MATEMATIK

NOTAT 22

FINANSREGNING

AF:

CAND. POLYT.

MICHEL MANDIX

SIDSTE REVISION: NOVEMBER 2024

Oversigt over græske bogstaver:

Kapitaler	Minuskler	Navn
Α	α	Alfa
Γ	γ	Gamma
Ε	ε	Epsilon
Η	η	Eta
Ι	ι	Jota
Λ	λ	Lambda
Ν	ν	Ny
Ο	o	Omikron
Ρ	ρ	Rho
Τ	τ	Tau
Φ	φ	Phi
Ψ	ψ	Psi

Kapitaler	Minuskler	Navn
Β	β	Beta
Δ	δ	Delta
Ζ	ζ	Zeta
Θ	θ	Theta
Κ	κ	Kappa
Μ	μ	My
Ξ	ξ	Xi
Π	π	Pi
Σ	σ	Sigma
Υ	υ	Ypsilon
Χ	χ	Chi
Ω	ω	Omega

Indholdsfortegnelse:

Kort om finansregning:

Lorem ipsum …

6.1 Rente

Definition af rente:
Renten er de penge, man betaler i forbindelse med lån af penge. Det kan også være penge man får, når man sætter penge i banken. (Der er det jo bare kunden, som låner banken penge. Det hedder også indlånsrenten.)

Kort sagt, så er renten ”Prisen på penge”. Det gælder i øvrigt begge veje. Tager man et lån i banken, er renterne bankens indtægt og kompensation for at løbe den risiko at låne penge ud. Sætter man derimod penge i banken, skal banken betale en indlånsrente, som tak for at de kan bruge de penge som de vil – så længe de kan betale tilbage til enhver tid.

Rentebetegnelser:

Rente p.a. = Den (årlige) nominelle rente = Den pålydende rente
Rente pr. termin = Rentefod

Rente pr. termin:

Hvis den pålydende - påtrykte - rente f.eks. er 8 % p.a., og der tilskrives renter 4 gange om året (hvert kvartal), så er renten per termin $r_{\%\text{ pr.termin}} = \dfrac{\text{r } {}^{\%}\!/_{\text{år}}}{n \text{ }{}^{\text{terminer}}\!/_{\text{år}}} = \dfrac{8 \text{ }{}^{\%}\!/_{\text{år}}}{4 \text{ }{}^{\text{terminer}}\!/_{\text{år}}} = \underline{\underline{2 \text{ }{}^{\%}\!/_{\text{termin}}}}$.

Normalt vil man ikke på denne måde medtage alle enhederne i denne udregning, men det er vigtigt at kunne se, at tallene hænger sammen. Som nævnt i et tidligere notat, vil man ofte kunne opdage en regnefejl ved at betragte enhedsregnskabet.

I bogen er ovennævnte udtryk forsimplet til: $r_{\%\text{ pr.termin}} = \dfrac{8\ \%}{4} = \underline{\underline{2\ \%}}$, og det vil da i de fleste tilfælde blive accepteret som en fuldgyldig notation – bare man er klar over, at man ikke ser det hele.

Alle nummererede eksempler og øvelser, som er udregnet i dette notat stammer fra i-bogen ”plus 1 hhx (eux)”, kapitel 6 (Finans), som findes på systime.dk, medmindre andet er angivet.

Eksempel:

Givet et lån eller en investering med en årlig rente (rente p.a.) på 5%. For at beregne månedlig rente anvendes følgende formel:

$$Månedlig\ rente = \frac{Årlig\ rente\ p.a.}{12\ terminer\ pr.\ år} = \frac{5\ \%\ \ p.a.}{12\ terminer\ pr.\ år} \approx \underline{0{,}4167\%}$$

Bemærk, at der divideres med 12 (terminer pr. år). Det er naturligvis fordi der i dette eksempel beregnes på med månedlig rentetilskrivning. Det er forhåbentlig indlysende, at hvis der var tale om halvårlig rentetilskrivning, så skulle der divideres med 2 (terminer pr. år) etc. Så vær opmærksom på opgavens ordlyd.

Øvelse 6.1.1: Rente på SU-lån

Et SU-lån har en pålydende rente på 6 % p.a. og en løbetid på 5 år. Det står der på låne-dokumentet, som er blevet underskrevet. Der skal afbetales en fast ydelse hver måned.

1. **Hvad er renten *r* per termin og antallet af terminer *n*?**

$$r_{\%\ \mathrm{pr.termin}} = \frac{\mathrm{r}\ {}^{\%}\!/_{år}}{n\ {}^{\mathrm{terminer}}\!/_{år}} = \frac{6\ {}^{\%}\!/_{år}}{12\ {}^{\mathrm{terminer}}\!/_{år}} \Leftrightarrow \underline{\underline{r_{\%\ \mathrm{pr.termin}} = 0{,}5\ {}^{\%}\!/_{\mathrm{termin}}}}$$

$$n = 12 \cdot \frac{terminer}{år} \cdot 5\ år \Leftrightarrow \underline{\underline{n = 60\ terminer}}$$

Øvelse 6.1.2: Rente per termin (Rentefod)

Det oplyses, at pålydende rente er 12 % p.a. og løbetiden er 10 år.

Angiv renten *r* per termin og antal terminer *n*, når der tilskrives renter

- **helårligt.**
- **halvårligt.**
- **kvartårligt.**
- **månedligt.**

Helårligt	**Halvårligt**
$r_{\%\text{ pr.termin}} = \frac{\text{r } \%/_{år}}{n \text{ terminer}/_{år}} = \frac{12 \text{ } \%/_{år}}{1 \text{ terminer}/_{år}} \Leftrightarrow$ $\Updownarrow$ $\underline{\underline{r_{\%\text{ pr.termin}} = 12\,\%/_{\text{termin}}}}$ $n = 1\,\frac{\text{terminer}}{\text{år}} \cdot 10 \text{ år} \Leftrightarrow$ $\Updownarrow$ $\underline{\underline{n = 10 \text{ terminer}}}$	$r_{\%\text{ pr.termin}} = \frac{\text{r } \%/_{år}}{n \text{ terminer}/_{år}} = \frac{12 \text{ } \%/_{år}}{2 \text{ terminer}/_{år}} \Leftrightarrow$ $\Updownarrow$ $\underline{\underline{r_{\%\text{ pr.termin}} = 6\,\%/_{\text{termin}}}}$ $n = 2\,\frac{\text{terminer}}{\text{år}} \cdot 10 \text{ år} \Leftrightarrow$ $\Updownarrow$ $\underline{\underline{n = 20 \text{ terminer}}}$
Kvartårligt (kvartalsvis) $r_{\%\text{ pr.termin}} = \frac{\text{r } \%/_{år}}{n \text{ terminer}/_{år}} = \frac{12 \text{ } \%/_{år}}{4 \text{ terminer}/_{år}} \Leftrightarrow$ $\Updownarrow$ $\underline{\underline{r_{\%\text{ pr.termin}} = 3\,\%/_{\text{termin}}}}$ $n = 4\,\frac{\text{terminer}}{\text{år}} \cdot 10 \text{ år} \Leftrightarrow$ $\Updownarrow$ $\underline{\underline{n = 40 \text{ terminer}}}$	**Månedligt** $r_{\%\text{ pr.termin}} = \frac{\text{r } \%/_{år}}{n \text{ terminer}/_{år}} = \frac{12 \text{ } \%/_{år}}{12 \text{ terminer}/_{år}} \Leftrightarrow$ $\Updownarrow$ $\underline{\underline{r_{\%\text{ pr.termin}} = 1\,\%/_{\text{termin}}}}$ $n = 12\,\frac{\text{terminer}}{\text{år}} \cdot 10 \text{ år} \Leftrightarrow$ $\Updownarrow$ $\underline{\underline{n = 120 \text{ terminer}}}$

Effektiv rente:

Den effektive rente kan defineres over en periode som den rente, der skal lægges til startbeløbet for at opnå slutbeløbet.

Den effektive rente er renten pr. år, når der er *n* terminer på et år. Bemærk, at der er tale om renters rente, og derfor er den effektive rente højere end renten pr. termin (rentefoden) multipliceret med antal terminer.

Den effektive rente er givet ved formlen: $i=(1+r)^n-1$, hvor *r* er rentefoden og *n* er antal terminer pr. år.
Dvs., at hvis lånet er opgivet som "månedlige betalinger", så er *n* = 12, hvis lånet er opgivet som "kvartalsvise betalinger", så er *n* = 4 etc.
Hvis renten er givet som den nominelle rente p.a. (pro anno), benyttes følgende formel:

$$i=\left(1+\frac{r}{n}\right)^n-1$$

Eksempel:

Når en bank opgiver den pålydende rente til 8 % p.a. med kvartalsvis rentetilskrivning, så betyder det, at banken tilskriver $\frac{8\%}{4}=2\%$ i rente fire gange årligt.

Den årlige effektive rente vil i dette tilfælde være:

$$i=\left(1+\frac{8\%}{4}\right)^4-1=(1+2\%)^4-1=(1{,}02)^4-1=1{,}0824-1=0{,}0824$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{i\approx 8{,}24\%}}$$

Eksempel:

I løbet af et år er et beløb på 11.000,00 *kr*. vokset til 12.103,73 *kr*. gennem 12 månedlige rentetilskrivninger.

Den månedlige terminsrente (rentefoden) er: (Se senere afsnit for forklaring).

$$r=\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}-1=\sqrt[12]{\frac{12.103{,}73kr.}{11.000{,}00kr.}}-1=0{,}008\approx 0{,}8\%$$

Den årlige effektive rente er:

$$i=(1+r)^n-1=(1+0{,}008)^{12}-1=(1{,}008)^{12}-1=1{,}1003-1=0{,}1003$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{i\approx 10{,}03\%}}$$

Eksempel 6.1.1: Effektiv rente

En butik tilbyder at købe på afbetaling. Den månedlige rente er 1,5 %.

1. **Hvad er den effektive rente?**

$$i=(1+r)^{n}-1=(1+0,015)^{12}-1=(1,015)^{12}-1=1,1956-1$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{i=0,1956\approx 19,56\%}}$$

E07 (Matematik B₁, 2002) p. 294

En konto i et stormagasin forrentes med 1 % pr. måned. Det tænkes, at der købes for 1 *kr*. varer på kredit. Renteberegningen for et helt år kan da foretages således:

Gæld efter 12 måneder: $1\cdot 1,01^{12}$ **(Fremskrivningsformlen)** = 1,1268 *kr*.

Begyndelsesgæld (K_0) = 1,0000 *kr*.
Rente pr. krone p.a. = 0,1268 *kr*.

<u>Den **effektive rente i % p.a.** bliver således 12,68 % og IKKE 12 %</u>

Ø18 (Matematik B₁, 2002) Sammensat rentesregning (Effektiv rente) p. 294

I stedet for at låne på kredit i stormagasinet tilbyder X-købing Bank et forbrugslån til 3 % pr. kvartal.

Beregn den effektive rente p.a. for dette forbrugslån og sammenlign med renten i eksempel 7 (E7).

$$i=(1+r)^{n}-1=(1+0,03)^{4}-1=1,03^{4}-1=0,1255\Leftrightarrow \underline{\underline{i=12,55\ \%}}$$

Så det kan bedre betale sig at tage forbrugslånet i X-købing Bank, da udlånsrenten her er 0,13 % lavere.

Ø19 (Matematik B_1, 2002) Sammensat rentesregning (Effektiv rente) p. 294

Bestem den effektive rente p.a., når renten er:

a) 2 % pr. måned

$$i=(1+r)^n-1=(1+0,02)^{12}-1=0,2682 \Leftrightarrow \underline{\underline{i=26,82\ \%}}$$

b) 6 % pr. halvår

$$i=(1+r)^n-1=(1+0,06)^{2}-1=0,1236 \Leftrightarrow \underline{\underline{i=12,36\ \%}}$$

c) 4 % pr. kvartal

$$i=(1+r)^n-1=(1+0,04)^{4}-1=0,1698 \Leftrightarrow \underline{\underline{i=16,98\ \%}}$$

Øvelse 6.1.3: Effektiv rente

Beregn den effektive rente, når:

a) Den halvårlige rente er 3 %.
b) Den månedlige rente er 1 %.
c) Den kvartalsvise rente er 2 %.

Ad a) $i=(1+r)^n-1=(1+0,03)^2-1=(1,03)^2-1=1,0609-1=0,0609 \Leftrightarrow \underline{\underline{i\approx 6,09\%}}$

Ad b) $i=(1+r)^n-1=(1+0,01)^{12}-1=(1,01)^{12}-1=1,1268-1=0,1268 \Leftrightarrow \underline{\underline{i\approx 12,68\%}}$

Ad c) $i=(1+r)^n-1=(1+0,02)^4-1=(1,02)^4-1=1,0824-1=0,0824 \Leftrightarrow \underline{\underline{i\approx 8,24\%}}$

Man kan naturligvis og regne den anden vej, hvis man i en opgave får givet den effektive rente:

$$i=(1+r)^n-1$$
$$\Updownarrow$$
$$i+1=(1+r)^n$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt[n]{i+1}=1+r$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{r=\sqrt[n]{i+1}-1}$$

Eksempel:

Givet en effektiv rente på 8 % i et lån med kvartalsvise indbetalinger.

Beregn rentefoden.

$$r = \sqrt[n]{i+1} - 1$$
$$\Updownarrow$$
$$r = \sqrt[4]{0,08+1} - 1 = \sqrt[4]{1,08} - 1 = 1,08^{\frac{1}{4}} - 1 = 1,0194 - 1$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{r = 0,0194 \approx 1,94\%}},$$

hvilket svarer til en pålydende rente på: $\underline{r_{p.a.} = n \cdot r = 4 \cdot 1,94\% = 7,76\%}$

Gennemsnitlig rente:

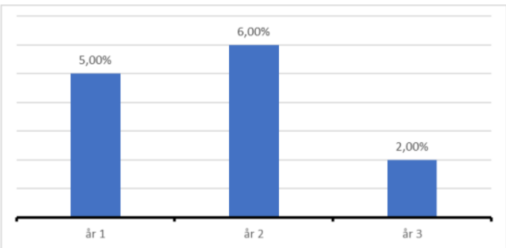
Der kan forekomme situationer, hvor renten ændrer sig over tid. I et sådant tilfælde, giver det mening at kunne udregne den gennemsnitlige rente.

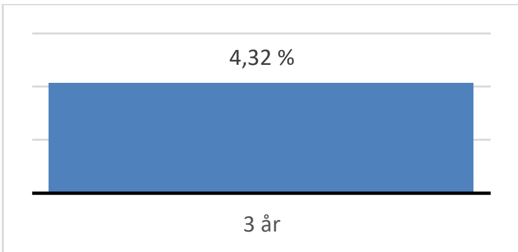
Hvis der i løbet af n terminer findes forskellige rentesatser, r_1, r_2 etc., kan man udregne den gennemsnitlige rente pr. termin ved formlen: $r = \sqrt[n]{(1+r_1)\cdot(1+r_2)\cdot(1+r_3)} - 1$.

Bemærk her, at 1-tallet ikke står under rodtegnet, og skal først trækkes fra, når roden er udregnet.

E05 **(Matematik B₁, 2002)** **p. 291**

En kapital vokser i 3 år med henholdsvis 5 % det første år, 6 % det andet år og 2 % det tredje år. Kapitalen sættes til 1 *kr*. Denne krone vil da vokse til:





$K_3 = 1 \cdot 1,05 \cdot 1,06 \cdot 1,02 = 1,13526$

Den gennemsnitlige rentetilskrivning er da ved hjælp af rentefodsformlen bestemt ved:

$$(1+r)^3 = 1,05 \cdot 1,06 \cdot 1,02$$
$$\Updownarrow$$
$$r = \sqrt[3]{1,05 \cdot 1,06 \cdot 1,02} - 1 = 0,043194$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{r \approx 4,3194\% \text{ pr. år.}}}$$

Eksempel 6.1.2: Gennemsnitlig rente

Pia indsatte 25.000 kr. i banken for 3 år siden.

Renten var:

- det første år 4 % p.a.
- det andet år 5 % p.a.
- det tredje år 2 % p.a.

1. Hvor stor har den gennemsnitlige rente været?

$$r_{snit} = \sqrt[n]{(1+r_1)\cdot(1+r_2)\cdot(1+r_3)} - 1$$

$$\Updownarrow$$

$$r_{snit} = \sqrt[3]{(1+0{,}04)\cdot(1+0{,}05)\cdot(1+0{,}02)} - 1 = \sqrt[3]{(1{,}04)\cdot(1{,}05)\cdot(1{,}02)} - 1$$

$$\Updownarrow$$

$$r_{snit} = \sqrt[3]{1{,}11384} - 1 = 1{,}0366 - 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{r_{snit} = 0{,}0366 \approx 3{,}66\,\%}}$$

Øvelse 6.1.4: Gennemsnitlig rente

Der har været følgende rentesatser de sidste 4 år:

- 1. år: 5 %
- 2. år: 2,5 %
- 3. år: 3 %
- 4. år: 4 %

1. Beregn den gennemsnitlige rente.

$$r_{snit} = \sqrt[n]{(1+r_1)\cdot(1+r_2)\cdot(1+r_3)\cdot(1+r_4)} - 1$$

$$\Updownarrow$$

$$r_{snit} = \sqrt[4]{(1+0{,}05)\cdot(1+0{,}025)\cdot(1+0{,}03)\cdot(1+0{,}04)} - 1$$

$$\Updownarrow$$

$$r_{snit} = \sqrt[4]{(1{,}05)\cdot(1{,}025)\cdot(1{,}03)\cdot(1{,}04)} - 1$$

$$\Updownarrow$$

$$r_{snit} = \sqrt[4]{1{,}152879} - 1 = 1{,}0362 - 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{r_{snit} = 0{,}0362 \approx 3{,}62\,\%}}$$

Ø13 **(Matematik B_1, 2002)** **Sammensat rentesregning** **(Gennemsnitlig %)** **p. 292**

I X-købing bank reklameres med følgende rentesatser på en anfordringskonto:

Det første år gives 3 % p.a.
Det andet år gives 4 % p.a.
Det tredje år gives 4,5 % p.a.

a) Hvad bliver den gennemsnitlige årlige rente i en 3-års periode?

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt[3]{(1+0,03)\cdot(1+0,04)\cdot(1+0,045)}-1 \\
&= \sqrt[3]{(1,03)\cdot(1,04)\cdot(1,045)}-1 \\
&= \sqrt[3]{1,119404}-1 \\
&= 1,0383-1 \\
&= \underline{\underline{0,0383 \approx 3,83\ \%}}
\end{aligned}
$$

b) Hvad bliver den gennemsnitlige årlige rente i en 5-års periode, når renten i de sidste 2 år er 4,5 % p.a.?

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt[5]{(1+0,03)\cdot(1+0,04)\cdot(1+0,045)\cdot(1+0,045)\cdot(1+0,045)}-1 \\
&= \sqrt[5]{(1,03)\cdot(1,04)\cdot(1,045)\cdot(1,045)\cdot(1,045)}-1 \\
&= \sqrt[5]{(1,03)\cdot(1,04)\cdot(1,045)^3}-1 \\
&= \sqrt[5]{1,2224171531}-1 \\
&= 1,04098-1 \\
&= \underline{\underline{0,04098 \approx 4,098\ \%}}
\end{aligned}
$$

Ø14 (Matematik B₁, 2002) Sammensat rentesregning (Gennemsnitlig %) p. 292

Den årlige prisstigning på et hus har i de første 3 år været henholdsvis 5 %, 3 % og 2 %.

a) Beregn den gennemsnitlige årlige prisstigning på huset i de tre år.

$$r = \sqrt[3]{(1+0,05)\cdot(1+0,03)\cdot(1+0,02)} - 1$$
$$= \sqrt[3]{(1,05)\cdot(1,03)\cdot(1,02)} - 1$$
$$= \sqrt[3]{1,10313} - 1$$
$$= 1,03326 - 1$$
$$\underline{\underline{= 0,03326 \approx 3,326\ \%}}$$

Huset er købt for 900.000 kr.

b) Beregn prisen på huset efter de tre år.

