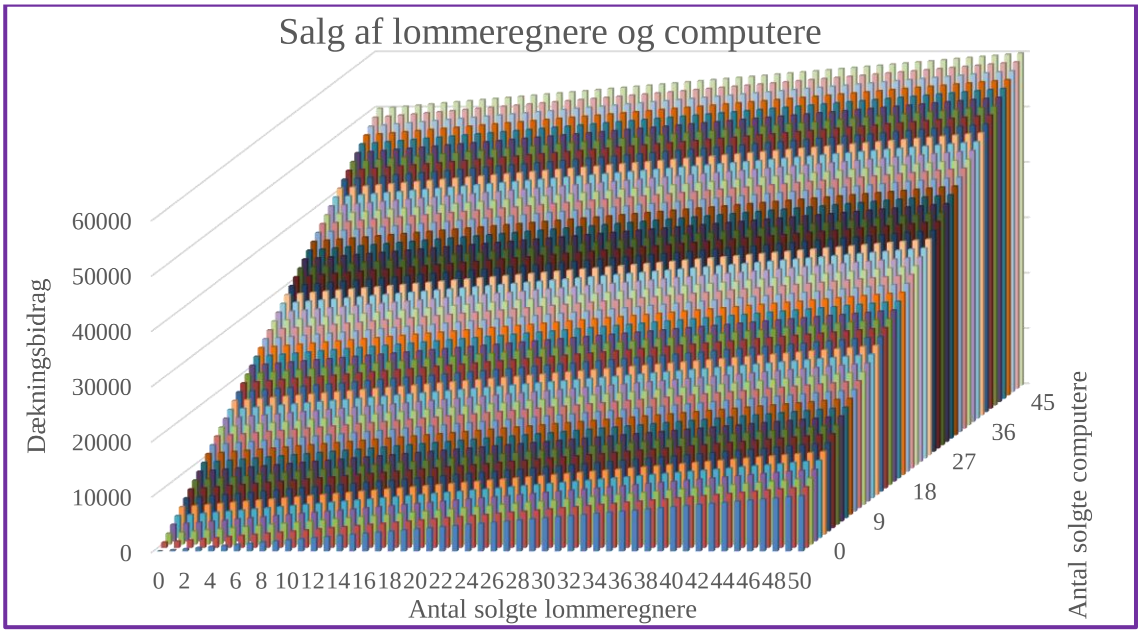
Hvis nu der bliver solgt 50 lommeregnere og 50 computere, kan det samlede dækningsbidrag udregnes som:

$$z = DB(x;y) = f(x;y) = 200,00\,[kr./stk.]\cdot x + 1.000,00\,[kr./stk.]\cdot y$$
$$\Updownarrow$$
$$z = DB(x;y) = f(x;y) = 200,00\,[kr./stk.]\cdot 50\,[stk.] + 1.000,00\,[kr./stk.]\cdot 50\,[stk.]$$
$$\Updownarrow$$
$$z = DB(x;y) = f(x;y) = 10.000,00\,[kr.] + 50.000\,[kr.]$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{z = DB(x;y) = f(x;y) = 60.000,00\,[kr.]}$$

Bemærk den første linje: $z = DB(x;y) = f(x;y) = 200,00\,[kr./stk.]\cdot x + 1.000,00\,[kr./stk.]\cdot y$.

Dette er forskriften for det samlede dækningsbidrag. $z = DB(x;y) = f(x;y)$ kan nemlig skrives som en formel, hvori der indgår både x og y. Derved bliver både x og y til **u**afhængige variable, og da resultatet skal navngives med et eller andet, bruges: z. (Ligesom y blev brugt, da x var den eneste uafhængige variabel.)

Dette er heller ikke helt ved siden af, da det grafiske billede af løsningen kan vises som et 3D-søjlediagram, hvor x og y angiver placeringen af en søjle i xy-planen og z er højden af søjlen.



Et eksempel på afbildning af en funktionsværdi (salget) som funktion af to uafhængige variable (lommeregnere og computere).

Ovenstående figur viser altså dækningsbidraget (lodret) af en funktion i to variable. Figuren indeholder data op til og med 50 lommeregnere og 50 computere. Naturligvis kun positive værdier, idet det ikke tænkes, at en negativ produktion er mulig.

Fremstillingen af lommeregnerne og computerne skal foregå i en produktionsafdeling og derefter i en samle- og afprøvningsafdeling.

I produktionsafdelingen bruges 45 minutter pr. lommeregner og 3 timer pr. computer. I alt er der 42 timer til rådighed i produktionsafdelingen. I samle- og afprøvningsafdelingen bruges der en time pr. lommeregner og en time pr. computer. I alt er der 20 timer til rådighed i samle- og afprøvningsafdelingen.

I ovenstående figur er der imidlertid heller ikke taget højde for begrænsningsfunktionerne. F.eks. er det ikke muligt at fremstille 50 lommeregnere og 50 computere. Så meget tid er der jo slet ikke til rådighed i de to tekniske afdelinger. Man skal derfor forestille sig, at de søjler, hvor fremstillings- og afprøvningstiden tilsammen overskrider begrænsningerne fjernes. Derefter er målet at bestemme hvilken søjle der repræsenterer det højeste dækningsbidrag - dvs. hvor ligger søjlen i koordinatsystemet (x- og y) og hvor højt er da dækningsbidraget. Det er umiddelbart ikke muligt at arbejde med i den ovenstående figur, så der benyttes en alternativ metode

Som allerede nævnt og beregnet, får virksomheden 200,00 *kr*. pr. lommeregner og 1.000,00 *kr*. pr computer i dækningsbidrag.

Opgaven består nu i at fastlægge det optimale antal lommeregnere og computere, dvs. det antal lommeregnere og det antal computere, der skal produceres for at opnå det størst mulige dækningsbidrag.

Alle oplysningerne sammenfattes i et *begrænsningsskema*.

Forbrug af tid pr. stk.	**Lommeregnere**	**Computere**	**Maksimal tid i alt**
			(Dvs. begrænsning)
Produktionsafdelingen	45 minutter (=0,75 time) pr. *stk.*	3 timer pr. *stk.*	≤ 42 timer
Samle- og afprøvningsafdelingen	1 time pr. *stk.*	1 time pr. *stk.*	≤ 20 timer
Dækningsbidrag	200,00 *kr/stk.*	1.000,00 *kr/stk.*	

1) Definitioner:

x = antal lommeregnere
y = antal computere

2) Betingelser:

Maksimalbetingelserne i forbrug af timer i de to afdelinger kan udtrykkes ved hjælp af følgende uligheder:

Produktionsafdelingen: $\frac{3}{4}x + 3y \leq 42 \Leftrightarrow 3y \leq -\frac{3}{4}x + 42 \Leftrightarrow \underline{y \leq -\frac{1}{4}x + 14}$

Samle- og afprøvningsafdelingen: $x + y \leq 20 \Leftrightarrow \underline{y \leq -x + 20}$

Endvidere eksisterer der her to positivitetsbetingelser (kaldes også minimalbetingelser) i x og y, nemlig: $\underline{x \geq 0}$

og $\underline{y \geq 0}$

Disse to betingelser skyldes, at der ikke kan produceres et negativt antal lommeregnere eller computere.

3) Polygonområde:

De givne betingelser (begrænsninger) bruges til at tegne et polygonområde. I sidste ende bruges polygonområdet til at finde ud af, hvilke kombinationer af x og y som er mulige med de givne betingelser.

Gøres det vha. manuelle beregninger, bør alle begrænsninger omskrives til formerne:

$y \leq ax + b$

$y \geq ax + b$

$x \geq k$

$x \leq k$

$y \geq k$

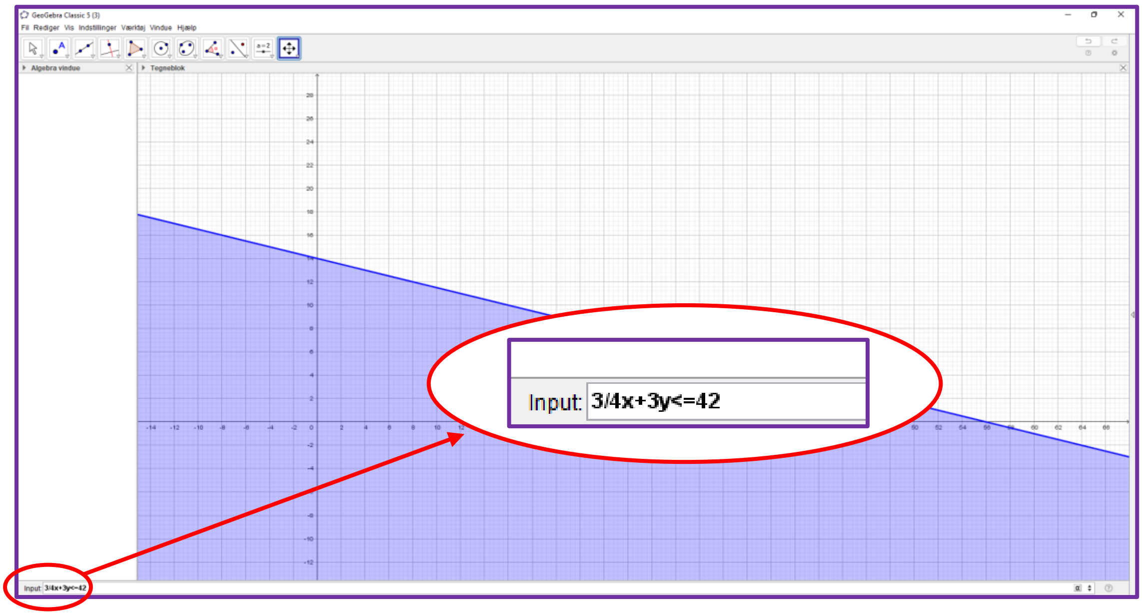
$y \leq k$

Anvendes GeoGebra, kan begrænsningerne indtastes direkte som de er givet i opgaven – f.eks.:

Her gøres det i Geogebra som eksempel.

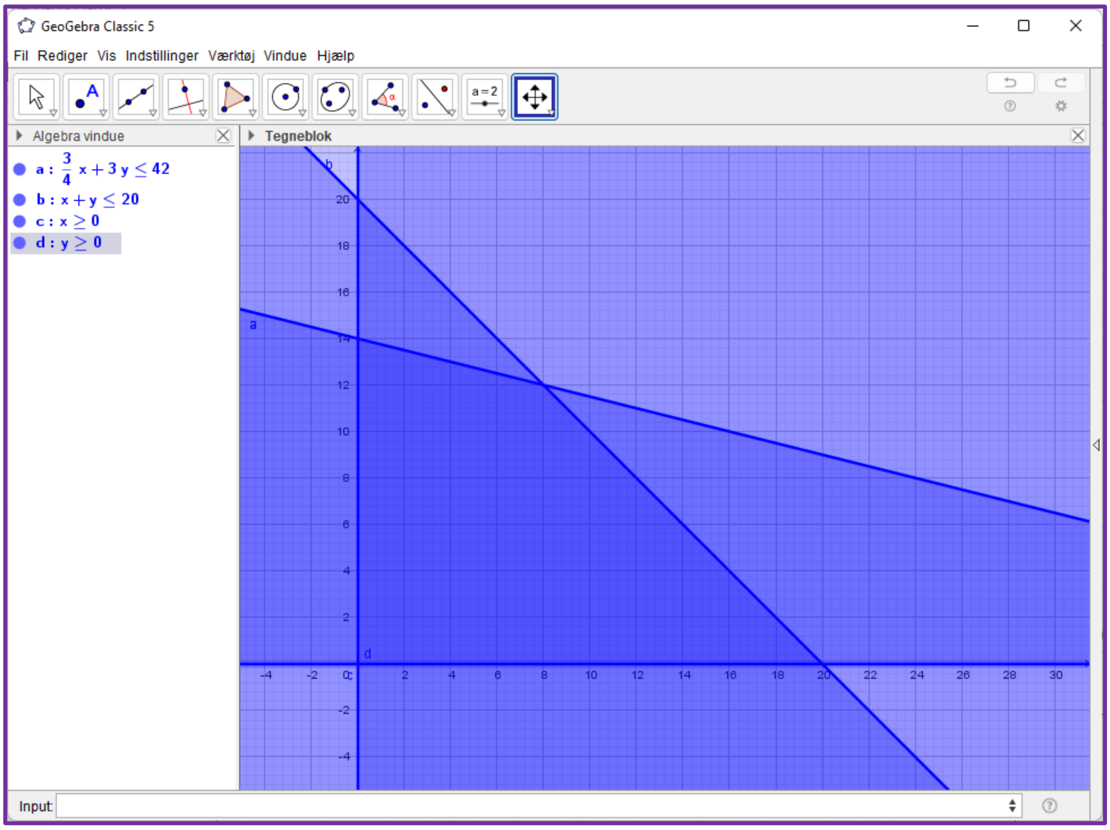
Det gøres i dette eksempel over flere omgange, så hvert skridt kan forklares.