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$
$$\Updownarrow$$
$$K_3 = 900.000 \cdot (1+0,03326)^3 = 900.000 \cdot 1,03326^3$$ **(Fremskrivningsformlen)**
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{K_3 = 992.817\ kr.}}$$

Et andet hus kostede efter de tre år 1.200.000 kr.

c) Beregn købsprisen på huset, hvis dette hus steg med de samme procenter.

$$K_0 = K_n \cdot (1+r)^{-n}$$
$$\Updownarrow$$
$$K_0 = 1.200.000 \cdot (1+0,03326)^{-3} = 1.200.000 \cdot 1,03326^{-3}$$ **(Tilbageskrivningsformlen)**
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{K_0 = 1.087.813,77\ kr.}}$$

(Pas her på med at indtaste et tidligere resultat (renten) på lommeregneren. Hvis resultatet skal blive eksakt, skal den gennemsnitlige rente udregnes på ny, og indsættes i tilbageskrivningsformlen med alle decimaler.)

d) Beregn indekstal for huspriserne i de tre år.

Da husene stiger med samme procentsatser, er det ligegyldigt, hvilket af husene man regner på.

Pris år 0: $K_0 = 900.000\ kr.$

Pris år 1:

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n \Leftrightarrow K_1 = 900.000 \cdot (1+0,05)^1 = 900.000 \cdot 1,05^1 \Leftrightarrow K_1 = 945.000\ kr.$$

$r = \sqrt[2]{(1+0,05)\cdot(1+0,03)} - 1$
$= \underline{\underline{0,03995 \approx 3,995\%}}$ (Den gennemsnitlige rente efter 2 år)

Pris år 2:
$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n \Leftrightarrow K_2 = 900.000 \cdot (1+0,03995)^2 = 900.000 \cdot 1,03995^2 \Leftrightarrow K_2 = 973.350\ kr.$
Pris år 3:
$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n \Leftrightarrow K_3 = 900.000 \cdot (1+0,03326)^3 = 900.000 \cdot 1,03326^3 \Leftrightarrow \underline{\underline{K_3 = 992.817\ kr.}}$

(Kendt fra **a)**)

År$_i$	År 0	År 1	År 2	År 3
Pris	900.000	945.000	973.350	992.817
Index	100	105	108,15	110,31

Index beregnes som: $Index = \frac{Aktuelværdi}{Basisværdi} \cdot 100 = \underline{\underline{\frac{K_i}{K_0} \cdot 100}}$

ÅOP (Årlig Omkostning i Procent):

De samlede årlige omkostninger i procent på et lån forkortes ÅOP.

Renten alene fortæller ikke nok om prisen på lånet. Der er f.eks. gebyrer og administrationsomkostninger etc., som ikke er dækket ind under renten. For at kunne beskrive omkostningerne ved lånet bedre, benyttes ÅOP.

ÅOP indeholder alle omkostninger i forbindelse med et lån, dvs. netop renter plus administrationsomkostninger og gebyrer.

ÅOP = Renter + Administrationsomkostninger + Gebyrer

ÅOP bruges til at sammenligne prisen på forskellige lån, så man kan finde frem til det billigste lån.

ÅOP gælder også for rentefrie lån. Rentefrie lån er ikke gratis, da de ofte er pålagt gebyrer og administrationsomkostninger.

På dette niveau er ÅOP ikke noget man regner sig frem til. Det er en fast størrelse, som indeholder alle de ”skjulte” gebyrer og fordeler dem ud på en årlig rente.

Øvelse 6.1.5: Rente

Et lån med pålydende rente 12 % p.a. har månedlig rentetilskrivning.

1. Hvad er den månedlige rente? Hvad er den effektive rente?

$$= \frac{r\ \%\!/_{år}}{n\ ^{\text{terminer}}\!/_{år}} = \frac{12\ \%\!/_{år}}{12\ ^{\text{terminer}}\!/_{år}} \Leftrightarrow \underline{\underline{r_{\%\ \text{pr. termin}} = 1\%\!/_{\text{termin}}}}$$

$$i = (1+r)^n - 1 = (1+0,01)^{12} - 1 = (1,01)^{12} - 1 = 1,1268 - 1 = 0,12,68 \Leftrightarrow \underline{\underline{i \approx 12,68\ \%}}$$

I hvert af følgende 4 år har renten p.a. været 2 %, 3 %, 5 % og 8 %.

2. Bestem den gennemsnitlige rente p.a. med 3 decimaler.

$$r_{snit} = \sqrt[n]{(1+r_1)\cdot(1+r_2)\cdot(1+r_3)\cdot(1+r_4)} - 1$$

$$\Updownarrow$$

$$r_{snit} = \sqrt[4]{(1+0,02)\cdot(1+0,03)\cdot(1+0,05)\cdot(1+0,08)} - 1 = \sqrt[4]{(1,02)\cdot(1,03)\cdot(1,05)\cdot(1,08)} - 1$$

$$\Updownarrow$$

$$r_{snit} = \sqrt[4]{1,1913804} - 1 = 1,044750 - 1$$

$$\Updownarrow$$

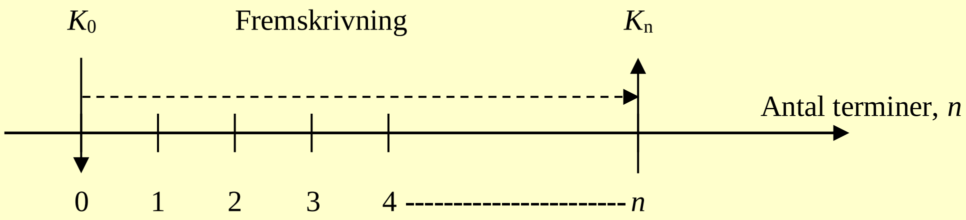
$$\underline{\underline{r_{snit} = 0,04475 \approx 4,475\%}}$$

6.2 Sammensat rentesregning
(Finansregning med ét beløb)

Sammensat rentesregning (Renters rente), beskriver den situation, at en kapital udvikler sig i løbet af et antal terminer (periode mellem to på hinanden følgende rentetilskrivningstidspunkter).

Fremskrivningsformlen:

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$



Variable, der indgår:	K_0	Lånebeløbets størrelse (Startkapital / Nutidsværdi) Begyndelseskapital til tidspunkt 0. (Tidspunkt for optagelse af lånet). Kapital er et pengebeløb.
	K_n	Saldo efter sidste indbetaling (Slutkapital / Fremtidsværdi) Slutkapital til tidspunkt *n*.
	r	Rentefod pr. termin. Renten kan angives i procent eller decimaltal. Når man skal lave beregninger hvori renten indgår, skal den først omskrives til et decimaltal. Tilsvarende skal renten omregnes tilbage til procent, hvis man bruger en formel til at finde renten.
	n	Antal indbetalinger (Terminer) Har man faste indbetalinger, kaldes de terminer. Renten pr. termin kaldes for rentefoden. Antallet af terminer er altså det samme som antallet af rentetilskrivninger.

Omskrivninger:		
Grundformel: $K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$		
Startkapital (Tilbageskrivningsformlen)	Renten	Antal terminer
$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$ $\Updownarrow$ $K_0 = \dfrac{K_n}{(1+r)^n}$ $\Updownarrow$ $K_0 = K_n \cdot (1+r)^{-n}$	$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$ $\Updownarrow$ $\sqrt[n]{\dfrac{K_n}{K_0}} = (1+r)$ $\Updownarrow$ $\sqrt[n]{\dfrac{K_n}{K_0}} = (1+r)$ $\Updownarrow$ $r = \sqrt[n]{\dfrac{K_n}{K_0}} - 1$	$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$ $\Updownarrow$ $\dfrac{K_n}{K_0} = (1+r)^n$ $\Updownarrow$ $\ln\left(\dfrac{K_n}{K_0}\right) = n \cdot \ln(1+r)$ $\Updownarrow$ $n = \dfrac{\ln\left(\dfrac{K_n}{K_0}\right)}{\ln(1+r)}$ $\Updownarrow$ $n = \dfrac{\ln(K_n) - \ln(K_0)}{\ln(1+r)}$

Alle formlerne i dette afsnit bygger på fremskrivningsformlen. Denne formel er en direkte omskrivning af forskriften for en eksponentiel funktion, idet renten er konstant og kan betragtes som den relative tilvækst.

$$f(x) = b \cdot a^x$$

$y = b \cdot a^x$, hvor a kan skrives som $(1+r)$, hvor r er den relative tilvækst, dvs.:

$$y = b \cdot (1+r)^x$$

For en startkapital, K_o, som bliver tilskrevet en fast rente, r, over n terminer, gælder der, at størrelsen på slutkapitalen, K_n, kan beregnes ved:

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot (1+r)^n}$$

Hvorfor virker det?

Givet et eksempel, hvor 100,00 kr. indsættes på en konto med en rente på 10 %, som tilskrives én gang om året. (Ikke nødvendigvis realistisk, men nemt at forstå!)

Termin År	Saldo_**Primo** Symbolsk	Udregning	Saldo_Primo	Rente Symbolsk	Rente (10 % af saldo_Primo)	Saldo_**Ultimo** Symbolsk	Saldo_Ultimo
0	$K_0\cdot(1+r)^0$ $=K_0\cdot 1$ $=K_0$	$=100\cdot(1+0{,}1)^0$ $=100\cdot 1$ $=100$	$K_0=100{,}00\,kr.$	$=K_0\cdot r$	$=100{,}00\,kr.\cdot 0{,}1$ $=10{,}00\,kr.$	$=K_0+K_0\cdot r$ $=K_0\cdot(1+r)$	$=100{,}00+100{,}00\cdot 0{,}1$ $=100{,}00+10{,}00$ $=110{,}00$
1	$K_1=K_0\cdot(1+r)^1$ $=K_0\cdot(1+r)$	$=100+100\cdot(1+0{,}1)^1$ $=100\cdot 1{,}1^1$	$K_1=110{,}00\,kr.$	$=K_1\cdot r$ $=K_0\cdot(1+r)\cdot r$	$=110{,}00\,kr.\cdot 0{,}1$ $=11{,}00\,kr.$	$=K_0\cdot(1+r)\cdot(1+r)$ $=K_0\cdot(1+r)^2$	$=110{,}00+110{,}00\cdot 0{,}1$ $=110{,}00+11{,}00$ $=121{,}00$
2	$K_2=K_0\cdot(1+r)^2$	$=110+110\cdot 1{,}1$ $=110\cdot(1+0{,}1)$ $=100\cdot 1{,}1\cdot 1{,}1$ $=100\cdot 1{,}1^2$	$K_2=121{,}00\,kr.$	$=K_2\cdot r$ $=K_1\cdot(1+r)\cdot r$ $=K_0\cdot(1+r)^2\cdot r$	$=121{,}00\,kr.\cdot 0{,}1$ $=12{,}10\,kr.$	$=K_1\cdot(1+r)$ $=K_0\cdot(1+r)^2\cdot(1+r)$ $=K_0\cdot(1+r)^3$	$=121{,}00+121{,}00\cdot 0{,}1$ $=121{,}00+12{,}10$ $=133{,}10$
3	$K_3=K_0\cdot(1+r)^3$	$=121+121\cdot 1{,}1$ $=121\cdot(1+0{,}1)$ $=100\cdot 1{,}1\cdot 1{,}1\cdot 1{,}1$ $=100\cdot 1{,}1^3$	$K_3=133{,}10\,kr.$	$=K_3\cdot r$ $=K_2\cdot(1+r)\cdot r$ $=K_1\cdot(1+r)^2\cdot r$ $=K_0\cdot(1+r)^3\cdot r$	$=133{,}10\,kr.\cdot 0{,}1$ $=13{,}31\,kr.$	$=K_2\cdot(1+r)$ $=K_0\cdot(1+r)^3\cdot(1+r)$ $=K_0\cdot(1+r)^4$	$=133{,}10+133{,}10\cdot 0{,}1$ $=133{,}10+13{,}31$ $=146{,}41$
4	$K_4=K_0\cdot(1+r)^4$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$K_n=K_0\cdot(1+r)^n$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Bemærk, at for termin 0 (tidspunktet, hvor pengene indsættes på kontoen) og for termin 1, da er n-potensen mere af teoretisk karakter. Husk, at ethvert tal opløftet i 0'te potens er lig med 1 og at ethvert tal opløftet i 1. potens er tallet selv.
Her er de kun skrevet for pædagogikkens og systematikkens skyld, da det fuldender skemaet.

Det ses af 2. kolonne, at saldoen (primo) til den n'te termin er lig med $K_n=K_0\cdot(1+r)^n$.

E01 (Matematik B₁, 2002) p. 286

En mand indsætter 1.000,00 *kr.* på en bankkonto, som forrentes med 3 % p.a. Han ønsker at bestemme saldoen efter 10 år, dvs.:

K_0	=	Begyndelseskapitalen	=	1.000,00 *kr.*
r	=	Rentefoden	=	0,03 (= 3 %)
n	=	Antal terminer	=	10

og det ønskes at beregne K_{10}. Da K_n som en funktion af antal terminer n er en eksponentiel udvikling med begyndelsesværdien K_0 og fremskrivningsfaktoren $(1+r)$, kan K_{10} bestemmes ved:

$$K_n=K_0\cdot(1+r)^n$$

$$\Updownarrow$$

$$K_{10}=1.000{,}00\,kr.\cdot(1+0{,}03)^{10}=1.000{,}00\,kr.\cdot 1{,}03^{10}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{K_{10}=1.343{,}92\,kr.}}$$

Hvad med Excel ???

Der findes desværre ikke en fiks og færdig funktion, som kan udregne fremskrivningen. Gudskelov er formlen ikke alt for kompliceret. Bemærk cellenavne.

	A	B	C	D	E	F
59	**Betegnelse**	**Excel, navn**	**Værdi**			
60	Rente:	r Rente	3,00%			
61	Startkapital:	k_0 Startkapital	1.000,00 kr.		=C61*(1+C60)^C62	
62	Antal terminer:	n Antal terminer	10			

	A	B	C	D	E	F
59	**Betegnelse**	**Excel, navn**	**Værdi**			
60	Rente:	r Rente	3,00%			
61	Startkapital:	k_0 Startkapital	1.000,00 kr.		1.343,92 kr.	
62	Antal terminer:	n Antal terminer	10			

Eksempel 6.2.1: Fremskriv ét beløb

Et beløb på 10.000,00 *kr*. forrentes med 1 % per måned på en bankkonto.

a) Hvor meget vokser beløbet til på 24 måneder?

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$

$$\Updownarrow$$

$$K_{24} = 10.000{,}00\ kr. \cdot (1+0{,}01)^{24} = 10.000{,}00\ kr. \cdot 1{,}01^{24}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{K_{24} = 12.697{,}35\ kr.}}$$

E02 (Matematik B1, 2002) p. 288

1.000,00 *kr*. indsættes på en konto i 10 år med kvartårlig rentetilskrivning med en rentefod på 3 % pr. år.

Antal terminer er da: $n = 4\frac{terminer}{år} \cdot 10\,år \Leftrightarrow \underline{n = 40\,år}$.

Rentesatsen er: $r = \dfrac{3\%/_{år}}{4\,^{terminer}/_{år}} \Leftrightarrow r = 0{,}75\%/_{termin}$

Slutkapitalen, K_n, efter 10 år (= 40 terminer), bestemmes ved:

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$

$$\Updownarrow$$

$$K_{40} = 1.000{,}00\ kr. \cdot (1+0{,}0075)^{40}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{K_{24} = 1.348{,}35\ kr.}}$$

Dette beløb er større end i eksempel 1 (E1), idet der løbende tilskrives rente flere gange.

Øvelse 6.2.1: Fremskriv ét beløb

Hvor meget kan 10.000,00 *kr*. vokse til:

a) På 24 måneder, hvis renten er 1 % per måned?

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$
$$\Updownarrow$$
$$K_{24} = 10.000{,}00\ kr. \cdot (1+0{,}01)^{24} = 10.000{,}00\ kr. \cdot 1{,}01^{24}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{K_{24} = 12.697{,}35\ kr.}}$$

b) På 5 år, hvis renten er 4 % per år?

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$
$$\Updownarrow$$
$$K_5 = 10.000{,}00\ kr. \cdot (1+0{,}04)^5 = 10.000{,}00\ kr. \cdot 1{,}04^5$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{K_5 = 12.166{,}53\ kr.}}$$

c) På 20 kvartaler, hvis renten er 1,5 % per kvartal?

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$
$$\Updownarrow$$
$$K_{20} = 10.000{,}00\ kr. \cdot (1+0{,}015)^{20} = 10.000{,}00\ kr. \cdot 1{,}015^{20}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{K_{20} = 13.468{,}55\ kr.}}$$

Hvor meget til 10.000,00 *kr*. vokse til

d) På 10 halvår, hvis renten er 3 % per halvår?

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$
$$\Updownarrow$$
$$K_{10} = 10.000{,}00\ kr. \cdot (1+0{,}03)^{10} = 10.000{,}00\ kr. \cdot 1{,}03^{10}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{K_{10} = 13.439{,}16\ kr.}}$$

e) På 3 år, hvis renten er 0,5 % per måned?

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$
$$\Updownarrow$$
$$K_{36} = 10.000{,}00\ kr. \cdot (1+0{,}005)^{36} = 10.000{,}00\ kr. \cdot 1{,}005^{36}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{K_{36} = 11.966{,}81\ kr.}}$$

Ø01 (Matematik B₁, 2002) Sammensat rentesregning (Fremskrivningsformlen) p. 288

Beregn slutkapitalen i eksempel 1 (E1) ved følgende rentesatser pr. termin:

a) 4%

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n \Leftrightarrow K_{10} = 1.000,00\,kr. \cdot (1+0,04)^{10} = 1.000 \cdot 1,04^{10} \Leftrightarrow \underline{\underline{K_{10} = 1.448,24\,kr.}}$$

b) 5%

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n \Leftrightarrow K_{10} = 1.000,00\,kr. \cdot (1+0,05)^{10} = 1.000 \cdot 1,05^{10} \Leftrightarrow \underline{\underline{K_{10} = 1.628,89\,kr.}}$$

c) 6%

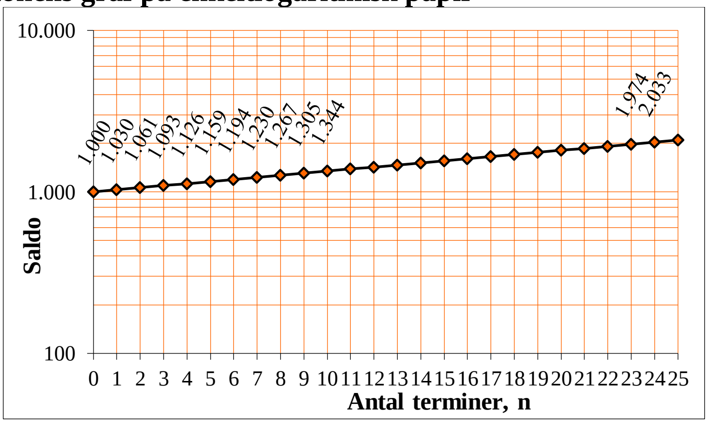
$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n \Leftrightarrow K_{10} = 1.000,00\,kr. \cdot (1+0,06)^{10} = 1.000 \cdot 1,06^{10} \Leftrightarrow \underline{\underline{K_{10} = 1.790,85\,kr.}}$$

Ø02 (Matematik B₁, 2002) Sammensat rentesregning (Fremskrivningsformlen) p. 288

Udarbejd en tabel, der viser saldoen i de forskellige terminer i eksempel 1 (E1), dvs. bestem K_0, K_1,....., K_{10} ved rentesatsen 3% p.a.:

n	Saldo
0	1.000,00
1	1.030,00
2	1.060,90
3	1.092,73
4	1.125,51
5	1.159,27
6	1.194,05
7	1.229,87
8	1.266,77
9	1.304,77
10	1.343,92

a) Indtegn funktionens graf på enkeltlogaritmisk papir



b) Aflæs fordoblingstiden og beregn denne. Vink: Se kapitel 8.

Aflæsning: Det ses af grafen, at funktionsværdien 2.000 opnås ca. midt mellem den 23. og den 24. termin. Da man (som regel) altid skal runde terminer opad, er det altså <u>24 terminer.</u>

Beregning: Af kapitel 8 fås at fordoblingstiden $T_2 = \dfrac{\ln(2)}{\ln(a)}$, hvor $a = (1+r)$.

$a = (1+r) = (1+0,03) = 1,03$, hvilket sættes ind i udtrykket for fordoblingskonstanten:

$T_2 = \dfrac{\ln(2)}{\ln(a)} = \dfrac{\ln(2)}{\ln(1,03)} = 23,45$, altså igen lig med <u>24 terminer</u>.

Ø03 (Matematik B_1, 2002) Sammensat rentesregning (Fremskrivningsformlen) p. 288

Hvor meget er 25.000,00 *kr.* vokset til på 10 år, når renten i hele perioden er 9 % p.a.?