Hver begrænsning indtastes i Input-feltet nederst.



Efterhånden som begrænsningerne indtastes, vises de i det store billede med koordinatsystemet (der skal måske zoomes for at få vist det hele), og ude i venstre kolonne.

Til sidst burde det se sådan ud:



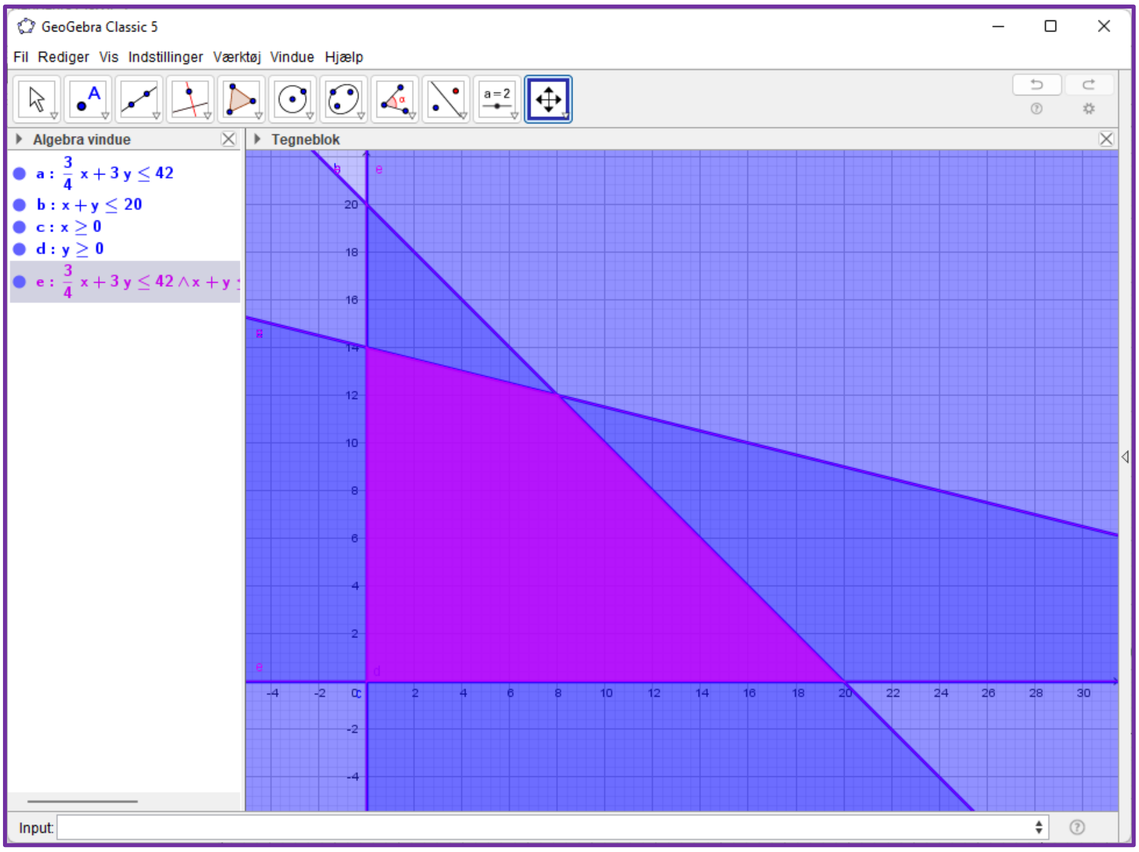
Det ses, at de indtastede begrænsninger er blevet navngivet automatisk med bogstaverne a-d.

Det søgte polygonområde er den firkant, som er markeret med den mørkeste blå farve. Hvis det er uoverskueligt, kan man fremhæve polygonen således:

Skriv i Input-feltet: 

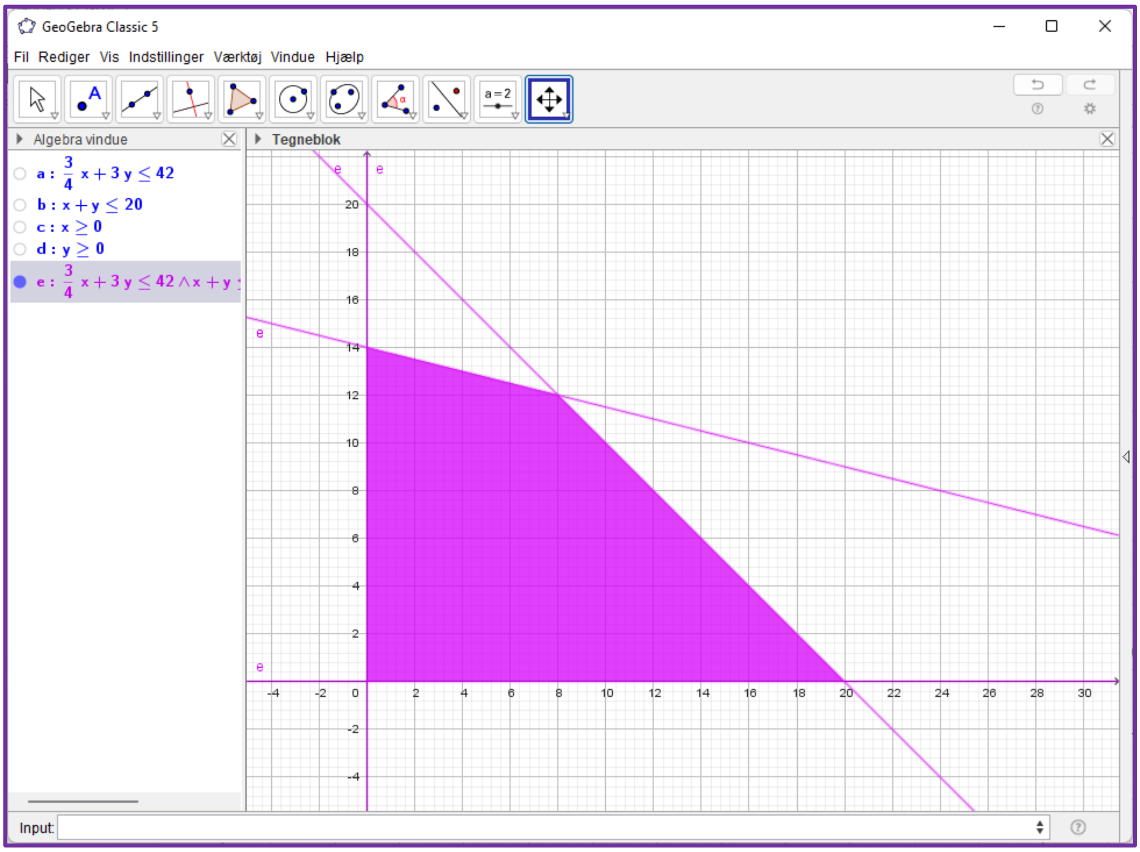
Dette vil fortælle GeoGebra, at den skal vise det område, hvor alle fire uligheder er sande.

Det hele burde nu se sådan ud:



Hvis billedet stadig virker rodet, kan man fravælge at vise de oprindelige uligheder. Blot klik i de blå cirkler udfor ulighederne i vinduet til venstre:

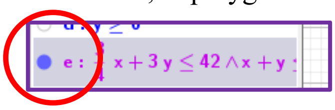
Lineær programmering



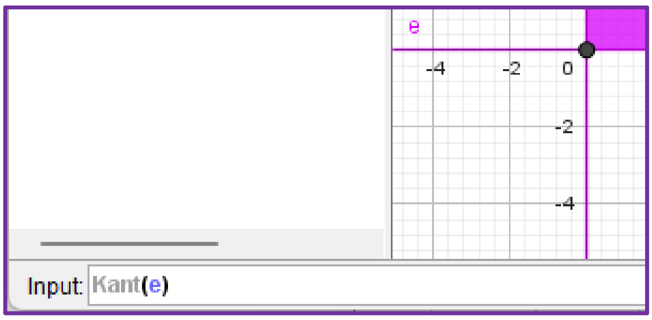
4) Bestemmelse af polygonområdets hjørnepunkter:

Polygonens hjørnepunkter kan findes ved hjælp af GeoGebra-funktionen ”Kant”.

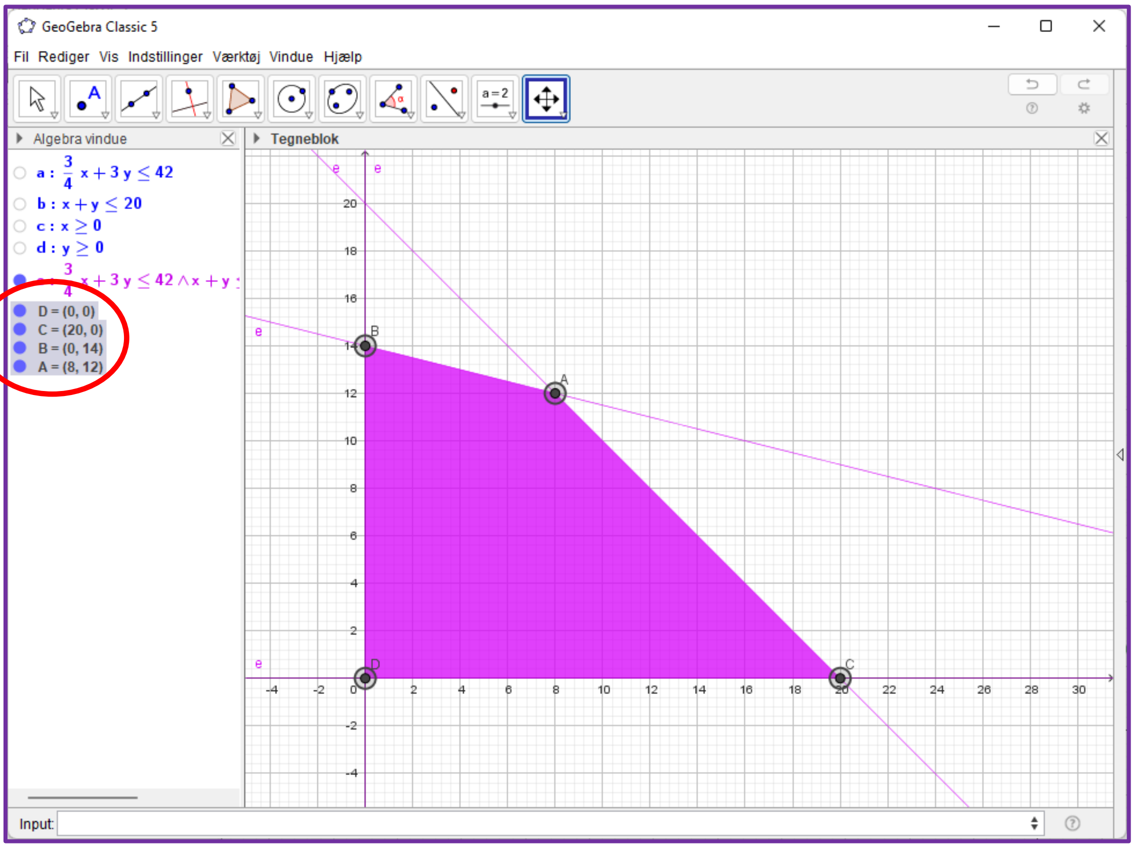
Bemærk nu, at polygonområdet i GeoGebra nu er blevet navngivet ”e”.



Dette navn indsættes i funktionen ”Kant(polygon)”.



Resultatet er nu, at punkterne fremhæves og er blevet opstillet i menuen ude til venstre.



5) **Niveaulinje indtegnes og parallelforskydes:**
Som nævnt i oversigten, er niveaulinjer en omskrivning af kriteriefunktionen.

Kriteriefunktionen er som allerede beskrevet:
$DB(x;y) = f(x;y) = 200{,}00\,[kr./stk.]\cdot x + 1.000{,}00\,[kr./stk.]\cdot y$

Det er som regel en god ide at tage udgangspunkt i $N(0)$. Det vil ofte, MEN IKKE ALTID, give en niveaulinje som er en ligefrem proportionalitet – altså en ret linje, som går igennem origo.