K_0	=	Begyndelseskapitalen	=	25.000 *kr.*
r	=	Rentefoden	=	0,09 (= 9 %)
n	=	Antal terminer	=	10

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$

$$\Updownarrow$$

$$K_{10} = 25.000,00\,kr. \cdot (1+0,09)^{10} = 25.000 \cdot 1,09^{10}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{K_{10} = 59.184,09\ kr.}}$$

Ø04 (Matematik B_1, 2002) Sammensat rentesregning (Fremskrivningsformlen) p. 288

Hvis det antages, at man siden år 0 har fået forrentet 1 *øre* (= 0,01 *kr.*) med 5 % p.a., hvor meget er denne kapital vokset til i år 2000?

K_0	=	Begyndelseskapitalen	=	0,01 *kr.*
r	=	Rentefoden	=	0,05 (= 5%)
n	=	Antal terminer	=	2000

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$

$$\Updownarrow$$

$$K_{2000} = 0,01\,kr. \cdot (1+0,05)^{2000} = 0,01\,kr. \cdot 1,05^{2000}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{K_{2000} = 2,39 \cdot 10^{40}\ kr.}}$$

FYI:

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$

$$\Updownarrow$$

$$K_{2024} = 0,01\,kr. \cdot (1+0,05)^{2024} = 0,01\,kr. \cdot 1,05^{2024}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{K_{2024} = 7,71 \cdot 10^{40}\ kr.}}$$

Ø05 (Matematik B_1, 2002) **Sammensat rentesregning** (Fremskrivningsformlen) p. 288

Der indsættes 10.000,00 *kr*. på en boligopsparingskonto i 1998. Renten i de første 3 år er 4 % p.a., de følgende 3 år 4,5 % p.a. og de følgende 3 år 5 % p.a.

Hvor meget er saldoen på boligopsparingen efter 9 år?

Man udregner resultatet progressivt:

K_0	=	Begyndelseskapitalen	=	10.000,00 *kr*.
r	=	Rentefoden	=	0,04 (= 4 %)
n	=	Antal terminer	=	3

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$

$$\Updownarrow$$

$$K_3 = 10.000,00\,kr. \cdot (1+0,04)^3 = 10.000,00\,kr. \cdot 1,04^3$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{K_3 = 11.248,64\,kr.}$$

K_0	=	Begyndelseskapitalen	=	11.248,64 *kr*.
r	=	Rentefoden	=	0,045 (= 4,5 %)
n	=	Antal terminer	=	3

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$

$$\Updownarrow$$

$$K_{3(+3)} = 11.248,64\,kr. \cdot (1+0,045)^3 = 11.248,64\,kr. \cdot 1,045^3$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{K_{3(+3)} = 12.836,57\,kr.}$$

K_0	=	Begyndelseskapitalen	=	12.836,57 *kr*.
r	=	Rentefoden	=	0,05 (= 5 %)
n	=	Antal terminer	=	3

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$

$$\Updownarrow$$

$$K_{3(+6)} = 12.836,57\,kr. \cdot (1+0,05)^3 = 12.836,57\,kr. \cdot 1,05^3$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{K_{3(+6)} = 14.859,93\,kr.}}$$

Ø06 **(Matematik B$_1$, 2002)** **Sammensat rentesregning** **(Fremskrivningsformlen)** **p. 288**

Et studielån på 15.000,00 *kr*. optages i 1995 og forrentes med 8 % p.a. med kvartårlig rentetilskrivning. Hele lånet med renter og renters rente skal tilbagebetales på én gang i år 2001.

Hvor meget er gælden vokset til?

Da renten tilskrives kvartårligt – dvs. 4 gange om året, og lånet forrentes med 4 % p.a., betyder det, at

$r = \frac{4\%}{4} = 1\ \%$ pr. termin.

Samtidig – da lånet skal betales tilbage efter (2001-1995) = 6 år, er antallet af terminer:

$n = 6 \cdot 4 = 24$ terminer.

Følgende værdier indsættes derfor i fremskrivningsformlen:

K_0	=	Begyndelseskapitalen	=	15.000,00 *kr*.
r	=	Rentefoden	=	0,01 (= 1 %)
n	=	Antal terminer	=	24

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$

$$\Updownarrow$$

$$K_{24} = 15.000,00\,kr. \cdot (1+0,01)^{24} = 15.000,00\,kr. \cdot 1,01^{24}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{K_{24} = 19.046,02\,kr.}}$$

Ø07 (Matematik B_1, 2002) Sammensat rentesregning (Fremskrivningsformlen) p. 288

Der indsættes 100.000,00 kr. på en konto, hvor renten er 5 % p.a.

K_0	=	Begyndelseskapitalen	=	100.000 kr.
r	=	Rentefoden	=	0,05 / Terminer pr. år
n	=	Antal terminer		

Hvor meget vokser beløbet til på 1 år, hvis:

a) Renten tilskrives én gang årligt?

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$
$\Updownarrow$
$$K_1 = 100.000,00\,kr. \cdot (1+0,05)^1 = 100.000,00\,kr. \cdot 1,05^1$$
$\Updownarrow$
$$\underline{\underline{K_1 = 105.000,00\,kr.}}$$

b) Renten tilskrives halvårligt?

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$
$\Updownarrow$
$$K_2 = 100.000,00\,kr. \cdot \left(1+\frac{0,05}{2}\right)^2 = 100.000,00\,kr. \cdot 1,025^2$$
$\Updownarrow$
$$\underline{\underline{K_2 = 105.062,50\,kr.}}$$

c) Renten tilskrives kvartårligt?

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$
$\Updownarrow$
$$K_4 = 100.000,00\,kr. \cdot \left(1+\frac{0,05}{4}\right)^4 = 100.000,00\,kr. \cdot 1,0125^4$$
$\Updownarrow$
$$\underline{\underline{K_4 = 105.094,53\,kr.}}$$

d) Renten tilskrives månedligt?

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$
$\Updownarrow$
$$K_{12} = 100.000,00\,kr. \cdot \left(1+\frac{0,05}{12}\right)^{12}$$
$\Updownarrow$
$$\underline{\underline{K_{12} = 105.116,19\,kr.}}$$

e) Renten tilskrives ugentligt?

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$
$\Updownarrow$
$$K_{52} = 100.000,00\,kr. \cdot \left(1+\frac{0,05}{52}\right)^{52}$$
$\Updownarrow$
$$\underline{\underline{K_{52} = 105.124,58\,kr.}}$$

f) Renten tilskrives dagligt?

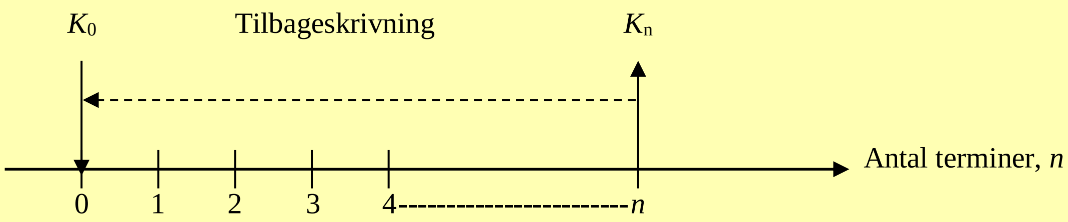
$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$
$\Updownarrow$
$$K_{365} = 100.000,00\,kr. \cdot \left(1+\frac{0,05}{365}\right)^{365}$$
$\Updownarrow$
$$\underline{\underline{K_{365} = 105.126,75\,kr.}}$$

Tilbageskrivningsformlen:

Det er allerede etableret, at alle formler i dette notat i sidste ende stammer fra fremskrivningsformlen, og at alle andre formler (særligt i afsnittet om sammensat rentesregning), er dannet ved omskrivning af fremskrivningsformlen.

Det gennemgås ikke igen her, da der allerede er redegjort for omskrivningen i det foregående afsnit, men grundformlen for tilbageskrivningen (eller formlen for begyndelseskapitalen) tages her for givet.

Begyndelseskapitalen er givet ved formlen: $K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n} = K_n \cdot (1+r)^{-n}$, hvor:



K_0	=	Begyndelseskapitalen
K_n	=	Slutkapitalen
r	=	Rentefoden
n	=	Antal terminer

Eksempel 6.2.2: Tilbagefør ét beløb

Om 24 måneder, skal der betales 10.000,00 *kr*. for et musikanlæg. Der regnes med en rente på 1 % per måned. Hvor meget skal der sættes ind på kontoen nu, for at der er de 10.000,00 *kr*. om to år?

Hvor meget skal der sættes ind på kontoen nu, for at der er de 10.000,00 *kr*. om to år?

$$K_0 = K_n \cdot (1+r)^{-n}$$

$\Updownarrow$

$$K_0 = 10.000,00\ kr. \cdot (1+0,01)^{-24} = 10.000,00\ kr. \cdot 1,01^{-24}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{K_0 = 7.875,66\ kr.}}$$

Hvad med Excel ???

Der findes desværre ikke en fiks og færdig funktion, som kan udregne tilbageskrivningen. Gudskelov er formlen ikke alt for kompliceret. Bemærk cellenavne.

	A	B	C	D	E	F
59	**Betegnelse**	**Excel, navn**	**Værdi**			
60	Rente:	r Rente	1,00%			
61	Slutkapital:	k_n Slutkapital	10.000,00 kr.		=C61*(1+C60)^-C62	
62	Antal terminer:	n Antal terminer	24			

	A	B	C	D	E	F
59	**Betegnelse**	**Excel, navn**	**Værdi**			
60	Rente:	r Rente	1,00%			
61	Slutkapital:	k_n Slutkapital	10.000,00 kr.		7.875,66 kr.	
62	Antal terminer:	n Antal terminer	24			

E03 (Matematik B₁, 2002) p. 289

Ifølge et gældsbrev skal der betales 10.000,00 *kr*. om 6 år. Kreditor ønsker at frigøre pengene i dag, idet han har fået et investeringstilbud, der giver et afkast på 10 % p.a. Hvor meget skal han mindst forlange for gældsbrevet i dag?

$K_6 \quad = \quad 10.000{,}00\ kr.$

$r \quad = \quad 10\ \% = 0{,}1$

$n \quad = \quad 6$

$$K_0 = K_6 \cdot (1+r)^{-n} = 10.000{,}00\,kr. \cdot (1+0{,}1)^{-6} = 10.000{,}00\,kr. \cdot 1{,}1^{-6}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{K_0 = 5.644{,}74\ kr.}}$$

<u>Dvs. at kreditor skal forlange mindst 5.644,74 *kr*. for gældsbrevet.</u>

Øvelse 6.2.2: Tilbagefør ét beløb

Om 5 år skal der indfries en gæld på 100.000,00 *kr*. Renten er 4 % p.a. med halvårlig rentetilskrivning.

a) Hvor stort et beløb skal der indsættes i dag for at gælden kan indfries?

$$K_0 = K_n \cdot (1+r)^{-n}$$

$$\Updownarrow$$

$$K_0 = 100.000,00\ kr. \cdot \left(1+\frac{0,04}{2}\right)^{-10} = 100.000,00\ kr. \cdot (1+0,02)^{-10} = 100.000,00\ kr. \cdot 1,02^{-10}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{K_0 = 82.034,83\ kr.}}$$

Schmidt skal indfri en gæld i sit hus på 50.000,00 *kr*. den 11. juni 2015. Han indsætter den 11. juni 2010 så stort et beløb på sin konto, at der netop kommer til at stå 50.000,00 *kr*. på kontoen den 11. juni 2015.

b) Hvor stort et beløb har Schmidt indsat, hvis der er en helårlig rentetilskrivning på 3 %?

$$K_0 = K_n \cdot (1+r)^{-n}$$

$$\Updownarrow$$

$$K_0 = 50.000,00\ kr. \cdot (1+0,03)^{-5} = 50.000,00\ kr. \cdot 1,03^{-5}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{K_0 = 43.130,44\ kr.}}$$

c) Hvor stort et beløb skal indsættes, hvis der er tale om en kvartalsvis rentetilskrivning på 2 %?

$$K_0 = K_n \cdot (1+r)^{-n}$$

$$\Updownarrow$$

$$K_0 = 50.000,00\ kr. \cdot (1+0,02)^{-20} = 50.000,00\ kr. \cdot 1,02^{-20}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{K_0 = 33.648,57\ kr.}}$$

Ø08 **(Matematik B_1, 2002)** **Sammensat rentesregning** **(Tilbageskrivningsformlen)** **p. 290**

Hvor meget skal der indsættes på en konto, når der tilskrives 6 % p.a., og der ønskes et beløb om 10 år på 100.000,00 kr., hvis der tilskrives renter:

K_n	=	Slutkapitalen	=	100.000,00 kr.
r	=	Rentefoden	=	0,06 / Antal terminer pr. år
n	=	Antal terminer	=	Antal terminer pr. år · 10 år

a) Helårligt?

$$K_0 = K_n \cdot (1+r)^{-n}$$

$\Updownarrow$

$$K_0 = 100.000,00 \cdot (1+0,06)^{-10} = 100.000,00 \cdot 1,06^{-10}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{K_0 = 55.839,48 \text{ kr.}}}$$

b) Halvårligt?

$$K_0 = K_n \cdot (1+r)^{-n}$$

$\Updownarrow$

$$K_0 = 100.000,00 \cdot \left(1+\frac{0,06}{2}\right)^{-20} = 100.000,00 \cdot 1,03^{-20}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{K_0 = 55.367,58 \text{ kr.}}}$$

c) Kvartårligt?

$$K_0 = K_n \cdot (1+r)^{-n}$$

$\Updownarrow$

$$K_0 = 100.000,00 \cdot \left(1+\frac{0,06}{4}\right)^{-40} = 100.000,00 \cdot 1,015^{-40}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{K_0 = 55.126,23 \text{ kr.}}}$$

Ø09 **(Matematik B₁, 2002)** **Sammensat rentesregning** **(Tilbageskrivningsformlen)** **p. 290**

Hvor meget har man indsat på en konto i 1977, hvis der i 1998 blev udbetalt 35.000,00 kr., hvis:

K_n	=	Slutkapitalen	=	35.000,00 kr.
r	=	Rentefoden	=	$r = 10 \%\!/_{\text{termin}}\!/_{\text{år}}$
n	=	Antal terminer	=	Antal terminer pr. år · Antal år

a) Renten i hele perioden har været 10 % p.a. med helårlig rentetilskrivning?
Antal år = 1998-1977 = 21 år.

$$K_0 = K_n \cdot (1+r)^{-n}$$
$$\Updownarrow$$
$$K_0 = 35.000,00 \cdot (1+0,10)^{-21} = 35.000,00 \cdot 1,10^{-21}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{K_0 = 4.729,57 \text{ kr.}}}$$

b) Renten i hele perioden har været 10 % p.a. med halvårlig rentetilskrivning?
Antal år = 1998-1977 = 21 år.

$$K_0 = K_n \cdot (1+r)^{-n}$$
$$\Updownarrow$$
$$K_0 = 35.000,00 \cdot \left(1+\frac{0,10}{2}\right)^{-42} = 35.000,00 \cdot 1,05^{-42}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{K_0 = 4.509,39 \text{ kr.}}}$$

c) Renten i var 14 % p.a. indtil 1991, og derefter 9 % p.a. med helårlig rentetilskrivning?
Antal år (første periode) = 1991-1977 = 14 år. (14 % p.a.)
Antal år (anden periode) = 1998-1991 = 7 år. (7 % p.a.)

$$K_0 = K_n \cdot (1+r)^{-n}$$
$$\Updownarrow$$
$$K_0 = 35.000,00 \cdot (1+0,09)^{-7} = 35.000,00 \cdot 1,09^{-7}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{K_0 = 19.146,20 \text{ kr.}}$$

$$K_0 = K_n \cdot (1+r)^{-n}$$
$$\Updownarrow$$
$$K_0 = 19.146,20 \cdot (1+0,14)^{-14} = 19.146,20 \cdot 1,14^{-14}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{K_0 = 3.057,84 \text{ kr.}}}$$

Ø10 (Matematik B_1, 2002) Sammensat rentesregning (Tilbageskrivningsformlen) p. 290

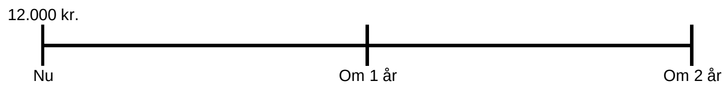
Som betaling for en computer kan køberen vælge mellem tre tilbud:

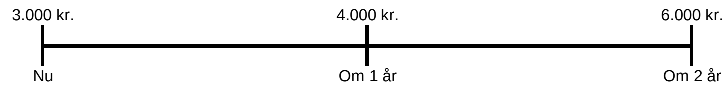
A: Der betales 12.000,00 kr. kontant (dvs. på købstidspunktet)

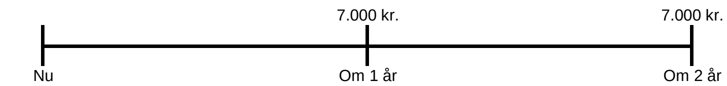
B: Der betales 3.000,00 kr. kontant, 4.000,00 kr. om et år og yderligere 6.000,00 kr. efter 2 år.

C: Der betales 7.000,00 kr. efter 1 år og 7.000,00 kr. efter 2 år.

a) Illustrér betalingerne på en tidsakse (Én for hver betalingsmetode)







b) Hvilket af de tre tilbud er billigst for køberen, når renten er 8% p.a.?
Vink: Tilbageskriv de enkelte beløb til købstidspunktet.

A: Her betales 12.000 kr. her og nu, og det betyder, at den totale udgift er <u>12.000,00 kr.</u>

B: Her betales 3.000 kr. nu. De kommer til at koste 3.000 kr. – som i tilfældet ovenover. Men der skal betales 4.000 kr. om et år. Hvis man tænker sådan, at hvis de 4.000 kr. skulle betales nu, så skulle de lånes f.eks. i banken. Men så ville de jo være mere "værd" end 4.000 kr. om et år, da der jo skal betales 8% i rente p.a. Hvis vi "vender" situationen om, så kan man sige, hvor meget kan man spare, ved ikke at skulle betale et års renter af 4.000 kr. For så har man jo friheden til at kunne bruge de 4.000 kr. på alt muligt andet i mellemtiden. De skal jo først falde om et år. (Og ligeledes for de 6.000 kr., der først skal betales om 2 år.)

Pris:

$$K_0 = K_n \cdot (1+r)^{-n} \Leftrightarrow K_0 = 3.000 + 4.000 \cdot 1{,}08^{-1} + 6.000 \cdot 1{,}08^{-2} = 3.000 + 3.703{,}70 + 5.144{,}03$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{K_0 = 11.847{,}74 \text{ kr.}}}$$

C: Som i tilfælde *B*, kan der spares penge ved ikke at skulle betale renter i 1 hhv. 2 år.

Pris: $7.000 \cdot 1{,}08^{-1} + 7.000 \cdot 1{,}08^{-2} = 7.3703{,}70 + 5.144{,}03 = \underline{\underline{12.482{,}85 \text{ kr.}}}$

<u>**Altså er alternativ *B* billigst!**</u>

Rentefodsformlen:

Også formlen for rentefoden er udledt på baggrund af fremskrivningsformlen.

Rentefoden pr. termin *r*, bestemmes ved: $r = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$, hvor:

r	=	Rentefoden
K_n	=	Slutkapitalen
K_0	=	Begyndelseskapitalen
n	=	Antal terminer

Eksempel 6.2.3: Beregn renten

Et beløb på 10.000,00 *kr*. er vokset til 12.697,35 *kr*. på 24 måneder.

a) Hvad er den månedlige rente?

$$r = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

$\Updownarrow$

$$r = \sqrt[24]{\frac{12.697,35\,kr.}{10.000,00\,kr.}} - 1$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{r = 0,01 \approx 1\%}}$$

Hvad med Excel ???

Funktionen, der skal bruges hedder: "**RRI**".

	A	B	C	D	E	F
29	**Betegnelse**	**Excel, navn**	**Værdi**			
30	Startkapital:	nv Nutidsværdi	10.000,00 kr.			
31	Fremtidsværdi:	fv Fremtidsværdi	12.697,35 kr.		=RRI(C32;C30;C31)	
32	Antal terminer:	n Antal terminer	24			
33					RRI(nper; nv; fv)	

	A	B	C	D	E	F
29	**Betegnelse**	**Excel, navn**	**Værdi**			
30	Startkapital:	nv Nutidsværdi	10.000,00 kr.			
31	Fremtidsværdi:	fv Fremtidsværdi	12.697,35 kr.		1,00%	
32	Antal terminer:	n Antal terminer	24			

E04 **(Matematik B_1, 2002)** **p. 291**

En aktie købes i 1992 til kurs 250 og sælges i 1998 til kurs 450. Der er ikke udbetalt udbytte i perioden.