I dette eksempel- (og uden enheder) vil niveaulinjen bestemmes som:

$$N(0): \quad 200x + 1.000y = 0$$

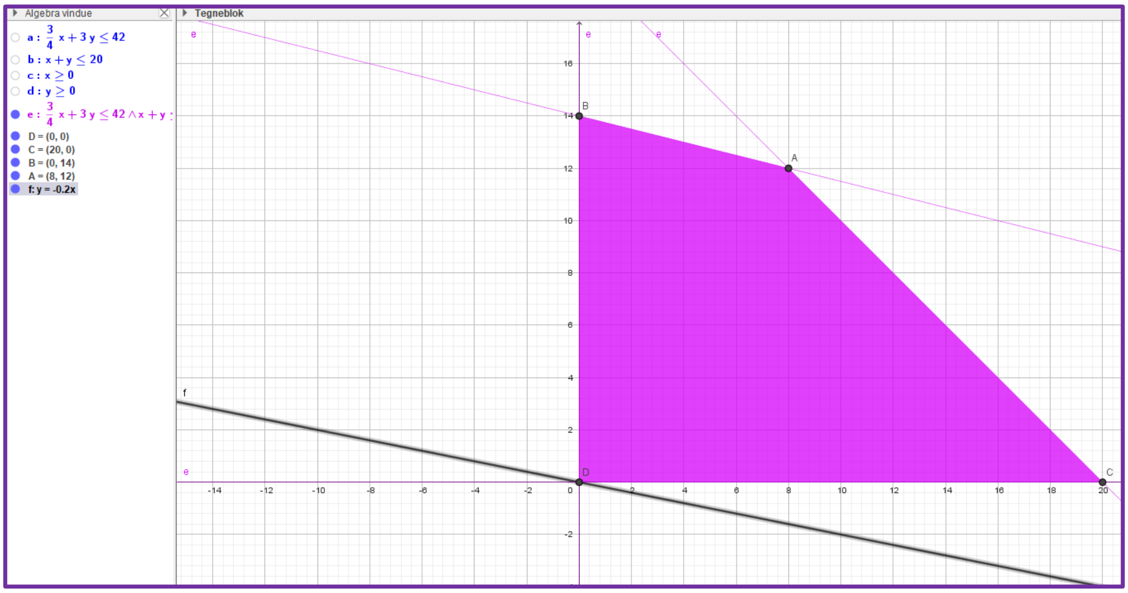
$$\Updownarrow$$

$$1.000y = -200x$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{y = -\frac{1}{5}x} \; (\text{Dvs.: } y = -0{,}2x)$$

Denne niveaulinje indtegnes i GeoGebra sammen med resten:
Niveaulinjen er den sorte linje (f), som går igennem origo.



En niveaulinje er en linje som består af en mængde af punkter, for hvilken $f(x;y)$ antager den samme værdi – i dette tilfælde 0. Så for alle punkter (*xy*-par), så vil de alle returnere værdien 0.
F.eks. er $f(0;0)=0$, men også $f(10;-2)=0$.

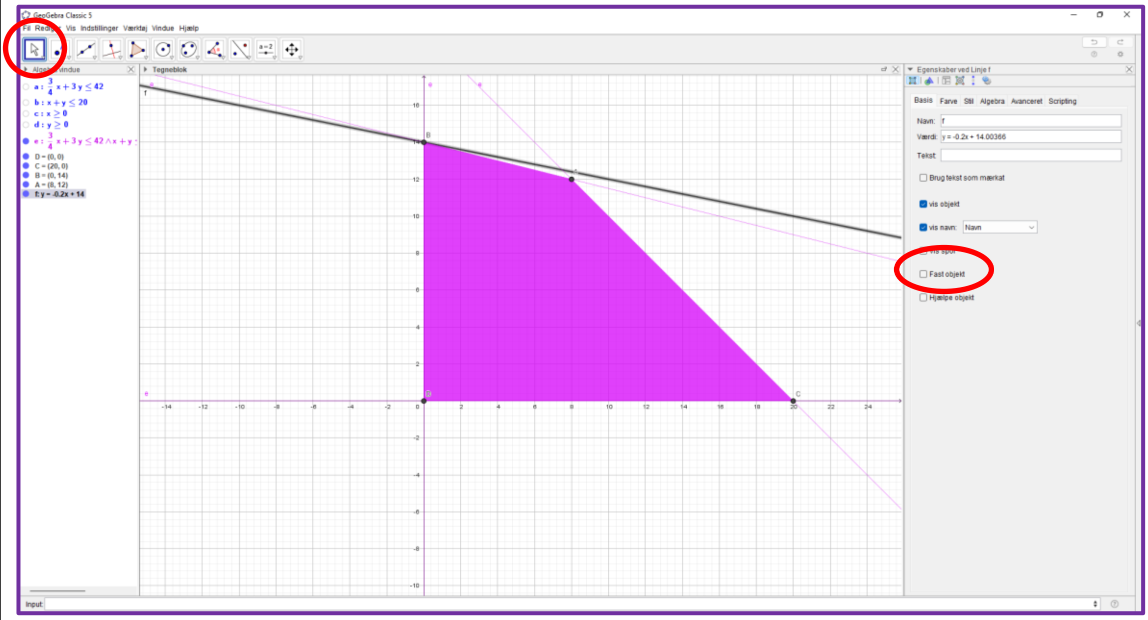
Make it dance …

For at parallelforskyde niveaulinjen (hvilket svarer til at sætte *t* til en anden værdi), højre-klikkes på niveaulinjen.

Vælg 'Egenskaber' og fjern fluebenet ved 'Fast Objekt'.

Hvis GeoGebra er i 'Flyt'-mode (Blå ramme om den lille hvide pil i menu-linjen), kan man nu trække i niveaulinjen for at parallelforskyde den.

I dette eksempel ses det, at den sidste berøring med polygonområdet er, når niveaulinjen rører ved punktet $B(0;14)$. (Mere om det i afsnittet "6) Konklusion")



6) Konklusion:

Som allerede vist, er det sidste punkt, som niveaulinjer**ne** (der kan jo tegnes/flyttes til uendeligt mange steder) har til fælles med polygonområdet er punkt $B(0;14)$.

Punkt $B(0;14)$ betyder, at $x = 0$ og $y = 14$. Da x var antallet af solgte lommeregnere og y var antallet af solgte computere, kan det konkluderes, at virksomheden skal producere 0 lommeregnere og 14 computere for at opnå det størst mulige dækningsbidrag.

Disse to værdier skal indsættes i kriteriefunktionen for at finde VÆRDIEN af det størst mulige dækningsbidrag.

$$DB(x;y) = f(x;y) = 200{,}00\,[kr./stk.]\cdot x + 1.000{,}00\,[kr./stk.]\cdot y$$

$$\Updownarrow$$

$$DB(x;y) = f(x;y) = 200{,}00\,[kr./stk.]\cdot 0\,[stk.] + 1.000{,}00\,[kr./stk.]\cdot 14\,[stk.]$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{DB(x;y) = f(x;y) = 14.000{,}00\,[kr.]}}$$

7) Kontrol ved hjørnemetoden:

Hvis der er tvivl om, hvorvidt man har fundet det rigtige maksimalpunkt, kan man med fordel beregne dækningsbidraget for en eller flere hjørnepunkter manuelt.
Dette gøres ved at indsætte *x*- og *y*-værdierne for de enkelte hjørnepunkter i kriterie-funktionen.

F.eks.:

$$K(0;0) = 200,00\,[kr./stk.] \cdot 0 + 1.000,00\,[kr./stk.] \cdot 0 = 0 + 0 \underline{= 0\,[kr.]}$$

$$K(20;0) = 200,00\,[kr./stk.] \cdot 20 + 1.000,00\,[kr./stk.] \cdot 0 = 4.000,00 + 0 \underline{= 4.000,00\,[kr.]}$$

$$K(0;14) = 200,00\,[kr./stk.] \cdot 0 + 1.000,00\,[kr./stk.] \cdot 14 = 0 + 14.000,00 \underline{= 14.000,00\,[kr.]}$$

$$K(8;12) = 200,00\,[kr./stk.] \cdot 8 + 1.000,00\,[kr./stk.] \cdot 12 = 1.600,00 + 12.000 \underline{= 13.600,00\,[kr.]}$$

Følsomhedsanalyse

I eksemplet med lommeregnerne og computerne blev det analyseret, hvilken kombination at lommeregnere og computere der skulle til, for at dækningsbidraget blev størst muligt.

Forudsætningerne var: Kriteriefunktionen og begrænsningsfunktionerne.

I en virksomhed er der ofte en meget håndgribelig grund til at begrænsningsfunktionerne er, som de er.

Eksemplet med lommeregnerne og computerne er nu ikke så urealistisk endda. Man kan da sagtens forestille sig, at der er begrænset kapacitet på værkstedet – eller i et andet tilfælde, at der er begrænsede (knappe) ressourcer. F.eks. kan der måske kun ligge 4 m^3 træ på lageret etc.

Derfor er der ofte ikke mulighed for at justere på begrænsningerne. Tilbage er der kun at kunne "skrue" på kriteriefunktionen. I det følgende antages det, at der er tale om at maksimere dækningsbidraget. (Det kunne jo også dreje sig om at minimere omkostningerne).

Hvad er egentlig dækningsbidraget? Det er det beløb der tjenes på hhv. hver solgt enhed af x og y.
Så måske man kunne forestille sig, at man med de begrænsninger der er, godt kunne sætte dækningsbidraget lidt op for hver enhed x eller y eller måske endda begge dele uden at det ville ændre på begrænsningerne.

Tænk over det grafisk … Det er nu kendt, at man skal parallelforskyde niveaulinjen ($N(0)$, der jo i virkeligheden er kriteriefunktionen for dækningsbidraget lig med nul, for at finde sidste kontaktpunkt mellem polygonområdet og niveaulinjen. Spørgsmålet er nu, hvor meget man kan ændre vinklen på niveaulinjen (ved at ændre på enten a eller b i kriteriefunktionen: $f(x;y) = ax + by$, uden at man ændrer på den optimale kombination af lommeregnere og computere.

Bogen angiver en tre-trins kogebog for at lave en følsomhedsanalyse:

1) **Bestem hældning på begrænsningerne**
2) **Bestem hældningen på niveaulinjen med *a* eller *b* som ubekendt**
3) **Sammenlign og konkluder**

Tilbage til eksemplet med lommeregnerne og computerne:

Trin 1) Bestem hældning på begrænsningerne

Maksimalbetingelserne i forbrug af timer i de to afdelinger kan udtrykkes ved hjælp af følgende uligheder:

Produktionsafdelingen: $\frac{3}{4}x+3y\leq 42 \Leftrightarrow 3y\leq -\frac{3}{4}x+42 \Leftrightarrow \underline{y\leq -\frac{1}{4}x+14}$

Dvs. hældningen er $\underline{\underline{\alpha_1=-\frac{1}{4}}}$

Samle- og afprøvningsafdelingen:
Dvs. hældningen er $\underline{\underline{\alpha_2=-1}}$

Trin 2) Bestem hældning på niveaulinjen $N(0)$

$DB(x;y)=f(x;y)=200{,}00\,[kr./stk.]\cdot x+1.000{,}00\,[kr./stk.]\cdot y$

Den tilhørende niveaulinje $N(0)$ er fundet ved omskrivning:

$$DB(x;y)=f(x;y)=200{,}00\,[kr./stk.]\cdot x+1.000{,}00\,[kr./stk.]\cdot y=0$$
$$\Updownarrow$$
$$\gamma\cdot x+1.000{,}00\cdot y=0\ [\text{Undlader enheder}]$$
$$\Updownarrow$$
$$1.000{,}00\cdot y=-\gamma\cdot x$$
$$\Updownarrow$$
$$y=-\frac{\gamma}{1.000{,}00}\cdot x$$

Trin 3) Sammenlign og konkludér

Det er nu, at man skal sammenligne hældningskoefficienten på kriteriefunktionen $\left(-\frac{\gamma}{1000}\right)$ med hældningskoefficienterne fra begrænsningerne: $\left(\alpha_1=-\frac{1}{4}\text{ og }\alpha_2=-1\right)$.

Produktionsafdelingen:	$-\frac{\gamma_1}{1000}=\alpha_1$ $\Updownarrow$ $-\frac{\gamma_1}{1000}=-\frac{1}{4}$ $\Updownarrow$ $\underline{\underline{\gamma_1=250}}$

Samle- og afprøvningsafdelingen:	$-\frac{\gamma_1}{1000}=\alpha_1$ $-\frac{\gamma_2}{1000}=-1$ $\Updownarrow$ $\underline{\underline{\gamma_2=1000}}$

Det kan hermed konkluderes, at intervallet er $\underline{\underline{a \in \left]250 : 1000\right[}}$

Eller med andre ord: Dækningsbidraget (og dermed indtjeningen) for lommeregnere, kan variere fra 250,00 *kr* til 1.000,00 *kr*., uden at den optimale løsning ændres.

Dette er vel i og for sig ikke overraskende, idet den optimale kombination af producerede/solgte lommeregnere og computere var 0 lommeregnere og 14 computere. Eftersom der ikke bliver produceret og solgt en eneste lommeregner, er det vel ligegyldigt, hvad den bliver solgt for …

Eksempel 02 (En øvelse fra bogen: Strandstole):

Opgaven er løst lidt "hurtigere" uden de samme detaljerede forklaringer som i opgaven om lommeregnere og computere.