Da fås:

$$K_n = 450$$
$$K_0 = 250$$
$$n = 6$$

Renten bestemmes da ved:

$$r = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$
$$\Updownarrow$$
$$r = \sqrt[6]{\frac{450}{250}} - 1$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{r = 0{,}10292 \approx 10{,}292\ \%}}$$

Ø11 **(Matematik B_1, 2002)** **Sammensat rentesregning** **(Rentefodsbestemmelse)** **p. 291**

En kapital på 1.250 kr. vokser i løbet af 4 år til 2.167,49 kr. Renten tilskrives hvert kvartal.

Bestem rentefoden pr. kvartal.

K_n	=	Slutkapitalen	=	2.167,49 kr.
K_0	=	Begyndelseskapitalen	=	1.250,00 kr.
n	=	Antal terminer	=	Kvartårligt over 4 år = 4·4 = 16

$$r = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 = \sqrt[16]{\frac{2.167{,}49}{1.250{,}00}} - 1$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{r = 0{,}035 \approx 3{,}5\ \%}}$$

Ø12 (Matematik B_1, 2002) Sammensat rentesregning (Rentefodsbestemmelse) p. 291

I 1990 indsattes 5.000,00 kr. på en konto. Indtil 1994 var renten 6 % p.a., hvorefter renten sænkedes til 4 % p.a.

a) Bestem saldoen på kontoen i 1998.

(Fremskrivningsformlen)

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$
$$\Updownarrow$$
$$K_4 = 5.000,00 \cdot (1+0,06)^4 = 5.000,00 \cdot 1,06^4$$
$$\Updownarrow$$
$$K_4 = 6.312,38 \text{ kr.}$$

(Fremskrivningsformlen)

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$
$$\Updownarrow$$
$$K_8 = 6.312,38 \cdot (1+0,04)^4 = 6.312,38 \cdot 1,04^4$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{K_8 = 7.384,60 \text{ kr.}}}$$

b) Hvad er den gennemsnitlige rente i pct. p.a. for hele perioden (1990-1998)?

$$r = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 = \sqrt[8]{\frac{7.384,60}{5.000,00}} - 1$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{r = 0,0499 \approx 4,99\%}}$$

Øvelse 6.2.3: Beregn renten

Peter indsatte 12.500,00 *kr*. den 1. oktober 2005. Den 1. oktober 2011 hævede han 17.632,48 *kr*.

a) Hvilken årlig rente kan banken have givet?

$$r = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

$\Updownarrow$

$$r = \sqrt[6]{\frac{17.632,48\,kr.}{12.500,00\,kr.}} - 1$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{r = 0,059 \approx 5,9\%}}$$

Banken oplyser, at den har givet en rente på 0,48 % per termin.

b) Hvor mange gange om året har banken tilskrevet renter?

$$n = \frac{\ln(K_n) - \ln(K_0)}{\ln(1+r)}$$

$\Updownarrow$

$$n = \frac{\ln(17.632,48\,kr.) - \ln(12.500,00\,kr.)}{\ln(1+0,0048)} = \frac{\ln(17.632,48\,kr.) - \ln(12.500,00\,kr.)}{\ln(1,0048)}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{n = 71,84 \approx 72}}$$

Da det er månedligt tilskrevne renter, er der altså gået $\underline{\underline{år = \frac{72\,terminer}{6\ {}^{terminer}\!/_{år}} = 12\,år.}}$

Antal terminer:

Formlen for antallet af terminer er udledt på baggrund af fremskrivningsformlen, ligesom rentefodsformlen og tilbageskrivningsformlen.

Terminsantallet *n* bestemmes ved formlen: $n = \dfrac{\ln(K_n) - \ln(K_0)}{\ln(1+r)}$, hvor:

n	=	Antal terminer
K_n	=	Slutkapitalen
K_0	=	Begyndelseskapitalen
r	=	Rentefoden

Husk at terminsantallet altid skal rundes opad til nærmeste hele tal. Man får jo ikke noget foræret hos bankerne...

Eksempel 6.2.4: Beregn antal terminer

Ét beløb på 10.000,00 *kr*. vokser med en månedlig rente på 1 % til 12.697,35 *kr*.

a) Beregn antal terminer.

$$n = \frac{\ln(K_n) - \ln(K_0)}{\ln(1+r)}$$

$\Updownarrow$

$$n = \frac{\ln(12.697{,}35\,kr.) - \ln(10.000{,}00\,kr.)}{\ln(1+0{,}01)} = \frac{\ln(12.697{,}35\,kr.) - \ln(10.000{,}00\,kr.)}{\ln(1{,}01)}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{n = 24}}$$

Hvad med Excel ???

Funktionen, der skal bruges hedder: "**PVARIGHED**".

	A	B	C	E	F
21	**Betegnelse**	**Excel, navn**	**Værdi**		
22	Startkapital:	nv Nutidsværdi	10.000,00 kr.		
23	Fremtidsværdi:	fv Fremtidsværdi	12.697,35 kr.	=PVARIGHED(C24;C22;C23)	
24	Rente	r Rente	1%		
25				PVARIGHED(rente; nv; fv)	

	A	B	C	E	F
21	**Betegnelse**	**Excel, navn**	**Værdi**		
22	Startkapital:	nv Nutidsværdi	10.000,00 kr.		
23	Fremtidsværdi:	fv Fremtidsværdi	12.697,35 kr.	24,00	
24	Rente	r Rente	1%		

E6 (Matematik B_1, 2002) p. 293

En kapital er vokset fra 2.000,00 *kr*. til 5.000,000 *kr*. Renten er 10 % p.a.

Antal år er da:

$$n=\frac{\ln\left(K_n\right)-\ln\left(K_0\right)}{\ln\left(1+r\right)}$$

$\Updownarrow$

$$n=\frac{\ln\left(5.000,00\right)-\ln\left(2.000,00\right)}{\ln\left(1+0,1\right)}=\frac{\ln\left(5.000,00\right)-\ln\left(2.000,00\right)}{\ln\left(1,1\right)}=9,61$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{n\approx 10 \text{ år}}}$$

Dvs. der går 10 år, før beløbet overstiger 5.000,00 *kr*., da der kun tilskrives renter én gang årligt.

Ø15 (Matematik B_1, 2002) Sammensat rentesregning (Terminsantal) p. 293

Hvor mange kvartaler går der, før 6.200,00 *kr*. er vokset til 15.000,00 *kr*., når renten er 2,5 % pr. kvartal?

$$n=\frac{\ln(K_n)-\ln(K_0)}{\ln(1+r)}=\frac{\ln(15.000,00)-\ln(6.200,00)}{\ln(1+0,025)}$$

$\Updownarrow$

$$n=\frac{\ln(15.000,00)-\ln(6.200,00)}{\ln(1,025)}=35,77$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{n\approx 36 \text{ kvartaler}}}$$

Øvelse 6.2.4: Beregn antal terminer

Sanne indbetalte 40.000,00 *kr.* den 1. april 2012 på sin konto. Renten er 2 % p.a. og der er helårlig rentetilskrivning.

a) Hvornår vil saldoen udgøre 200.000,00 *kr.*

$$n = \frac{\ln(K_n) - \ln(K_0)}{\ln(1+r)}$$

$$\Updownarrow$$

$$n = \frac{\ln(200.000{,}00\,kr.) - \ln(40.000{,}00\,kr.)}{\ln(1+0{,}02)} = \frac{\ln(200.000{,}00\,kr.) - \ln(40.000{,}00\,kr.)}{\ln(1{,}02)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{n = 81{,}27\,år \text{ dvs. } 82\,år}}$$

b) Hvornår vil saldoen udgøre 200.000,00 *kr.*, hvis der tilskrives rente per halvår med 1,5 %?

$$n = \frac{\ln(K_n) - \ln(K\ )}{\ln(1+r)}$$

$$\Updownarrow$$

$$n = \frac{\ln(200.000{,}00\,kr.) - \ln(40.000{,}00\,kr.)}{\ln(1+0{,}015)} = \frac{\ln(200.000{,}00\,kr.) - \ln(40.000{,}00\,kr.)}{\ln(1{,}015)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{n = 108{,}09\,halvår \text{ dvs. } 109\,halvår \text{ dvs. } 54{,}5\ år}}$$

Ø16 (Matematik B₁, 2002) Sammensat rentesregning (Terminsantal) p. 218

Et beløb på 10.000,00 *kr.* er vokset til over 13.500,00 *kr.* i X-købing Bank.
Banken tilskrev 3 % p.a. med halvårlig tilskrivning.

a) Hvor mange år har beløbet mindst stået på kontoen i X-købing Bank?

$$n = \frac{\ln(K_n) - \ln(K_0)}{\ln(1+r)} = \frac{\ln(13.500) - \ln(10.000)}{\ln\left(1 + \frac{0{,}03}{2}\right)} = 20{,}15 \Leftrightarrow \underline{\underline{n \approx 21 \text{ kvartaler eller } 10{,}5 \text{ år}}}$$

b) Vis at saldoen efter 20 terminer (10 år) er nøjagtig 13.468,55

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n \Leftrightarrow K_{20} = 10.000{,}00 \cdot \left(1 + \frac{0{,}03}{2}\right)^{20} = 10.000{,}00 \cdot 1{,}015^{20} \Leftrightarrow \underline{\underline{K_{20} = 13.468{,}55 \text{ kr.}}}$$

(Fremskrivningsformlen)

Øvelse 6.2.5: Frem- og tilbageskrivning af beløb

Brian har i dag 25.000,00 *kr.*, stående på sin konto, som giver 4 % i rente per år.
De sidste 3 år har Brian hverken indsat eller hævet på kontoen.

a) Hvad var saldoen på Brians konto for 3 år siden, hvis der tilskrives renter

a. Helårligt

$$K_0 = K_n \cdot (1+r)^{-n}$$
$$\Updownarrow$$
$$K_0 = 25.000,00\ kr. \cdot (1+0,04)^{-3} = 25.000,00\ kr. \cdot 1,04^{-3}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{K_0 = 22.224,91\ kr.}}$$

b. Halvårligt

$$K_0 = K_n \cdot (1+r)^{-n}$$
$$\Updownarrow$$
$$K_0 = 25.000,00\ kr. \cdot \left(1+\frac{0,04}{2}\right)^{-6} = 25.000,00\ kr. \cdot (1+0,02)^{-6} = 25.000,00\ kr. \cdot 1,02^{-6}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{K_0 = 22.199,28\ kr.}}$$

c. Kvartårligt

$$K_0 = K_n \cdot (1+r)^{-n}$$
$$\Updownarrow$$
$$K_0 = 25.000,00\ kr. \cdot \left(1+\frac{0,04}{4}\right)^{-12} = 25.000,00\ kr. \cdot (1+0,01)^{-12} = 25.000,00\ kr. \cdot 1,01^{-12}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{K_0 = 22.186,23\ kr.}}$$

Øvelse 6.2.6: Beregn rente og terminer

Carstens konto er de sidste 4 år vokset fra 20.000,00 *kr*. til 25.000,00 *kr*.

a) Hvad er renten på Carstens konto, hvis der tilskrives renter

1. Helårligt

$$r = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$
$$\Updownarrow$$
$$r = \sqrt[4]{\frac{25.000,00\,kr.}{20.000,00\,kr.}} - 1$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{r = 0,0574 \approx 5,74\%}}$$

2. Halvårligt

$$r = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$
$$\Updownarrow$$
$$r = \sqrt[8]{\frac{25.000,00\,kr.}{20.000,00\,kr.}} - 1$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{r = 0,0283 \approx 2,83\%}}$$

3. Kvartårligt

$$r = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$
$$\Updownarrow$$
$$r = \sqrt[16]{\frac{25.000,00\,kr.}{20.000,00\,kr.}} - 1$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{r = 0,0140 \approx 1,40\%}}$$

Dannys konto er vokset fra 15.000,00 *kr*. til 20.000,00 *kr*. med en rente på 4 % per år.

b) Hvad er løbetiden, hvis der renten tilskrives

1. Helårligt

$$n = \frac{\ln(K_n) - \ln(K_0)}{\ln(1+r)}$$
$$\Updownarrow$$
$$n = \frac{\ln(20.000,00\,kr.) - \ln(15.000,00\,kr.)}{\ln(1+0,04)}$$
$$\Updownarrow$$
$$n = \frac{\ln(20.000,00\,kr.) - \ln(15.000,00\,kr.)}{\ln(1,04)}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{n = 7,33\,år \text{ dvs. } 8\,år}}$$

2. Halvårligt

$$n = \frac{\ln(K_n) - \ln(K_0)}{\ln(1+r)}$$
$$\Updownarrow$$
$$n = \frac{\ln(20.000,00\,kr.) - \ln(15.000,00\,kr.)}{\ln(1+0,04\cdot 2)}$$
$$\Updownarrow$$
$$n = \frac{\ln(20.000,00\,kr.) - \ln(15.000,00\,kr.)}{\ln(1,08)}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{n = 3,74\,år \text{ dvs. } 4\,år}}$$

3. Kvartårligt

$$n = \frac{\ln(K_n) - \ln(K_0)}{\ln(1+r)}$$
$$\Updownarrow$$
$$n = \frac{\ln(20.000,00\,kr.) - \ln(15.000,00\,kr.)}{\ln(1+0,04\cdot 4)}$$
$$\Updownarrow$$
$$n = \frac{\ln(20.000,00\,kr.) - \ln(15.000,00\,kr.)}{\ln(1,16)}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{n = 1,94\,år \text{ dvs. } 2\,år}}$$

Øvelse 6.2.7: Gæt en saldo

Laura satte 10.000 kroner ind på en bankkonto efter sin konfirmation for 4 år siden.
Renten på kontoen har alle årene været 3 % p.a.

1. **Gæt uden brug af hjælpemidler, hvad der nu står på kontoen**
    1. 11.200 kroner
    2. 11.255 kroner
    3. 15.234 kroner

Saldoen må være svar 2) 11.255 kr.

2. **Beskriv, hvorfor at påstanden ovenfor må være det rigtige.**

Alene efter et år, må saldoen være 10.000 kr. plus 300 kr. Hovedregning giver at efter fire år må renterne være 4·300 kr. dvs. omkring 1200 kr. plus en sjat, som skyldes renter og renters rente. Derfor er 11.200 kr. for lidt og 15.234 kr. er alt for meget.

Ø17 (Matematik B$_1$, 2002) Sammensat rentesregning (Terminsantal) p. 293

Bestem fordoblingstiden (afrundet til et helt antal terminer), når renten pr. termin er:

a) 6 %

Fordoblingstiden er givet som $T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)}$, hvor $a = (1+r)$. (Kapitel 8 – p. 228)

Man ser altså, at fordoblingstiden er fuldstændig uafhængig af både begyndelseskapital og slut-kapital.

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}06)} = 11{,}89 \Leftrightarrow \underline{\underline{T_2 \approx 12 \text{ terminer}}}$$

(Tommelfingerregel test: 11,89 terminer og 6 % – 11,89·6 = 71,34 – Omkring 70 – OK)

b) 10 %

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}10)} = 7{,}27 \Leftrightarrow \underline{\underline{T_2 \approx 8 \text{ terminer}}}$$

(Tommelfingerregel test: 7,27 terminer og 10 % – 7,27·10 = 72,70 – Omkring 70 – OK)

c) 2 %

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}02)} = 35{,}0027 \Leftrightarrow \underline{\underline{T_2 \approx 36 \text{ kvartaler}}}$$

(Tommelfingerregel test: 35,0027 terminer og 2 % – 35,0027·2 = 70,0056 – Omkring 70 – OK)

d) 3,4 %

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}0{,}35)} = 20{,}149 \Leftrightarrow \underline{\underline{T_2 \approx 21 \text{ kvartaler}}}$$

(Tommelfingerregel test: 20,149 terminer og 3,5 % – 20,149·3,5 = 70,52 – Omkring 70 – OK)

6.3 Annuitetsregning
(Finansregning med flere ens beløb)

En annuitet er defineret som en række lige store ydelser, y, som betales med lige store mellemrum n gange (antal terminer) til en fast rente, r.

I bogen er givet to forskellige formler. Den ene anvendes, når der er tale om opsparinger, og den anden anvendes, når der er tale om lån og gæld. De navngives derfor efter deres anvendelse:

Opsparingsformlen:		**Lån- og gældsformlen:**
$A_n = y\cdot\frac{(1+r)^n-1}{r}$		$A_0 = y\cdot\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$
Variable, der indgår:	A_0	Lånebeløbets størrelse (Startkapital / Nutidsværdi)
	A_n	Saldo efter sidste indbetaling (Slutkapital / Fremtidsværdi)
	y	Ydelsen (Fast indbetaling pr. termin)
	r	Renten (tilpasset til terminer pr. år)
	n	Antal indbetalinger (Terminer)

Omskrivninger:

Grundformel: $A_n = y\cdot\frac{(1+r)^n-1}{r}$		Grundformel: $A_0 = y\cdot\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$	
Ydelse	Antal terminer	Ydelse	Antal terminer
$A_n = y\cdot\frac{(1+r)^n-1}{r}$ $\Updownarrow$ $A_n\cdot r = y\cdot\left((1+r)^n-1\right)$ $\Updownarrow$ $y=\frac{A_n\cdot r}{(1+r)^n-1}$	$A_n = y\cdot\frac{(1+r)^n-1}{r}$ $\Updownarrow$ $\frac{A_n}{y}=\frac{(1+r)^n-1}{r}$ $\Updownarrow$ $\frac{A_n\cdot r}{y}=(1+r)^n-1$ $\Updownarrow$ $\frac{A_n\cdot r}{y}+1=(1+r)^n$ $\Updownarrow$ $\ln\left(\frac{A_n\cdot r}{y}+1\right)=n\cdot\ln(1+r)$ $\Updownarrow$ $n=\frac{\ln\left(\frac{A_n\cdot r}{y}+1\right)}{\ln(1+r)}$	$A_0 = y\cdot\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$ $\Updownarrow$ $A_0\cdot r = y\cdot\left(1-(1+r)^{-n}\right)$ $\Updownarrow$ $y=\frac{A_0\cdot r}{1-(1+r)^{-n}}$	$A_0 = y\cdot\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$ $\Updownarrow$ $\frac{A_0}{y}=\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$ $\Updownarrow$ $\frac{A_0\cdot r}{y}=1-(1+r)^{-n}$ $\Updownarrow$ $\frac{A_0\cdot r}{y}-1=-(1+r)^{-n}$ $\Updownarrow$ $1-\frac{A_0\cdot r}{y}=(1+r)^{-n}$ $\Updownarrow$ $\ln\left(1-\frac{A_0\cdot r}{y}\right)=-n\cdot\ln(1+r)$ $\Updownarrow$ $n=-\frac{\ln\left(1-\frac{A_0\cdot r}{y}\right)}{\ln(1+r)}$

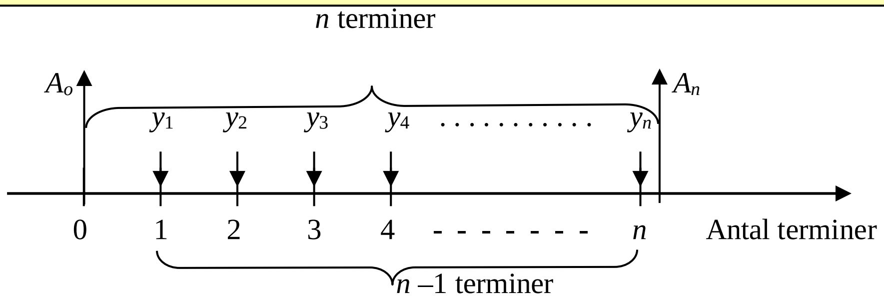
Bemærk at renten, r, forekommer to gange i udtrykket. Det vil være et uoverskueligt arbejde at isolere r på en fornuftig måde, så bliver man i opgave bedt om at udregne r, bør dette gøres vha. CAS. Bogens værktøj virker, men det er lige så nemt at lave udregningen i Excel.