En virksomhed producerer to forskellige typer strandstole.
Stol type A har et dækningsbidrag på $1.000,00\,[kr./stk.]$, mens stol type B har et dækningsbidrag på $1.250,00\,[kr./stk.]$.

Desuden vides det, at:

- I forbindelse med produktionen af stolene anvendes en særlig maskine, som maksimalt kan anvendes 200 timer til produktionen af stolene. En stol af type A optager 1 time af maskinens kapacitet, mens en stol af type B optager 1,5 time af maskinens kapacitet.
- Begge stoletyper skal til sidst samles manuelt. Det tager 1 time at same en stol af type A og 0,75 timer at samle en stol af type B. Der kan maksimalt afsættes 140 timer til manuel samling af stole.

1) Opstil kriteriefunktionen for optimeringsproblemet.
Det ses nemt af opgaven, at:

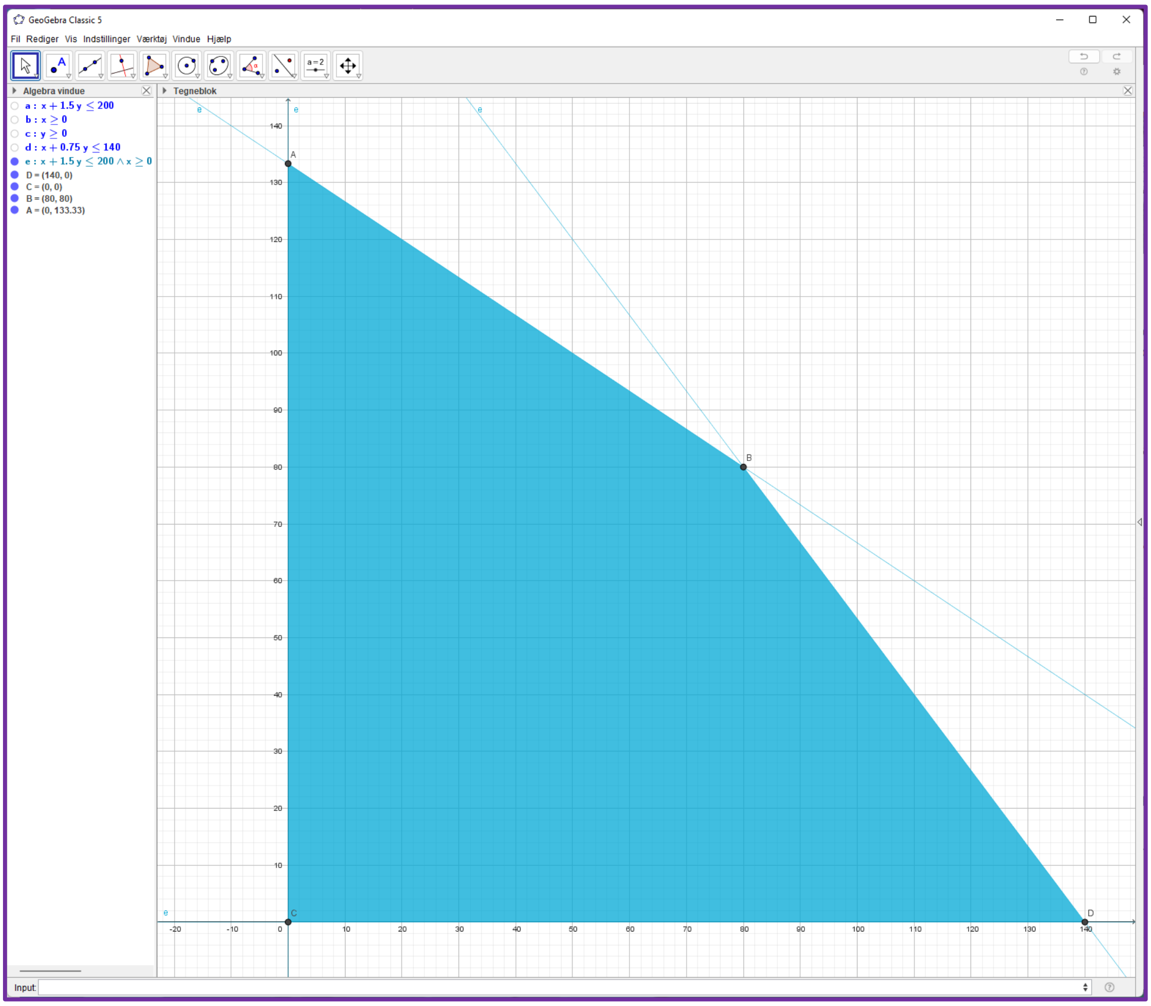
$$\underline{\underline{DB(x;y) = f(x;y) = 1.000,00\,[kr./stk.]\cdot x + 1.500,00\,[kr./stk.]\cdot y}}$$

2) Opstil begrænsningerne for optimeringsproblemet.

Forbrug af tid pr. stk.	**Type A**	**Type B**	**Maksimalt i alt**
			(Dvs. begrænsning)
Produktionsmaskine	1,0 time pr. *stk.*	1,5 time pr. *stk.*	$\leq$ 200 timer
Manuel samling	1,0 time pr. *stk.*	0,75 time pr. *stk.*	$\leq$ 140 timer
Positivitetsbetingelser			$x \geq 0$
			$y \geq 0$
Dækningsbidrag	1.000,00 *kr/stk.*	1.500,00 *kr/stk.*	

$x + 1,5y \leq 200$	$x + 0,75y \leq 140$
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$1,5y \leq -x + 200$	$0,75y \leq -x + 140$
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$y \leq \frac{-x}{1,5} + \frac{200}{1,5}$	$y \leq \frac{-x}{0,75} + \frac{140}{0,75}$
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$\underline{y \leq -0,67x + 133,33}$	$\underline{y \leq -1,33x + 186,66}$

Dette giver polygonområdet:



3) **Find den kombination af stoletyperne, der vil give virksomheden det maksimale dækningsbidrag**.