Kapitel 6.3 – Fremtidsværdi af en annuitet

Fremtidsværdi af en annuitet (Opsparingsformlen)

Fremtidsværdien af en annuitet kan beregnes ved hjælp af denne formel, som også kaldes for **Opsparingsformlen**: $\boxed{A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}}$, hvor:

A_n	=	Fremtidsværdien af annuiteten
y	=	Annuitetsydelsen
r	=	Rentefoden pr. termin
n	=	Antal ydelser (terminer)



Bevis:

Betragter man den ovenstående tidslinje, ser man, at der til tiden n indsættes et beløb (en ydelse). Alle de tidligere indbetalte ydelser har alle fået tilskrevet renter – og for de flestes vedkommende – også renters renter. Men den sidste ydelse har jo ikke fået tilskrevet rente endnu, da der ikke er gået en termin, hvorpå der kan tilskrives renter.
Den sidste ydelse betragtes først:

$$A_n = y + y\cdot(1+r)^1 + y\cdot(1+r)^2 + \cdots + y\cdot(1+r)^{n-1}$$

$\Updownarrow$ Ganger med $(1+r)$ på begge sider

$$A_n\cdot(1+r) = y\cdot(1+r)^1 + y\cdot(1+r)^2 + \cdots + y\cdot(1+r)^{n-1} + y\cdot(1+r)^n$$

$\Updownarrow$ Træk A_n fra på begge sider

$$A_n\cdot(1+r) - A_n = y\cdot(1+r)^1 + y\cdot(1+r)^2 + \cdots + y\cdot(1+r)^{n-1} + y\cdot(1+r)^n - A_n$$

$\Updownarrow$

$$A_n\cdot(1+r) - A_n = y\cdot(1+r)^1 + y\cdot(1+r)^2 + \cdots + y\cdot(1+r)^{n-1} + y\cdot(1+r)^n - \left(y + y\cdot(1+r)^1 + y\cdot(1+r)^2 + \cdots + y\cdot(1+r)^{n-1}\right)$$

$\Updownarrow$

$$A_n\cdot(1+r) - A_n = \cancel{y\cdot(1+r)^1 + y\cdot(1+r)^2 + \cdots + y\cdot(1+r)^{n-1}} + y\cdot(1+r)^n - y \cancel{- y\cdot(1+r)^1 - y\cdot(1+r)^2 - \cdots - y\cdot(1+r)^{n-1}}$$

$\Updownarrow$

$$A_n\cdot(1+r) - A_n = y\cdot(1+r)^n - y$$

$\Updownarrow$

$$A_n + A_n\cdot r - A_n = y\cdot(1+r)^n - y$$

$\Updownarrow$

$$A_n\cdot r = y\cdot\left((1+r)^n - 1\right)$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{A_n = y\cdot\frac{(1+r)^n - 1}{r}}}$$

Eksempel 6.3.1: Beregn opsparing

500,00 *kr*. indsættes på en bankkonto hver måned.
Renten er 1 % pr. måned.

a) Hvor meget er opsparet efter 24 måneder?

Hvis man vil lave en lille kontrolberegning, kan man jo forestille sig, at der slet ikke tilskrives renter.

Det er da givet, at hvis man har indbetalt 500,00 *kr*. i 24 måneder (terminer), så er der indbetalt 12.000,00 *kr*.

Da saldoen i opgaven er på 13.486,73 *kr*. efter de 24 måneder, må differencen på 1.486,73 *kr*. være de samlede tilskrevne renter.

Da renten er på blot 1 %, virker dette rimeligt!

$y = 500,00\,kr., \quad r = 1\,\%\ (=0,01) \quad \text{og} \quad n = 24$

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$\Updownarrow$

$$A_{24} = 500,00\ kr \cdot \frac{(1+0,01)^{24} - 1}{0,01} = 500,00\ kr \cdot \frac{1,01^{24} - 1}{0,01}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{A_{24} = 13.486,73\ kr.}}$$

Øvelse 6.3.1: Beregn opsparing

1.000,00 *kr*. indsættes hvert kvartal på en opsparingskonto.

Renten er 8 % p.a., dvs. $r_{\text{kvartal}} = \frac{8\ \%\ \text{p.a.}}{4} = 2\ \%$ pr. kvartal.

a) Hvor meget står der på opsparingskontoen efter 10 år (40 kvartaler)?

$y = 1.000,00\,kr., \quad r = 2\ \%\ \text{pr. kvartal}\ (=0,02)\ \text{og}\ n = 40$

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$\Updownarrow$

$$A_{40} = 1.000,00\ kr \cdot \frac{(1+0,02)^{40} - 1}{0,02} = 1.000,00\ kr \cdot \frac{1,02^{40} - 1}{0,02}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{A_{40} = 60.401,98\ kr.}}$$

E1 (Matematik B₁, 2002) p. 296

Der indbetales hvert år i 4 år 1.000,00 *kr*. på en opsparingskonto, hvor renten er 4 % p.a.

Annuiteten kan med fordel illustreres på en tidsakse:

SCAN ILLUSTRATION PÅ P. 296

Pilene viser, at de enkelte ydelser skal fremføres til tidspunktet $n=4$.
Derved fremkommer A_4. Ved at fremskrive de enkelte betalinger, fås:

Kapitalværdi af 1. ydelse til $t=4$:	$1.000,00\,kr.\cdot 1,04^3 = 1.124,86\,kr.$
Kapitalværdi af 2. ydelse til $t=4$:	$1.000,00\,kr.\cdot 1,04^2 = 1.081,60\,kr.$
Kapitalværdi af 3. ydelse til $t=4$:	$1.000,00\,kr.\cdot 1,04^1 = 1.040,00\,kr.$
Kapitalværdi af 4. ydelse til $t=4$:	$1.000,00\,kr.\cdot 1,04^0 = 1.000,00\,kr.$

Kapitalværdi af annuitet efter 4 ydelser:

$$A_4 = 1.124,86\,kr. + 1.081160\,kr. + 1.040,00\,kr. + 1.000,00\,kr. \Leftrightarrow \underline{\underline{A_4 = 4.246,46\,kr.}}$$

Denne metode er meget enkel og forudsætter kun brug af fremskrivningsformlen. Hvis der dog er mange ydelser, er metoden meget tidskrævende og uoverskuelig. Heldigvis kan dette gøres enklere, idet der er udledt en formel for A_n. Udledningen er vist tidligere i dette afsnit.

E2 (Matematik B₁, 2002) p. 297

Formlen kan i eksempel E1 beregne A_4 på følgende måde:

y	=	Annuitetsydelsen	=	1.000 *kr*.
n	=	Antal ydelser (terminer)	=	4
r	=	Rentefoden pr. termin	=	4 % p.a. = 0,04
A_n	=	Fremtidsværdien af annuiteten		

$$A_n = y\cdot\frac{(1+r)^n-1}{r}$$

$$\Updownarrow$$

$$A_4 = 1.000,00\cdot\frac{(1+0,04)^4-1}{0,04}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{A_4 = 4.246,46\,kr.}}$$

Hvad med Excel ???

Funktionen, der skal bruges hedder: "**FV**". Det erindres, at i Excel er ydelsen en udgift (det skal jo betales og er udgående på kontoen, og er derfor en negativ værdi).
Derfor indtastes et – (minustegn) foran det tredje argument til funktionen.

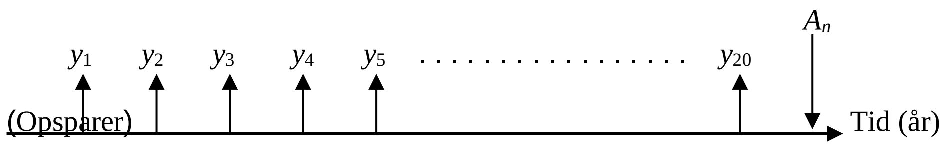
	A	B	C	D	E	F
11	**Betegnelse**	**Excel, navn**	**Værdi**			
12	Ydelse:	**nv** Nutidsværdi	1.000,00 kr.			
13	Antal terminer:	**nper** Antal ydelser	4		=FV(C14;C13;-C12)	
14	Rente:	**r** Rente	4%		FV(rente; nper; **ydelse**; [nv]; [type])	
15						

	A	B	C	D	E	F
11	**Betegnelse**	**Excel, navn**	**Værdi**			
12	Ydelse:	**nv** Nutidsværdi	1.000,00 kr.			
13	Antal terminer:	**nper** Antal ydelser	4		4.246,46 kr.	
14	Rente:	**r** Rente	4%			

Ø01 **(Matematik B₁, 2002)** **Annuitet (Opsparing)** **p. 298**

Der indbetales hvert år 1.500,00 kr. på en selvpensioneringskonto i alt 20 gange. Renten er 5 % p.a.

a) Illustrér annuiteten på en tidsakse,



b) Hver meget er der opsparet efter sidste indbetaling?

A_n	=	Fremtidsværdien af annuiteten		
y	=	Annuitetsydelsen	=	1.500 *kr.*
r	=	Rentefoden pr. termin	=	5 % p.a.
n	=	Antal ydelser (terminer)	=	20

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$\Updownarrow$$

$$A_{20} = 1.500,00 \cdot \frac{(1+0,05)^{20} - 1}{0,05}$$

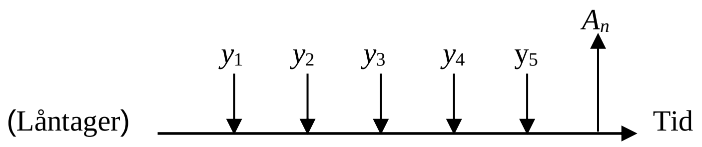
$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{A_{20} = 49.598,93\,kr.}}$$

Ø02 (Matematik B_1, 2002) **Annuitet (Opsparing)** **p. 298**

En studerende optager i 5 år et studielån på 15.000,00 kr. Der betales ikke af på lånet i denne periode, men renten tilskrives løbende med 3 % p.a.

Hvor meget skylder den studerende efter sidste udbetaling?



A_n	=	Fremtidsværdien af annuiteten		
y	=	Annuitetsydelsen	=	15.000 *kr*.
r	=	Rentefoden pr. termin	=	3 % p.a.
n	=	Antal ydelser (terminer)	=	5

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} \Leftrightarrow A_5 = 15.000,00 \cdot \frac{(1+0,03)^5 - 1}{0,03} \Leftrightarrow \underline{\underline{A_5 = 79.637,04\ kr.}}$$

Ø03 **(Matematik B₁, 2002)** **Annuitet** **(Opsparing)** **p. 298**

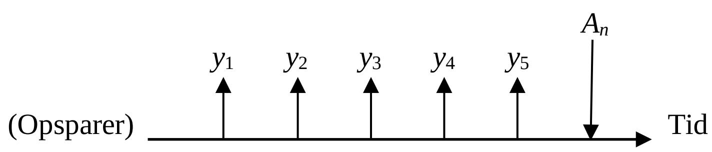
En bank reklamerer med en etableringskonto, hvor der kan indskydes op til 25 % af nettolønnen. Dog max. 50.000 kr. og min. 5.000 kr.

Clausen er 25 år gammel og vil starte som selvstændig håndværker når han er 30 år.
Han tjener 150.000 kr. efter skat og vil indbetale på en etableringskonto.

a) Beregn hvor meget han kan indbetale, når han vil betale 25 % af netto-lønnen.

y = Annuitetsydelsen = 150.000 · 25 % = 37.500 *kr.*

b) Hvor meget har Clausen opsparet, når han er 30 år og renten er 4 % p.a. med helårlig rentetilskrivning?



A_n = Fremtidsværdien af annuiteten
y = Annuitetsydelsen = 37.500 *kr.*
r = Rentefoden pr. termin = 4 % p.a.
n = Antal ydelser (terminer) = 5

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 37.500,00 \cdot \frac{(1+0,04)^5 - 1}{0,04} \Leftrightarrow \underline{\underline{A_n = 203.112,10\,kr.}}$$

c) Hvor meget er der opsparet hvis Clausen indskyder 50.000 kr. hvert år?

A_n = Fremtidsværdien af annuiteten
y = Annuitetsydelsen = 50.000,00 *kr.*
r = Rentefoden pr. termin = 4 % p.a.
n = Antal ydelser (terminer) = 5

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 50.000,00 \cdot \frac{(1+0,04)^5 - 1}{0,04} \Leftrightarrow \underline{\underline{A_n = 270.816,13\,kr.}}$$

d) Hvor meget er der opsparet, hvis der kun indskydes 5.000 *kr.* hvert år?

A_n = Fremtidsværdien af annuiteten
y = Annuitetsydelsen = 5.000 kr.
r = Rentefoden pr. termin = 4 % p.a.
n = Antal ydelser (terminer) = 5

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 5.000,00 \cdot \frac{(1+0,04)^5 - 1}{0,04} \Leftrightarrow \underline{\underline{A_n = 27.081,61\,kr.}}$$

Ø04 (Matematik B₁, 2002) Annuitet (Opsparing) p. 298

En funktionær har tilknyttet en pensionsordning til sin ansættelse. Hver måned indbetaler arbejdsgiveren 2.000 *kr*. på en pensionskonto. Der indbetales i 20 år hver måned, og kontoen forrentes med 0,5 % pr. måned.

Hvor meget har funktionæren opsparet efter sidste indbetaling?

20 år med 12 indbetalinger hvert år giver $n = 20 \cdot 12 = 240$ indbetalinger (terminer).

A_n	=	Fremtidsværdien af annuiteten		
y	=	Annuitetsydelsen	=	2.000,00 *kr*.
r	=	Rentefoden pr. termin	=	0,5 % pr. måned
n	=	Antal ydelser (terminer)	=	240

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 2.000,00 \cdot \frac{(1+0,005)^{240} - 1}{0,005} \Leftrightarrow \underline{\underline{A_n = 924.081,79 \text{ kr.}}}$$

E03 (Matematik B₁, 2002) p. 298

En lønmodtager har gennem en periode indbetalt 2.500,00 *kr*. på en konto hvert kvartal. Renten er 1,5 % pr. kvartal. Efter et antal indbetalinger er saldoen nået op på 64.593,95 *kr*. Antallet af indbetalinger, *n*, kan bestemmes på denne måde:

y	=	Annuitetsydelsen	=	2.500,00 *kr*.
A_n	=	Fremtidsværdien af annuiteten	=	64.593,95 *kr*.
r	=	Rentefoden pr. termin	=	1,5 % p.a. = 0,015
n	=	Antal ydelser (terminer)		

$$n = \frac{\ln\left(\frac{A_n \cdot r}{y} + 1\right)}{\ln(1+r)} = \frac{\ln\left(\frac{65.593,95 \cdot 0,015}{2.500} + 1\right)}{\ln(1+0,0075)} = \frac{\ln(1,3875637)}{\ln(1,015)} \Leftrightarrow \underline{\underline{n = 22 \text{ kvartaler}}}$$

Hvad med Excel ???

Funktionen, der skal bruges hedder: "**NPER**". Bemærk, at hele funktionen skal have modsat fortegn. Dette sker ved at sætte et minustegn foran funktionsudtrykket.

	A	B	C	E	F
3	**Betegnelse**	Excel, navn	**Værdi**		
4	Ydelse:	y Ydelse	2.500,00 kr.		
5	Nutidsværdi:	nv Nutidsværdi	64.593,95 kr.	=-NPER(C6;C4;C5)	
6	Rente:	r Rente	1,50%	NPER(rente; ydelse; nv; [fv]; [type])	
7					

	A	B	C	E	F
3	**Betegnelse**	Excel, navn	**Værdi**		
4	Ydelse:	y Ydelse	2.500,00 kr.		
5	Nutidsværdi:	nv Nutidsværdi	64.593,95 kr.	22,00	
6	Rente:	r Rente	1,50%		

Ø05 **(Matematik B_1, 2002)** **Annuitet** **(Opsparing - Terminer)** **p. 299**

En familie ønsker at opspare 100.000,00 *kr*. til køb af et sommerhus. Familien har råd til at indbetale 1.000,00 *kr*. hver måned på en opsparingskonto, hvor renten er 0,75 % pr. måned.

Beregn i hvor mange måneder opsparingen skal foregå.

A_n	=	Fremtidsværdien af annuiteten	=	100.000 *kr*.
y	=	Annuitetsydelsen	=	1.000 *kr*.
r	=	Rentefoden pr. termin	=	0,75 % pr. måned
n	=	Antal ydelser (terminer)		

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{A_n \cdot r}{y} + 1 = (1+r)^n$$

$$\Updownarrow$$

$$n \cdot \ln(1+r) = \ln\left(\frac{A_n \cdot r}{y} + 1\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{A_n \cdot r}{y} + 1\right)}{\ln(1+r)} = \frac{\ln\left(\frac{100.000 \cdot 0,0075}{1.000} + 1\right)}{\ln(1+0,0075)} = \frac{\ln(1,75)}{\ln(1,0075)} = 74,89 \Leftrightarrow \underline{\underline{n \approx 75 \text{ mdr.}}}$$

Ø06 **(Matematik B_1, 2002)** **Annuitet** **(Opsparing)** **p. 299**

Forældrene til et barn har hvert år i 20 år indsat 1.000,00 *kr*. på en børneopsparingskonto. Efter den 20. indbetaling udgør saldoen 64.202,82 *kr*.

Vis at renten er 11 % p.a.

A_n	=	Fremtidsværdien af annuiteten	=	64.202,82 *kr*.
y	=	Annuitetsydelsen	=	1.000 *kr*.
r	=	Rentefoden pr. termin	=	11 % p.a. (Påstås det...)
n	=	Antal ydelser (terminer)	=	20

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$\Updownarrow$$

$$64.202,82 \stackrel{?}{=} 1.000 \cdot \frac{(1+0,11)^{20} - 1}{0,11}$$

$$\Updownarrow$$

$$64.202,82 \stackrel{?}{=} 1.000 \cdot \frac{(1+0,11)^{20} - 1}{0,11}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{64.202,82 \stackrel{ok}{=} 64.202,82 \qquad Q.E.D}}$$

Eksempel 6.3.3: Beregn ydelsen

Kira vil modernisere sit køkken og har besluttet at opspare 10.000 kr. i løbet af de næste 2 år (8 kvartaler). Renten er 1 % per kvartal.

1. Hvad er Kiras kvartårlige ydelse?

10.000,00 *kr*. ønskes opsparet i løbet af 2 år (8 kvartaler). Renten (r) = 1 % pr. kvartal.

I opsparingsformlen isoleres ydelsen.

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$\Updownarrow$$

$$A_n \cdot r = y \cdot \left((1+r)^n - 1\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$y = \frac{A_n \cdot r}{(1+r)^n - 1}$$

$$y = \frac{10.000\ kr. \cdot 0,01}{(1+0,01)^8 - 1} = \frac{10.000\ kr. \cdot 0,01}{1,01^8 - 1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{y = 1.206,90\ kr.}}$$

Ø07 **(Matematik B$_1$, 2002)** **Annuitet (Opsparing)** **p. 299**

Hvor meget skal indsættes hvert år, hvis der efter 10 indbetalinger med renter og renters rente er opsparet 32.594,63 *kr*., og renten er 8 % p.a.?

A_n	=	Fremtidsværdien af annuiteten	=	32.594,63 *kr*.
y	=	Annuitetsydelsen.		
r	=	Rentefoden pr. termin	=	8 % p.a.
n	=	Antal ydelser (terminer)	=	10

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

⇕

$$y = A_n \cdot \frac{r}{(1+r)^n - 1} = 32.594,63 \cdot \frac{0,08}{(1+0,08)^{10} - 1}$$

⇕

$$\underline{\underline{y = 2250,00\ kr.}}$$

Hvad med Excel ???

Funktionen, der skal bruges til at beregne ydelsen hedder: ”**YDELSE**”. Bemærk, at hele funktionen skal have modsat fortegn. Dette sker ved at sætte et minustegn foran funktionsudtrykket.

	A	B	C	E	F
45	**Betegnelse**	**Excel, navn**	**Værdi**		
46	Opsparing:	A_n Fremtidsværdi	32.594,63 kr.		
47	Rente:	r Renten	8%	=-YDELSE(C47;C48;;C46)	
48	Antal terminer:	n Antal terminer	10	YDELSE(rente; nper; nv; **[fv]**; [type])	

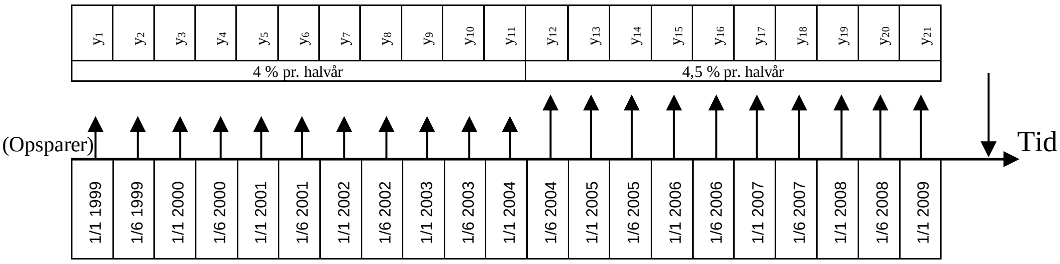
	A	B	C	E	F
45	**Betegnelse**	**Excel, navn**	**Værdi**		
46	Opsparing:	A_n Fremtidsværdi	32.594,63 kr.		
47	Rente:	r Renten	8%	2.249,99 kr.	
48	Antal terminer:	n Antal terminer	10		

Bemærk, at da der er tale om en opsparing, skal man springe det tredje argument over, da det er fremtidsværdien, der skal benyttes!

Ø08 **(Matematik B$_1$, 2002)** **Annuitet** **(Opsparing)** **p. 299**

Der indbetales en halvårlig ydelse på 5.000 *kr*., første gang den 1/1 1999 og sidste gang den 1/1 2009.
Renten er 4 % pr. halvår indtil 1/1 2004, hvorefter den ændres til 4,5 % pr. halvår.

a) Illustrér indbetalingerne på en tidsakse.



b) Hvor mange ydelser betales der indtil og med 1/1 2004, og hvor mange ydelser betales derefter?

Der betales (Se tidsaksen) 11 ydelser til og med 1/1 2004 og 10 ydelser derefter.

c) Hvor meget er der opsparet på kontoen efter sidste ydelse?

1) De første 11 ydelser:

A_n	=	Fremtidsværdien af annuiteten		
y	=	Annuitetsydelsen	=	5.000,00 *kr*.
r	=	Rentefoden pr. termin	=	4 % pr. halvår
n	=	Antal ydelser (terminer)	=	11

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 5.000,00 \cdot \frac{(1+0,04)^{11} - 1}{0,04} \Leftrightarrow \underline{\underline{A_n = 67.431,76\,kr.}}$$

Dette beløb fremskrives så 10 terminer:

K_0	=	Begyndelseskapitalen	=	67.431,76 *kr*.
r	=	Rentefoden	=	0,045 (= 4,5 %)
n	=	Antal terminer	=	10

$$K_{10} = 67.431,76 \cdot (1+0,045)^{10} = 67.431,76 \cdot 1,045^{10} \Leftrightarrow \underline{\underline{K_{10} = 104.719,45\,kr.}}$$

De sidste 10 terminer giver bidraget:

A_n	=	Fremtidsværdien af annuiteten		
y	=	Annuitetsydelsen	=	5.000,00 *kr*.
r	=	Rentefoden pr. termin	=	4,5 % pr. halvår
n	=	Antal ydelser (terminer)	=	10

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 5.000,00 \cdot \frac{(1+0,045)^{10} - 1}{0,045} \Leftrightarrow \underline{\underline{A_n = 61.441,05\,kr.}}$$

Sammenlagt giver de to resultater:

$$A_{n_{Total}} = 104.719,45\,kr. + 61.441,05\,kr. \Leftrightarrow \underline{\underline{A_{n_{Total}} = 166.160,51\,kr.}}$$

Ø09 (Matematik B_1, 2002) **Annuitet (Opsparing)** **p. 299**

Redegør mundtlige for udledningen af opsparingsformlen.

Ø10 (Matematik B_1, 2002) **Annuitet (Opsparing)** **p. 299**

TJEN 30.000 KR. EKSTRA PÅ BØRNEOPSPARINGEN (as of 2002).

Fakta om børneopsparing
Du kan hvert år sætte op til 3.000,00 kr. ind på kontoen – i 1998 og 1999 var det dog ekstraordinært 9.000,00 kr. (Det kan man muligvis også i år 2000) I alt kan der maksimalt sættes 36.000,00 kr. ind i hele opsparingsperioden, og hertil kommer så renter, der tilskrives i hele opsparingsperioden. Børneopsparingen skal være bundet i mindst syv år, og kan tidligst hæves når barnet fylder 14, og senest når barnet fylder 21. Hvert barn må kun have én børneopsparingskonto. Renter og renteudbytte på en børneopsparingskonto er skattefrit.

Sådan er renten
Udvalgte eksempler pr. 23/11 1999:

Andelskassen Midtthy	5,50 %
Løkken Sparekasse	5,50 %
Morsø Bank	5,00 %
Thyholm Sparekasse	4,50 %
Jyske Bank	3,25 %
BG Bank	2,75 %

Så meget betyder forskellen
Hvis man skyder 9.000,00 kr. ind de første to år (fra barnets første leveår) og derefter 3.000,00 kr. de næste seks år, til man har nået de maksimale 36.000,00 kr. og derefter lader pengene stå til barnet er 21 år så får man så meget ud af det:

Ved 3,00 % i rente $A_n = 60.533,79\,kr.$

Ved 3,50 % i rente $A_n = 65.943,06\,kr.$

Ved 4,00 % i rente $A_n = 71.814,95\,kr.$

Ved 5,50 % i rente $A_n = 92.598,26\,kr.$

Kontrollér disse resultater:

r = 3,00 %

$$A_n = 9.000,00 \cdot \frac{1,030^2 - 1}{0,030} \cdot 1,030^{19} + 3.000,00 \cdot \frac{1,030^6 - 1}{0,030} \cdot 1,030^{13} \Leftrightarrow \underline{\underline{A_n = 60.533,79\,kr.}}$$

r = 3,50 %

$$A_n = 9.000,00 \cdot \frac{1,035^2 - 1}{0,035} \cdot 1,035^{19} + 3.000,00 \cdot \frac{1,035^6 - 1}{0,035} \cdot 1,035^{13} \Leftrightarrow \underline{\underline{A_n = 65.943,06\,kr.}}$$

r = 4,00 %

$$A_n = 9.000,00 \cdot \frac{1,040^2 - 1}{0,040} \cdot 1,040^{19} + 3.000,00 \cdot \frac{1,040^6 - 1}{0,040} \cdot 1,040^{13} \Leftrightarrow \underline{\underline{A_n = 71.814,95\,kr.}}$$

r = 5,50 %

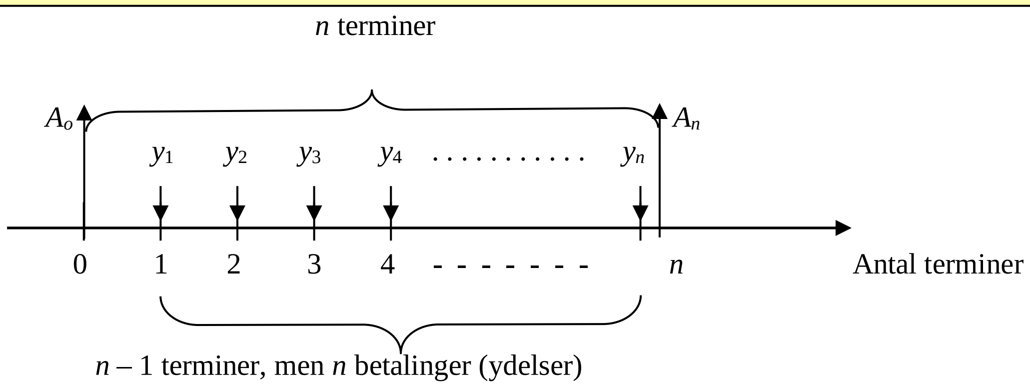
$$A_n = 9.000,00 \cdot \frac{1,055^2 - 1}{0,055} \cdot 1,055^{19} + 3.000,00 \cdot \frac{1,055^6 - 1}{0,055} \cdot 1,055^{13} \Leftrightarrow \underline{\underline{A_n = 92.598,26\text{ kr.}}}$$

Kapitel 6.3 – Nutidsværdi af en annuitet

Nutidsværdi af en annuitet (Lån- og gældsformlen)

Nutidsværdien af en annuitet kan beregnes ved hjælp af denne formel, som også kaldes for **Gældsformlen**: $\boxed{A_0 = y \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}}$, hvor:

A_0	=	Nutidsværdien af annuiteten (Lånets hovedstol)
y	=	Annuitetsydelsen
r	=	Rentefoden pr. termin
n	=	Antal ydelser (terminer)



Bevis:

Betragter man den ovenstående tidslinje, ser man, at der til tiden 0 sættes en startkapital, A_0, og der til hver termin indsættes et beløb – en ydelse – y, så ender man med en nutidsværdi,. Tænker man imidlertid på A_n som et beløb og bruger tilbageskrivningsformlen, $K_0 = K_n(1+r)^{-n}$, så er fremtidsværdien A_n svarende til K_n i tilbageskrivningsformlen, og nutidsværdien A_0 svarende til K_0. Dette giver:

$$A_0 = A_n \cdot (1+r)^{-n}$$

$\Updownarrow$ Når man skal bevise A_0, er det ok at indsætte formlen for A_0

$$A_0 = y\frac{(1+r)^n - 1}{r} \cdot (1+r)^{-n}$$

$\Updownarrow$ $\frac{a-b}{c} \cdot d = \frac{(a-b)\cdot d}{c} = \frac{a\cdot d - b\cdot d}{c}$

$$A_0 = y \cdot \frac{\left((1+r)^n - 1\right)(1+r)^{-n}}{r} \Leftrightarrow A_0 = y \cdot \frac{(1+r)^n \cdot (1+r)^{-n} - 1 \cdot (1+r)^{-n}}{r}$$

$\Updownarrow$ $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

$$A_0 = y \cdot \frac{(1+r)^{n-n} - (1+r)^{-n}}{r}$$

$\Updownarrow$ $x^0 = 1$

$$\underline{\underline{A_0 = y \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}}}$$

Eksempel 6.3.2: Beregn lån og gæld

Et mobilselskab har et tilbud på en smartphone.
Udbetaling 999,00 *kr*. Desuden 199,00 *kr*. pr. måned.

Renten er 1 % pr. måned – løbetid 24 måneder. (Dvs. at der er tale om et lån).

a) Hvad skal der lånes til telefonen?

Da det kun vides, at der indbetales 199,00 *kr*. om måneden i 24 måneder, er det stadig uklart, hvad lånebeløbet i virkeligheden er.

Betragtes opsparingsformlen (”annuitet”) som en parallel til fremskrivningsformlen (”et beløb”) og lån- og gældsformlen (”annuitet”) som en parallel til tilbageskrivningsformlen (”et beløb”), er det således muligt at finde ud af, hvor meget man ”begyndte med” – altså hvor meget der skal lånes til at begynde med ved at benytte lån- og gældsformlen.

$$A_0 = y \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

$$\Updownarrow$$

$$A_0 = 199{,}00\ kr. \cdot \frac{1-(1+0{,}01)^{-24}}{0{,}01} = 199{,}00\ kr. \cdot \frac{1-1{,}01^{-24}}{0{,}01}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{A_0 = 4.227{,}43\ kr.}}$$

$\big($Hertil skal lægges de 999,00 *kr*. i udbetaling, som i princippet er irrelevant for lånet$\big)$.

Dvs. at lånebeløbet er 4.227,43 *kr*. Når dette beløb skal betales tilbage, løber der renter på: 1 % pr. måned.

b) Hvad skal der reelt betales for telefonen?

$$Totalpris = 24\ terminer\ á\ 199{,}00\ kr.\ pr.\ termin \qquad (+999{,}00\ kr.\ \text{i udbetaling})$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{Totalpris = 4776{,}00\ kr.}} \qquad (+999{,}00\ kr.\ \text{i udbetaling})$$

Dvs. forskellen mellem totalpris (hvis der ses bort fra udbetalingen) og lånebeløbet er renten.

$$Renten(r) = 4776{,}00\ kr. - 4.227{,}43\ kr. \Leftrightarrow \underline{\underline{Renten(r) = 548{,}57\ kr.}}$$

Da renten kan defineres som ”prisen for penge”, er det tilstrækkeligt at sige at renten er lig med 548,57 *kr*.
Lægger man udregningen ind i en amortisationstabel, kan beløbes udregnes i detaljer.

Det bemærkes, at de 999,00 *kr*. (udbetalingen) er ligegyldige for regnestykket, da de betales kontant ved købet af telefonen. Man kan betragte det som om at telefonens pris derved sænkes med 999,00 *kr*. og at hele det justerede beløb for telefonen skal betales med et lån.

E1 (Matematik B₁, 2002) p. 296

En familie overvejer at købe en bil. De har råd til at betale 18.000,00 *kr*. pr. halvår i 10 år.
Spørgsmålet er, hvor dyr bilen må være.
Renten er 3 % pr. halvår.
Problemstillingen kan illustreres på følgende tidsakse:

SCAN ILLUSTRATION PÅ P. 300

Med symboler fås:

$y = 500,00\,kr.,\quad r = 0,5\ \%\ \text{p.a.}\ (=0,005)\quad \text{og}\quad n = 36$ (3 år pr. måned)

Nu bestemmes nutidsværdien A_0 af annuiteten (1 termin før første ydelse). Denne værdi kan man bestemme ved først at betragte A_{20} (fremtidsværdien til $n = 20$) og derefter tilbageskrive denne værdi til tidspunkt 0.

Dette giver:

$$A_{20} = 18.000,00\,kr. \cdot \frac{1,03^{20} - 1}{0,03} = 483.666,74\,kr.$$

$$A_0 = A_{20} \cdot 1,03^{-20} = 483.666,74\,kr. \cdot 1,03^{-20} \Leftrightarrow \underline{\underline{A_0 = 267.794,55\,kr.}}$$

Dvs. familien kan købe en bil, som koster op til 267.794,55 *kr*.

E2 (Matematik B₁, 2002) p. 296

Ved direkte anvendelse af nutidsværdiformlen får i eksempel 1 (E1):

$$A_0 = y \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}$$

$$\Updownarrow$$

$$A_0 = 18.000,00\ kr. \cdot \frac{1 - (1 + 0,03)^{-20}}{0,03} = 18.000,00\ kr. \cdot \frac{1 - (1,03)^{-20}}{0,03}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{A_{36} = 267.794,55\ kr.}}$$

Øvelse 6.3.2: Billån

Morten vil gerne købe en større bil og har fundet ud af, at han kan betale en ydelse på 1.500 om måneden. Renten er 0,5 % per måned, og lånet skal tilbagebetales over 6 år.

1. **Hvor stort et beløb kan Morten låne?**

$y = 1.500{,}00\,kr.,\ r = 0{,}5$ % pr. kvartal $(=0{,}005)$ og $\quad n = 72$

$$A_0 = y \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

$\Updownarrow$

$$A_0 = 1.500{,}00\ kr. \cdot \frac{1-(1+0{,}005)^{-72}}{0{,}005} = 1.500{,}00\ kr. \cdot \frac{1-1{,}005^{-72}}{0{,}005}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{A_0 = 90.509{,}27\ kr.}}$$

Øvelse 6.3.3 - Annuitetsberegning

Et lån tilbagebetales med 2.000 *kr*. hvert kvartal over 10 år. Renten er 7 % p.a.

a) **Hvor stort er lånet?.**

$y = 2.000{,}00\,kr.,\ r = 7$ % p.a. $\left(= \frac{7\ \%}{4} = 0{,}0175 \text{ pr. kvartal}\right)$ og $n = 40$ (10 år pr. kvartal)

$$A_0 = y \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

$\Updownarrow$

$$A_0 = 2.000{,}00\ kr. \cdot \frac{1-(1+0{,}0175)^{-40}}{0{,}0175} = 2.000{,}00\ kr. \cdot \frac{1-1{,}0175^{-40}}{0{,}0175}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{A_0 = 57.188{,}46\ kr.}}$$

Der indsættes i løbet af 3 år - med én måneds mellemrum - 500 kr. på en konto, som forrentes med 0,5 % per måned.

b) Hvor meget vil være opsparet lige efter sidste ydelse?

$y = 500{,}00\,kr.,\ r = 0{,}5$ % p.a. $(=0{,}005)$ og $n = 36$ (3 år pr. måned)

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$\Updownarrow$

$$A_{36} = 500{,}00\ kr. \cdot \frac{(1+0{,}005)^{36}-1}{0{,}005} = 500{,}00\ kr. \cdot \frac{1{,}005^{36}-1}{0{,}005}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{A_{36} = 19.668{,}05\ kr.}}$$

Hvad med Excel ???

Funktionen, der skal bruges til at beregne ydelsen hedder: ”**YDELSE**”. Bemærk, at hele funktionen skal have modsat fortegn. Dette sker ved at sætte et minustegn foran funktionsudtrykket.

	A	B	C	D	E	F
64	**Betegnelse**	**Excel, navn**	**Værdi**			
65	Hovedstol:	A_0 Nutidsværdi	4.000,00 kr.			
66	Rente:	r Renten	7%		=-YDELSE(C66;C67;C65)	
67	Antal terminer:	n Antal terminer	6		YDELSE(rente; nper; **nv**; [fv]; [type])	

	A	B	C	D	E	F
64	**Betegnelse**	**Excel, navn**	**Værdi**			
65	Hovedstol:	A_0 Nutidsværdi	4.000,00 kr.			
66	Rente:	r Renten	7%		839,18 kr.	
67	Antal terminer:	n Antal terminer	6			

Bemærk, at da der her er tale om afvikling af et lån, så skal man bruge det tredje argument her (i modsætning til det fjerde argument, når der var tale om en opsparing), **da det er nutidsværdien, som skal benyttes.**

Øvelse 6.3.4: Beregn ydelsen

$A_0 = 50.000,00\ kr.,\ r = 0,02$ og $n = 20$ (10 halvårlige terminer)

Et lån på 50.000 kr til en rente på 2 % per halvår skal tilbagebetales over 10 år med 20 lige store halvårlige ydelser.

a) Svarer de 50.000 kr. til A_n eller A_0 ?

A_0 . Det er lånebeløbet.

b) Hvor stor er den halvårlige ydelse på dette lån?

$$y = \frac{A_n \cdot r}{1-(1+r)^{-n}}$$

$$y = \frac{50.000\ kr. \cdot 0,02}{1-(1+0,02)^{-20}} = \frac{50.000\ kr. \cdot 0,02}{1-1,02^{-20}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{y = 3.057,84\ kr.}}$$

$A_0 = 100.000,00\ kr.,\quad r = 0,06$ p.a. $= 0,03$ pr. halvår og $n = 10$ halvårlige terminer

c) Hvor stor er ydelsen på lånet, når der tilskrives renter halvårligt?

$$y = \frac{A_n \cdot r}{1-(1+r)^{-n}}$$

$$y = \frac{100.000\ kr. \cdot 0,03}{1-(1+0,03)^{-10}} = \frac{100.000\ kr. \cdot 0,03}{1-1,03^{-10}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{y = 11.723,05\ kr.}}$$

$A_0 = 100.000,00\ kr.,\quad r = \frac{0,06}{12} = 0,005$ og $n = 60$ månedlige terminer

d) d) Hvor stor er ydelsen på lånet, når der tilskrives renter månedligt?

$$y = \frac{A_n \cdot r}{1-(1+r)^{-n}}$$

$$y = \frac{100.000\ kr. \cdot 0,005}{1-(1+0,005)^{-60}} = \frac{100.000\ kr. \cdot 0,005}{1-1,005^{-60}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{y = 1.933,28\ kr.}}$$

Eksempel 6.3.4: Beregn antal terminer annuitet

Peter har i dag lånt 20.000 kr. til en Scooter 45 med udstyr.

Han skal betale 500 kr. om måneden, og renten er 0,75 % per måned. Peter regner med, at lånet nok er betalt om et par år.

1. Hvor lang tid skal Peter betale af på lånet?

Lånebeløb 20.000,00 *kr*. *y* = 500,00 *kr*. og *r* = 0,75 % pr. måned

$$n = -\frac{\ln\left(1-\frac{A_0 \cdot r}{y}\right)}{\ln(1+r)}$$

⇕

$$n = -\frac{\ln\left(1-\frac{20.000\ kr. \cdot 0{,}0075}{500{,}00\ kr}\right)}{\ln(1+0{,}0075)} = -\frac{\ln(1-40\cdot 0{,}0075)}{\ln(1{,}0075)} = -\frac{\ln(1-0{,}3)}{\ln(1{,}0075)} = -\frac{\ln(0{,}7)}{\ln(1{,}0075)}$$

⇕

$$\underline{\underline{n = 47{,}73\ terminer \approx 48\ terminer}}$$

Øvelse 6.3.5 – Beregn antal terminer annuitet

Thomas ønsker sig en ny cykel, som koster 6.995,00 kr. Han låner pengene i banken og må afbetale lånet med 300 kr. hver måned. Den årlige rente er på 3 %.