Niveaulinjen, $N(0)$, bestemmes ved at sætte kriteriefunktionen lig med 0.

$$DB(x;y) = f(x;y) = 1.000,00\,[kr./stk.] \cdot x + 1.250,00\,[kr./stk.] \cdot y = 0$$

⇕ Uden enheder

$$1000x + 1250y = 0$$

⇕

$$1250y = -1000x$$

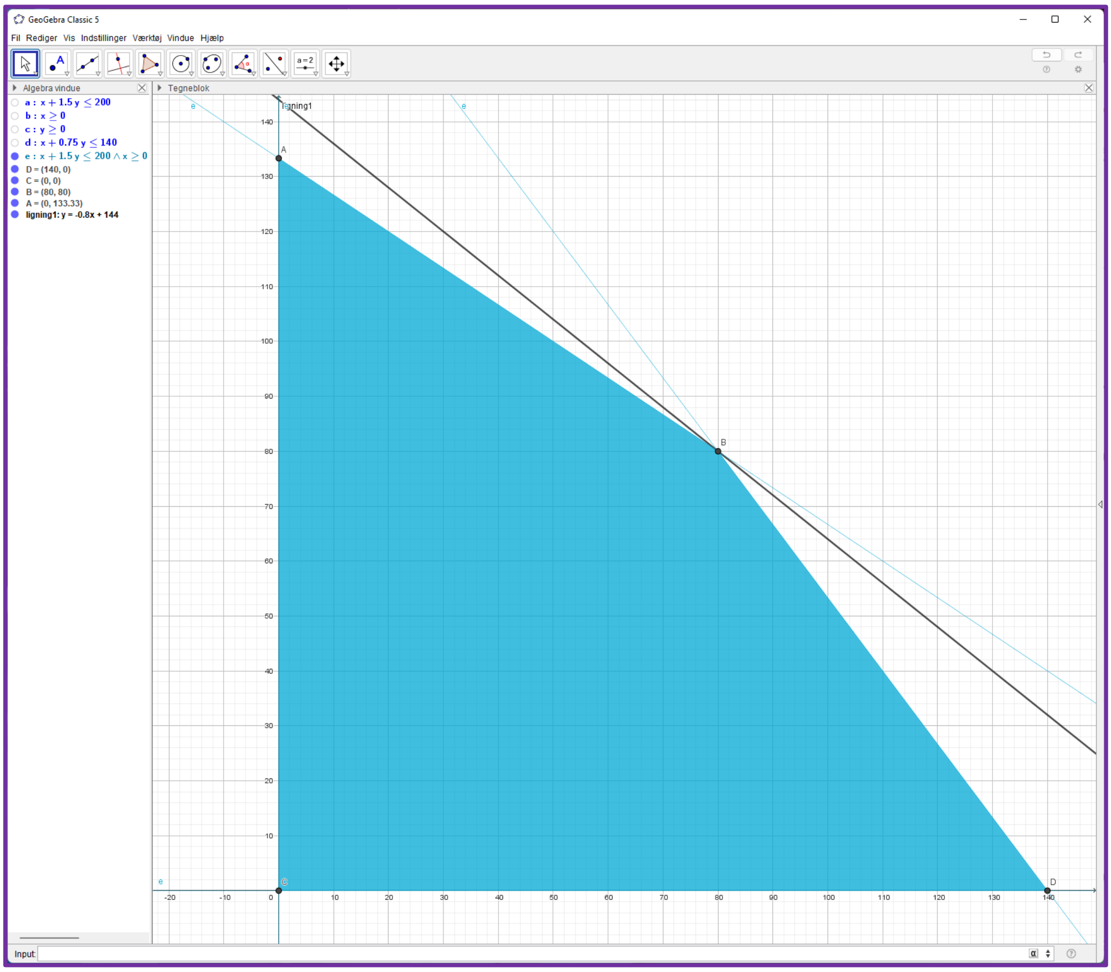
⇕

$$y = -\frac{1000}{1250}x$$

⇕

$$\underline{y = -\frac{4}{5}x} \qquad (y = -0{,}8x)$$

Lineær programmering



Niveaulinjen parallelforskydes udad. Det ses, at sidste kontaktpunkt mellem polygon-området og niveaulinjen er i punkt *B*.

Dvs. at den bedste kombination findes som 80 stole af type *A* og 80 stole af type *B*.

4) Bestem virksomhedens dækningsbidrag ved den optimale kombination af stoletyperne.

Det maksimale dækningsbidrag udregnes som:

$$DB(x;y) = f(x;y) = 1.000,00\,[kr./stk.]\cdot x\,[stk.] + 1.250,00\,[kr./stk.]\cdot y\,[stk.]$$

$$DB(80;80) = f(80;80) = 1.000,00\,[kr./stk.]\cdot 80\,[stk.] + 1.250,00\,[kr./stk.]\cdot 80\,[stk.]$$

$\Updownarrow$

$$DB(80;80) = 80.000,00\,[kr.] + 100.000,00\,[kr.]$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{DB(80;80) = 180.000,00\,[kr.]}}$$

5) Følsomhedsanalyse:
Bestem hældningerne på begrænsningerne.

Hældningerne af begrænsningsfunktionerne er indirekte fundet i spm. 2.

$\underline{\underline{\alpha_{B1} = -0,67}}$	$\underline{\underline{\alpha_{B2} = -1,33}}$

6) Følsomhedsanalyse:
Bestem hældningen på niveaulinjen $N(0)$.

$DB(x;y) = f(x;y) = a \cdot x + b \cdot y = 0$

$\Updownarrow$ Uden enheder og a som ukendt variabel gamma (γ)

$\gamma x + 1250y = 0$

$\Updownarrow$

$1250y = -\gamma x$

$\Updownarrow$

$y = -\dfrac{\gamma}{1250}x$

Dvs. at $\alpha_{N(0)} = -\dfrac{\gamma}{1250}$.

7) Følsomhedsanalyse:
Sammenlign og konkludér, i hvilket interval prisen på stol type *A* kan variere, uden at den optimale kombination ændres.

Produktionsafdelingen:	$-\dfrac{\gamma_1}{1250} = \alpha_{B1}$ $\Updownarrow$ $-\dfrac{\gamma_1}{1250} = -0,67$ $\Updownarrow$ $\gamma_1 = 0,67 \cdot 1250$ $\Updownarrow$ $\underline{\gamma_1 = 833,33}$

Samle- og afprøvningsafdelingen:	$-\dfrac{\gamma_1}{1250} = \alpha_{B2}$ $\Updownarrow$ $-\dfrac{\gamma_2}{1250} = -1,33$ $\Updownarrow$ $\gamma_2 = 1,33 \cdot 1250$ $\Updownarrow$ $\underline{\gamma_2 = 1666,67}$

Det vil altså sige, at prisen for en stol af type *A* kan variere mellem 833,50 *kr.* og 1.666.50 *kr.*

Eller sagt matematisk: $a \in [833,50\,kr.;1.667,50\,kr.]$