1. **Gæt hvor lang tid, der går, før Thomas har afbetalt lånet.**
   a. 18 måneder
   b. 24 måneder
   c. 36 måneder

   Der gættes på 3) 36 måneder.

2. **Forklar, hvorfor du mener, at dit gæt er rigtigt.**
   Divideres 6995 med 300 giver det 23,32. Men så er der jo ikke taget højde for renter og renters rente. Så det må tage længere tid – og endda længere tid end én måned. (Knap og nap, endda).
   Derfor er det bedste bud 3) 36 måneder.

3. **Beregn ved hjælp af formler, hvor lang tid går der, før Thomas har afbetalt lånet.**

$$n = -\frac{\ln\left(1-\frac{A_0 \cdot r}{y}\right)}{\ln(1+r)}$$

⇕

$$n = -\frac{\ln\left(1-\frac{6.995{,}00\ kr. \cdot 0{,}03}{300{,}00\ kr}\right)}{\ln(1+0{,}03)} = -\frac{\ln\left(1-\frac{209{,}85}{300}\right)}{\ln(1{,}03)} = -\frac{\ln(0{,}3005)}{\ln(1{,}03)}$$

⇕

$$\underline{\underline{n = 40{,}68\ terminer \approx 41 terminer}}$$

Øvelse 6.3.6: Beregn opsparing/lån

Hvis renten er 6 % p.a, hvor meget kan man spare op på 20 år, hvis ydelsen er 1.000 kr.

1. **helårligt?**
2. **halvårligt?**
3. **kvartårligt?**

Ad 1)

$y = 1.000,00\,kr.,\ r = 6$ % p.a. $(= 0,06)$ og $n = 20$

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$\Updownarrow$

$$A_{20} = 1.000,00\ kr \cdot \frac{(1+0,06)^{20} - 1}{0,06} = 1.000,00\ kr \cdot \frac{1,06^{20} - 1}{0,06}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{A_{20} = 36.785,59\ kr.}}$$

Ad 2)

$y = 1.000,00\,kr.,\ r = 6$ % p.a. $(= 0,06)$ og $n = 40$

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$\Updownarrow$

$$A_{40} = 1.000,00\ kr \cdot \frac{(1+0,06)^{40} - 1}{0,06} = 1.000,00\ kr \cdot \frac{1,06^{40} - 1}{0,06}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{A_{40} = 154.761,97\ kr.}}$$

Ad 3)

$y = 1.000,00\,kr.,\ r = 6$ % p.a. $(= 0,06)$ og $n = 80$

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$\Updownarrow$

$$A_{80} = 1.000,00\ kr \cdot \frac{(1+0,06)^{40} - 1}{0,06} = 1.000,00\ kr \cdot \frac{1,06^{80} - 1}{0,06}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{A_{40} = 1.746.599,89\ kr.}}$$

I denne øvelse er renten 6 % p.a. Ydelsen er 1.000 kr. per termin og løbetiden er 5 år. Hvor stort er lånet med rentetilskrivning

1. helårligt?
2. halvårligt?
3. kvartårligt?

Ad 1)

$y = 1.000,00\,kr.$, $r = 6$ % p.a. $(= 0,06)$ og 5 år (5 terminer)

$$A_0 = y \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

$\Updownarrow$

$$A_0 = 1.000,00 \cdot \frac{1-(1+0,06)^{-5}}{0,06} = 1.000,00 \cdot \frac{1-(1,06)^{-5}}{0,06} = 1.000,00 \cdot \frac{1-0,7473}{0,06}$$

$\Updownarrow$

$$A_0 = 1.000,00 \cdot 4,2124$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{A_0 = 4.212,36\,kr.}}$$

Ad 2)

$y = 1.000,00\,kr.$, $r = 6$ % p.a. $(= 0,06)$ og 5 år (10 terminer)

$$A_0 = y \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

$\Updownarrow$

$$A_0 = 1.000,00 \cdot \frac{1-(1+0,06)^{-10}}{0,06} = 1.000,00 \cdot \frac{1-(1,06)^{-10}}{0,06} = 1.000,00 \cdot \frac{1-0,5584}{0,06}$$

$\Updownarrow$

$$A_0 = 1.000,00 \cdot \frac{0,4416}{0,06} = 1.000,00 \cdot 7,3601$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{A_0 = 7.360,10\,kr.}}$$

Ad 3)
$y = 1.000,00\,kr.$, $r = 6$ % p.a. $(=0,06)$ og 5 år (20 terminer)

$$A_0 = y \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

$\Updownarrow$

$$A_0 = 1.000,00 \cdot \frac{1-(1+0,06)^{-20}}{0,06} = 1.000,00 \cdot \frac{1-(1,06)^{-20}}{0,06} = 1.000,00 \cdot \frac{1-0,3118}{0,06}$$

$\Updownarrow$

$$A_0 = 1.000,00 \cdot \frac{0,6882}{0,06} = 1.000,00 \cdot 11,4692$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{A_0 = 11.469,92\,kr.}}$$

Øvelse 6.3.7 – Kørekort

Et forældrepar har lovet at hjælpe med betalingen af et kørekort, når sønnen fylder 18 år.
Forældre giver sønnen 3 muligheder:

1. De indsætter på sønnens 14 års fødselsdag 12.000,00 *kr*. på en opsparingskonto. Renten er 3,5% p.a.
2. De indsætter hver måned 300,00 kr. i 4 år til en månedlig rente på 0,25 %.
3. Sønnen får 14.000,00 *kr*. den dag han fylder 18 år.

1. Hvilken af de 3 muligheder bør sønnen vælge - og hvorfor?

Den første mulighed er en almindelig fremskrivning af et beløb.

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$

$\Updownarrow$

$$K_n = 12.000,00 \cdot (1+0,035)^4 = 12.000,00 \cdot (1,035)^4 = 12.000,00 \cdot 1,1475$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{K_n = 13.770,28\,kr.}}$$

Den anden mulighed er en opsparingsannuitet.

$$A_n = 300,00 \cdot \frac{(1+0,0025)^{48}-1}{0,0025} = 300,00 \cdot \frac{(1,0025)^{48}-1}{0,0025} = 300,00 \cdot \frac{1,1273-1}{0,0025}$$

$\Updownarrow$

$$A_n = 300,00 \cdot \frac{0,1273}{0,0025} = 300,00 \cdot 50,92$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{A_n = 15.276,00\,kr.}}$$

Den tredje mulighed er blot et udbetalt beløb på 18-års dagen.

$$\underline{\underline{KontantGave = 14.000,00\,kr.}}$$

Det konkluderes, at alternativ to (annuitetsopsparingen) giver sønnen den bedste gave.

Ø01 (Matematik B1, 2002) Annuitet (Lån og gæld) p. 302

Et lån skal betales med 30 lige store halvårlige ydelser på 3.125,00 kr., hvoraf den første ydelse betales et halvt år efter lånets optagelse. Renten er 3 % pr. halvår.

Hvor stort et lån kan optages?

A_0	=	Nutidsværdien af annuiteten		
y	=	Annuitetsydelsen	=	3.125 *kr.*
r	=	Rentefoden pr. termin	=	3 % pr. halvår
n	=	Antal ydelser (terminer)	=	30

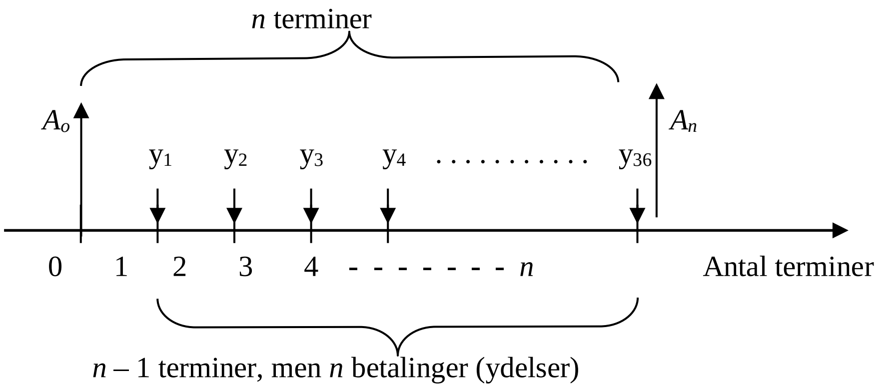
$$A_0 = y \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} = 3.125,00 \cdot \frac{1-(1+0,03)^{-30}}{0,03} \Leftrightarrow \underline{\underline{A_0 = 61.251,38\,kr.}}$$

Ø02 (Matematik B1, 2002) Annuitet (Lån og gæld) p. 302

En personbil købes på disse betingelser:

På købstidspunktet udbetales 40.000,00 *kr*. og hver af de følgende 36 måneder betales 3.487,50 *kr*.

a) Illustrér beløbene på en tidsakse.



b) Hvor meget koster bilen kontant, når renten er 0,75 % pr. måned?

A_0	=	Nutidsværdien af annuiteten		
y	=	Annuitetsydelsen	=	3.487,50 kr.
r	=	Rentefoden pr. termin	=	0,75 % pr. måned
n	=	Antal ydelser (terminer)	=	36

$$A_0 = y \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} = 3.487,50 \cdot \frac{1-(1+0,0075)^{-36}}{0,0075} \Leftrightarrow \underline{\underline{A_0 = 109.670,73\,\text{kr.}}}$$

Og dertil udbetalingen på 40.000,00:

$$Bilens\ pris = Kontantpris + Udbetaling = 109.670{,}73\,kr. + 40.000{,}00\,kr.$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{Bilens\ pris = 149.670{,}73\,kr.}}$$

Ø03 (Matematik B1, 2002) **Annuitet (Lån og gæld)** **p. 302**

Nedenfor ses en annonce fra en bank på et billån.

Eksempel på billån med variabel rente

Bilens pris	Månedlig ydelse over 5 år ved udbetaling på		
	20%	**30%**	**40%**
100.000 kr.	1.640 kr.	1.400 kr.	1.160 kr.
150.000 kr.	2.460 kr.	2.100 kr.	1.740 kr.
200.000 kr.	3.280 kr.	2.800 kr.	2.320 kr.

Eksempel på billån med fast rente

Bilens pris	Månedlig ydelse over 5 år ved udbetaling på		
	20%	**30%**	**40%**
100.000 kr.	1.670 kr.	1.425 kr.	1.180 kr.
150.000 kr.	2.500 kr.	2.140 kr.	1.770 kr.
200.000 kr.	3.335 kr.	2.850 kr.	2.360 kr.

Det ses af annoncen, at løbetiden er 5 år med månedlige ydelser.

a) Vis, at den effektive rente ved et billån med variabel rente med 20% udbetaling er 0,7055 % pr. måned.

$$y = \frac{A_0 \cdot r}{1-(1+r)^{-n}}$$

$$\Updownarrow$$

$$1.640 \stackrel{?}{=} \frac{80.000 \cdot 0,007055}{1-(1+0,007055)^{-60}}$$

$$\Updownarrow$$

$$1.640 \stackrel{?}{=} \frac{564,40}{1-1,007055^{-60}}$$

$$\Updownarrow$$

$$1.640 \stackrel{?}{=} \frac{564,40}{1-0,655856}$$

$$\Updownarrow$$

$$1.640 \stackrel{?}{=} \frac{564,40}{0,3441438}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{1.640 \stackrel{ok}{=} 1.640}}$$

$$A_0 = Pris - Pris \cdot 20\,\% = 100.000\,kr. - 100.000\,kr. \cdot 0,2$$

$$\Updownarrow$$

$$A_0 = 100.000\,kr. - 20.000\,kr.$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{A_0 = 80.000\,kr.}$$

Der tages udgangspunkt i ”Lån- og gældsformlen”.
Da man i opgaven skal vise, at renten er 0,7055 % pr. måned, må det være tilstrækkeligt at vise, at regnestykket går op, når alle de kendte værdier indsættes.
Lånet betragtes som én størrelse med 60 terminer. Det er ikke vigtigt over hvor lang tid, disse terminer strækker sig. Derfor er n = 60 og ikke 12.
Ydelsen er givet i opgaven til 1.640 *kr*. og hovedstolen er 100.000 *kr*. minus 20 % – altså 80.000 *kr*., som beregnet ovenfor.

Den tilsvarende rente ved et billån med fast rente er 0,7700 % pr. måned.

b) Forklar denne forskel i rente.

Det ses i tabellerne, at ydelsen for et tilsvarende billån med fast rente er 30 *kr*. større. Antallet af terminer og hovedstolen er det samme, så når man indbetaler marginalt mere pr. måned, er det eneste sted der kan justeres, renten. Da der indbetales mere, må det blive billigere i rente.

c) Hvad er risikoen ved at vælge et billån med variabel rente?

??????????????

En familie har 40 % i udbetaling til en ny bil og vælger et lån med fast rente. De kan betale 2.360 *kr*. pr måned i 5 år.

d) Hvor dyr en bil kan familien købe?

Familien kan købe en bil med pris op til 200.000 $\underline{\underline{kr}}$.

Ø04 (Matematik B1, 2002) Annuitet (Lån og gæld – omregninger) p. 303

En pensionist har den 1. januar 1999 opsparet 1.000.000 *kr*. på en pensionskonto, hvor renten er 7 % p.a. Opsparingen udbetales i form af et fast årligt beløb på 150.000 *kr*.; første gang den 1. januar 2000.

a) Hvor mange gange kan den fulde pensionsydelse udbetales?

$$n=\frac{\ln\left(\frac{A_n\cdot r}{y}+1\right)}{\ln(1+r)}=\frac{\ln\left(\frac{1.000.000\cdot 0{,}07}{150.000}+1\right)}{\ln(1+0{,}07)}=\frac{\ln\left(\frac{70.000}{150.000}+1\right)}{\ln(1{,}07)}=\frac{\ln\left(\frac{7}{15}+1\right)}{\ln(1{,}07)}=\frac{\ln\left(\frac{22}{15}\right)}{\ln(1{,}07)}$$

⇕

$$\underline{n=5{,}66}$$

Dvs., at den fulde pensionsydelse kan udbetales 5 gange.

b) Beregn ydelsen, hvis pensionisten ønsker beløbet udbetalt halvårligt, når der regnes med udbetalingsperioden fra spørgsmål a).

$$A_n=y\cdot\frac{(1+r)^n-1}{r}$$

⇕

$$A_n\cdot r=y\cdot\left((1+r)^n-1\right)$$

⇕

$$y=\frac{A_n\cdot r}{(1+r)^n-1}$$

$$y=\frac{1.000.000\ kr.\cdot\left(\frac{0{,}07}{2}\right)}{\left(1+\left(\frac{0{,}07}{2}\right)\right)^5-1}=\frac{1.000.000\ kr.\cdot 0{,}035}{1{,}035^5-1}$$

⇕

$$\underline{\underline{y=1.206{,}90\ kr.}}$$

Ø05 (Matematik B1, 2002) Annuitet (Lån og gæld – omregninger) p. 303

En virksomhed investerer 1.500.000,00 *kr*. i en maskinem som de forventer vil give et overskud på 250.000,000 *kr*. hvert år de næste 10 år. Maskinen er da nedslidt og kan ikke sælges.

a) Vis ved indsættelse i nutidsværdiformlen, at den effektive rente i investeringen er 10,56 %.

b) Hvad skal overskuddet være, hvis virksomheden kræver 15 % i effektiv rente?

I de næste øvelser, skal man kombinere forskellige formler. Husk at illustrere problemstillingen på en tidsakse – det gør opgaven lettere at overskue.

Ø06 (Matematik B1, 2002) Annuitet (Lån og gæld – omregninger) p. 303

En familie regner med at skulle bruge 180.000,00 *kr*. til pension i hvert af årene 2005 til 2024 (dvs. i 20 år) og opretter i den anledning en pensionskonto, hvor renten er 5,5 % p.a. Familien overvejer 2 forskellige opsparingsformer:

I): Indbetaling af et stort engangsbeløb i år 1998.
II): Indbetaling af et årligt beløb i årene 1998 til 2004.

a) Beregn størrelsen af engangsbeløbet i år 1998 i opsparing I).

b) Beregn det årlige beløbi opsparing II).

Ø07 (Matematik B1, 2002) Annuitet (Lån og gæld – omregninger) p. 303

Sørensen ønsker at optage et lån i sit hus. Han kan betale 2.500,00 *kr*. hvert halve år i de første 3 år og 3.000,00 *kr*. hvert halve år i de næste 3 år. Første ydelse betales et halvt år efter lånets optagelse, og renten er 2,5 % pr. halvår.

a) Beregn størrelsen af lånet.

Ø08 (Matematik B1, 2002) Annuitet (Lån og gæld – omregninger) p. 303

Der ønskes en mudtlig redegørelse for udledning af gældsformlen.

Ø09 (Matematik B1, 2002) Annuitet (Lån og gæld – omregninger) p. 303

Scan tabel på side 303.

a) Bestem den effektive rente pr. måned for alle kombinationer af udbetalte beløb og løbetid.

Beregning af renten i en annuitet:

Som allerede nævnt, er det ikke praktisk muligt at beregne renten i en annuitet. Det er renten, som er problemet, idet renten optræder to gange i formlen for hhv. opsparings- og lån-og-gældsformlen – og så endda i to forskellige ”tilstande”.

Man kan anvende bogens værktøj (og det virker fint og giver det rigtige resultat), men det er aldrig snedigt at vænne sig til at benytte et redskab, som man ikke har adgang til senere … Og da det er en del af en skolebog, vil den ikke være tilgængelig efter gymnasietiden …

Til gengæld er Excel en af universets faste konstanter, så her vises, hvordan man udregner renten i en annuitet vha. Excel. Bemærk, at der er forskel på, om der er tale om en opsparingsannuitet eller en lån- og gældsannuitet.

Hvad med Excel ???

Funktionen, der skal bruges, når der er tale om en **Opsparingsformlen** hedder: ”**RENTE**”.
Bemærk, at det tredje argument er udeladt (ved at indtaste to semikoloner i træk), og det fjerde brugt i stedet. Det er fordi det er **fremtidsværdien** (målet for opsparingen), som skal indtastes i stedet for lånebeløbet. Det femte og sjette argument er ”altid” udeladt.

	A	B	C	E	F
52	**Betegnelse**	**Excel, navn**	**Værdi**		
53	Fremtidsværdi:	fv Fremtidsværdi	120.000,00 kr.		
54	Ydelse:	y Ydelse	- 8.000,00 kr.	=RENTE(C55;C54;;C53)	
55	Antal terminer:	n Antal terminer	12	RENTE(nper; ydelse; nv; **[fv]**; [type]; [gæt])	

	A	B	C	E	F
52	**Betegnelse**	**Excel, navn**	**Værdi**		
53	Fremtidsværdi:	fv Fremtidsværdi	120.000,00 kr.		
54	Ydelse:	y Ydelse	- 8.000,00 kr.	3,9700%	
55	Antal terminer:	n Antal terminer	12		

Hvad med Excel ???

Funktionen, der skal bruges, når der er tale om en **Lån- og gældsformlen** hedder **også**: ”**RENTE**”.
Men bemærk, at her bruges det tredje argument, da det er **nutidsværdien** (lånebeløbet), som skal indtastes.
Således er de tre sidste argumenter udeladt.

	A	B	C	E	F
57	**Betegnelse**	**Excel, navn**	**Værdi**		
58	Nutidsværdi:	nv Nutidsværdi	10.000,00 kr.		
59	Ydelse:	y Ydelse	200,00 kr.	=RENTE(C60;-C59;C58)	
60	Antal terminer:	n Antal terminer	60	RENTE(nper; ydelse; **nv**; [fv]; [type]; [gæt])	

	A	B	C	E	F
57	**Betegnelse**	**Excel, navn**	**Værdi**		
58	Nutidsværdi:	nv Nutidsværdi	10.000,00 kr.		
59	Ydelse:	y Ydelse	200,00 kr.	0,6183%	
60	Antal terminer:	n Antal terminer	60		

6.4 Amortisationsplan

Amortisationsplaner kan – ligesom annuiteterne afbilde enten en opsparing eller afvikling af et lån.
Typisk vil opgaverne omhandle netop afvikling af et lån, men der er ingen garantier for, at der ikke kan komme en opgave, som omhandler en opsparing.

Det er vigtigt at forstå, at når man køber noget på afbetaling, så skal man jo ved hver termin betale en sum (ydelsen), som i sidste ende gør at man har betalt hele sit lån tilbage – inklusive renter.

Det foregår typisk således: Ved begyndelsen af hver termin, løber der renter på (rest)gælden. Det betyder, at allerede inden man har betalt noget som helst, så skylder man flere penge, end man gjorde til at begynde med. Så når man foretager sin indbetaling, så vil den første portion af ydelsen gå til at betale den mængde af renter, som netop er blevet tilføjet til gælden. Resten af ydelsen går så til at formindske gælden. Denne del af ydelsen kaldes for afdraget.

Eftersom der – trods alt – bliver skåret lidt af selve lånet, vil gælden til næste termin være lidt mindre end gælden i sidste termin. Derfor vil den rente, som bliver tilskrevet gælden også være en lille smule mindre. Da ydelsen altid er den samme, vil afdraget derfor blive en lille smule større, hvorved restgælden formindskes yderligere.

Sådan vil det blive ved, indtil hele lånet er indfriet. Renterne vil blive stadig mindre og afdragene vil blive stadig større. Det er derfor det ofte føles som om man ingen vegne når med at betale af på lånet i begyndelsen, men hen imod slutningen af låneperioden vil det gå noget hurtigere med at få betalt af på lånet.

For at øge forståelsen og overblikket over afviklingen af et annuitetslån, kan man derfor lave amortisationstabel eller en amortisationsplan. (Det er to forskellige ord for præcis det samme).

I det følgende beskrives konstruktionen af en amortisationstabel for afvikling af et lån. Opsparing diskuteres senere.

Planen består af en tabel med fem informationer om: Termin, Saldo, Rente, Afdrag og Ny saldo.

Der er to sammenhænge, som altid gælder i en amortisationstabel og det er:

- $\text{Ydelsen } y = \text{Renten } r + \text{ Afdrag} \Leftrightarrow \text{Afdrag} = \text{Ydelsen } y - \text{Renten } r$
- $\text{Ny saldo} = \text{ Saldo} - \text{ Afdrag}$

Bogen opfordrer (som altid) til at man benytter de medfølgende værktøjer.
Her vises, hvordan man konstruerer amortisationstabellen i Excel, for at give den optimale forståelse for problemet.

Øvelse 6.4.1: Amortisationstabel

Denne øvelse gennemregnes og konstrueres som et eksempel. Den tager udgangspunkt i bogens øvelse, 6.4.1, hvor man skal indsætte opgavens værdier og derefter aflæse i den automatisk genererede amortisationstabel.

De anvendte værdier er:

$$A_0 \text{ (Hovedstol)} = 4.000,00\,kr.$$
$$r \text{ (Renten)} = 7\,\% = 0,07$$
$$n \text{ (Antal terminer)} = 6$$
$$y \text{ (Ydelsen)} = 839,18\,kr.$$

De anvendte værdier indtastes i Excel:

B4

	A	B	C
1	Hovedstol:	4000	
2	Renten:	7%	
3	Antal terminer:	6	
4	Ydelsen:		
5			

Det anbefales (hvis det er muligt – dvs. hvis der ikke er en fast ydelse), at udregne ydelsen. Dette gøres vha. funktionen YDELSE, som allerede er beskrevet i dette notat. For sammenhængens skyld gentages funktionen igen her:

Hvad med Excel ???

Funktionen, der skal bruges til at beregne ydelsen hedder: "**YDELSE**". Bemærk, at hele funktionen skal have modsat fortegn. Dette sker ved at sætte et minustegn foran funktionsudtrykket.

	A	B	C	E	F
68	**Betegnelse**	**Excel, navn**	**Værdi**		
69	Hovedstol:	A_0 Nutidsværdi	4.000,00 kr.		
70	Rente:	r Renten	7%	=-YDELSE(C70;C71;C69)	
71	Antal terminer:	n Antal terminer	6	YDELSE(rente; nper; **nv**; [fv]; [type])	

	A	B	C	E	F
68	**Betegnelse**	**Excel, navn**	**Værdi**		
69	Hovedstol:	A_0 Nutidsværdi	4.000,00 kr.		
70	Rente:	r Renten	7%	839,18 kr.	
71	Antal terminer:	n Antal terminer	6		

Bemærk, at da der her er tale om afvikling af et lån, så skal man bruge det tredje argument her (i modsætning til det fjerde argument, når der var tale om en opsparing), **da det er nutidsværdien, som skal benyttes.**

Således kendes nu alle de informationer der skal til, for at konstruere amortisationstabellen.

	A	B	C
1	Hovedstol:	4000	
2	Renten:	7%	
3	Antal terminer:	6	
4	Ydelsen:	839,18 kr.	
5			

Nu laves overskrifterne til amortisationstabellen.
Det kan være praktisk at lave en kolonne til ydelsen også.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Hovedstol:	4000					
2	Renten:	7%					
3	Antal terminer:	6					
4	Ydelsen:	839,18 kr.					
5							
6	**Termin**	**Saldo**	**Ydelse**	**Rente**	**Afdrag**	**Ny saldo**	
7							

*Hvis man har lavet sin amortisationstabel korrekt, så skal der **KUN** indtastes data i de celler, som er markeret med gul farve. Resten skal udregnes automa-*

Det viser sig, at amortisationstabellen i høj grad kan laves med Excel-automatik, men der er forskel på de to øverste linjer, så de skal laves.

I kolonne A skal terminsnummeret stå. Det er nemt! Der skal bare tælles til 6 (i dette tilfælde), men det er faktisk nok at skrive de to første tal.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Hovedstol:	4000					
2	Renten:	7%					
3	Antal terminer:	6					
4	Ydelsen:	839,18 kr.					
5							
6	**Termin**	**Saldo**	**Ydelse**	**Rente**	**Afdrag**	**Ny saldo**	
7	1						
8	2						
9							

I celle B7 skal saldoen stå. Lige når man har lånt pengene, skylder man netop dét beløb. Så det skal stå i celle B7. Men hvis regnearket skal genbruges til en anden opgave er det meget vigtigt, at man kun indtaster data i de gule celler, og dermed må der ikke indtastes tal direkte i f.eks. celle B7. Til gengæld skal der laves en REFERENCE til den celle, som indeholder den værdi, som skal bruges. I celle B7 skal der stå: ”=B1”. (Uden anførselstegnene).

I celle C7 skal der laves en reference til den celle, som indeholder værdien for ydelsen. Det er celle B4. Derfor indtastes der i celle C7: ”=$B$4”. (Det er altid ligegyldigt, om man bruger små eller store bogstaver).

Lige en kort kommentar om dollartegnene:

Excel er et sindrigt program! Når man i celle C7 skriver ”=B4”, så opfatter Excel det ikke på samme måde, som for brugeren er intuitivt logisk. Excel tænker: ”Hmmm. Celle B4 er den celle, som står en celle til venstre og tre celler ovenover denne her celle.” Dvs. at når man kopierer denne reference til en anden celle, så vil Excel igen tænke, at der skal være en reference til den celle, som er en celle til venstre og tre celler ovenover den celle, som formlen er kopieret hen til.
Det vil i dette tilfælde resultere i noget, der er forkert, fordi når formlerne kopieres ned, så vil referencen også flytte sig, og vil således ikke længere pege på celle B4, men derimod celle B5, B6, B7 … etc.
Derfor bruger man dollartegnene! Dollartegnene virker som en ”lås”, der fortæller, at den reference som følger er fastholdt. I dette tilfælde er der dollartegn foran BÅDE ”B” og ”4”, og det fortæller, at både række- og kolonne-referencen er låst. (Man kan godt nøjes med at låse enten rækken eller kolonnen, men det er stof til et senere notat).

I celle D7 udregnes renten. Det må være saldoen multipliceret med rentesatsen.
Således indtastes: ”=B7*$B$2”.
Igen anvendes dollartegnene for at kontrollere referencen til rentesatsen.

Det er tidligere defineret, at Afdraget er lig med Ydelsen minus Renten. Dette skal stå i celle E7. Da de to tal altid vil stå ”på den måde – relativt til” på samme måde, behøves der ikke dollartegn.

E7 indeholder: ”=C7-D7”.

Den nye saldo er saldoen (nuværende gæld) minus afdraget. Derfor indtastes der i celle F7: ”=B7-E7”, Disse to tal følges også ad hele tide, så heller ingen dollartegn her.

Bortset fra, at formlerne forsvinder og værdierne vises i cellerne, når man accepterer indtastningen, så burde regnearket nu se således ud:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Hovedstol:	4000					
2	Renten:	7%					
3	Antal terminer:	6					
4	Ydelsen:	839,18 kr.					
5							
6	Termin	Saldo	Ydelse	Rente	Afdrag	Ny saldo	
7	1	=B1	=$B$4	=B7*$B$2	=C7-D7	=B7-E7	
8	2						
9							

Som tidligere nævnt, så skal der være forskel på de to første linjer. Det skyldes, at saldoen nu ikke længere er det oprindelige lånebeløb. Der er her i anden linje – siden sidste termin – løbet renter på, betalt en ydelse, som dels dækkede renterne, men også sænkede gælden med differencen mellem ydelsen og renten. Så den nye gæld skal hentes et andet sted fra, nemlig fra den Nye saldo, som blev udregnet i den yderste højre kolonne i første linje.
Som altid, skal der anvendes referencer, så i celle B8 skal der stå: ”=F7”.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Hovedstol:	4000					
2	Renten:	7%					
3	Antal terminer:	6					
4	Ydelsen:	839,18 kr.					
5							
6	Termin	Saldo	Ydelse	Rente	Afdrag	Ny saldo	
7	1	=B1	=$B$4	=B7*$B$2	=C7-D7	=B7-E7	
8	2	=F7					
9							

Når man laver regneark, er det ok at være lidt doven – på den smarte måde. Den store filosofi i regneark er, at jo mindre man skal indtaste, desto mindre risiko er der for at kvaje sig! Det antages, at den første linje er lavet korrekt, så nu markeres cellerne fra C7 til F7.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Hovedstol:	4000					
2	Renten:	7%					
3	Antal terminer:	6					
4	Ydelsen:	839,18 kr.					
5							
6	Termin	Saldo	Ydelse	Rente	Afdrag	Ny saldo	
7	1	=B1	=$B$4	=B7*$B$2	=C7-D7	=B7-E7	
8	2	=F7					

Bemærk, at det markerede område i nederste højre hjørne har en lille firkant. Når man holder musemarkøren tæt hen over den, så ændres markørikonet fra et lille hult kors til et lille ”plus”-tegn. Når markøren ser sådan ud, trækker man én celle ned. Derved kopieres alle formler, og de relative referencer (dem uden dollartegn) ændres, så de stadig peger relativt det samme sted hen, mens de absolutte referencer (dem med dollartegn), forbliver fastholdt.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Hovedstol:	4000					
2	Renten:	7%					
3	Antal terminer:	6					
4	Ydelsen:	839,18 kr.					
5							
6	**Termin**	**Saldo**	**Ydelse**	**Rente**	**Afdrag**	**Ny saldo**	
7	1	=B1	=$B$4	=B7*$B$2	=C7-D7	=B7-E7	
8	2	=F7	=$B$4	=B7*$B$2	=C7-D8	=B7-E8	
9							

Det skal stadig huskes, at når man foretager denne procedure i virkeligheden, så vises formlerne ikke. Det er derimod de udregnede værdier, som vises. Vær derfor forsigtig med at stole blindt på, hvad der sker. Lav altid en kontrol, hvor der bruges kendte værdier og kontroller at de udregnede værdier matcher med det i forvejen gennemregnede eksempel.

Nu markeres hele linje to, og nu kan amortisationsplanen færdiggøres ved at trække hele tabellen (nu inklusive kolonne A og kolonne B) fra linje to (linje 8 i regnearket) til og med linje 6 (linje 12 i regnearket).

	A	B	C	D	E	F	G
1	Hovedstol:	4000					
2	Renten:	7%					
3	Antal terminer:	6					
4	Ydelsen:	839,18 kr.					
5							
6	**Termin**	**Saldo**	**Ydelse**	**Rente**	**Afdrag**	**Ny saldo**	
7	1	=B1	=$B$4	=B7*$B$2	=C7-D7	=B7-E7	
8	2	=F7	=$B$4	=B7*$B$2	=C7-D8	=B7-E8	
9	3	=F8	=$B$4	=B7*$B$2	=C7-D9	=B7-E9	
10	4	=F9	=$B$4	=B7*$B$2	=C7-D10	=B7-E10	
11	5	=F10	=$B$4	=B7*$B$2	=C7-D11	=B7-E11	
12	6	=F11	=$B$4	=B7*$B$2	=C7-D12	=B7-E12	
13							

Det endelige resultat med værdier i stedet for formler, burde se således ud:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Hovedstol:	4000					
2	Renten:	7%					
3	Antal terminer:	6					
4	Ydelsen:	839,18 kr.					
5							
6	**Termin**	**Saldo**	**Ydelse**	**Rente**	**Afdrag**	**Ny saldo**	
7	1	4.000,00 kr.	839,18 kr.	280,00 kr.	559,18 kr.	3.440,82 kr.	
8	2	3.440,82 kr.	839,18 kr.	240,86 kr.	598,33 kr.	2.842,49 kr.	
9	3	2.842,49 kr.	839,18 kr.	198,97 kr.	640,21 kr.	2.202,28 kr.	
10	4	2.202,28 kr.	839,18 kr.	154,16 kr.	685,02 kr.	1.517,26 kr.	
11	5	1.517,26 kr.	839,18 kr.	106,21 kr.	732,98 kr.	784,28 kr.	
12	6	784,28 kr.	839,18 kr.	54,90 kr.	784,28 kr.	0,00 kr.	
13							

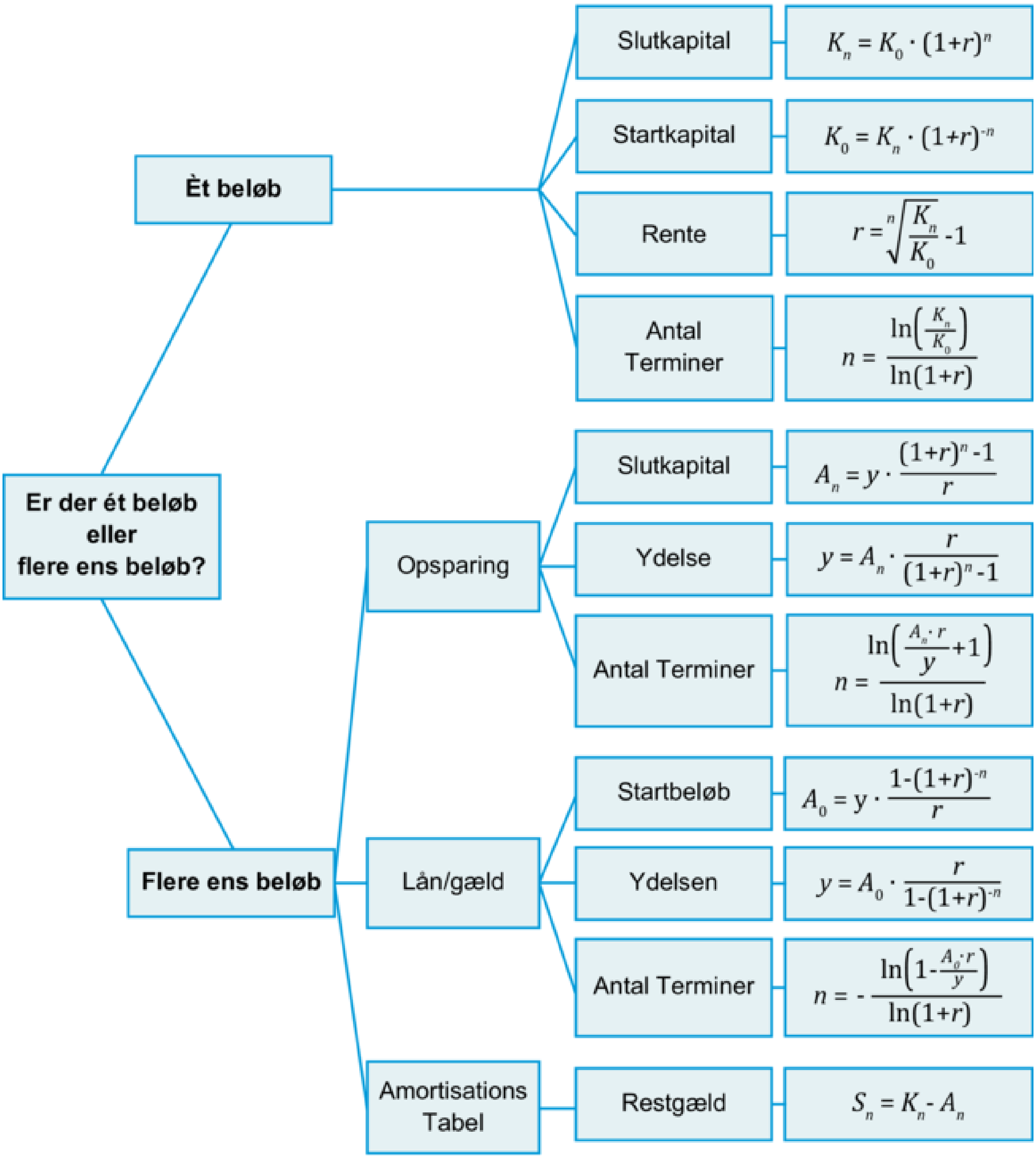
Nu er amortisationstabellen konstrueret, og spørgsmålene fra bogens opgave kan besvares. I opgaven er markeret nogle celler. Disse er i figuren herunder markeret med lys blå farve:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Hovedstol:	4000					
2	Renten:	7%					
3	Antal terminer:	6					
4	Ydelsen:	839,18 kr.					
5							
6	**Termin**	**Saldo**	**Ydelse**	**Rente**	**Afdrag**	**Ny saldo**	
7	1	4.000,00 kr.	839,18 kr.	280,00 kr.	559,18 kr.	3.440,82 kr.	
8	2	3.440,82 kr.	839,18 kr.	240,86 kr.	598,33 kr.	2.842,49 kr.	
9	3	2.842,49 kr.	839,18 kr.	198,97 kr.	640,21 kr.	2.202,28 kr.	
10	4	2.202,28 kr.	839,18 kr.	154,16 kr.	685,02 kr.	1.517,26 kr.	
11	5	1.517,26 kr.	839,18 kr.	106,21 kr.	732,98 kr.	784,28 kr.	
12	6	784,28 kr.	839,18 kr.	54,90 kr.	784,28 kr.	0,00 kr.	
13							

Besvar følgende:

a) Hvad viser de markerede steder i tabellen?

6.5 Formeltræ



Opgave 1 **p. 374**

På en bankkonto er renten 3 % p.a. Der indsættes 2.250,00 *kr*.

Hvor meget er beløbet vokset til efter henholdsvis 10 og 15 år?

$$K_{10} = 2.250,00 \cdot (1+0,03)^{10} = 2.250,00 \cdot 1,03^{10} \Leftrightarrow \underline{\underline{K_{10} = 3.023,81\,kr.}}$$

$$K_{15} = 2.250,00 \cdot (1+0,03)^{15} = 2.250,00 \cdot 1,03^{15} \Leftrightarrow \underline{\underline{K_{15} = 3.505,43\,kr.}}$$

Opgave 2 **p. 374**

En person indsætter 50.000,00 *kr*. på en pensionskonto med en rente på 2,263 % p.a. Personen er 50 år gammel.

Hvor meget kan personen hæve på sin 60 års fødselsdag?

Perioden er på: $n = 60\,år - 50\,år \Leftrightarrow \underline{n = 10\,år}$

$$K_{10} = 50.000,00 \cdot (1+0,02263)^{10} = 50.000,00 \cdot 1,02263^{10} \Leftrightarrow \underline{\underline{K_{10} = 62.539,63\,kr.}}$$

Opgave 3 **p. 374**

Hvor meget er en kapital på 10.000 *kr*. vokset til på 10 år med en rente på 4 % p.a.

a) Hvis renten tilskrives helårligt?

$$K_{10} = 10.000,00 \cdot (1+0,04)^{10} = 10.000,00 \cdot 1,04^{10} \Leftrightarrow \underline{\underline{K_{10} = 14.802,44\text{ kr.}}}$$

b) Hvis renten tilskrives halvårligt?

$$K_{20} = 10.000,00 \cdot \left(1+\frac{0,04}{2}\right)^{20} = 10.000,00 \cdot 1,02^{20} \Leftrightarrow \underline{\underline{K_{20} = 14.859,47\text{ kr.}}}$$

c) Hvis renten tilskrives kvartårligt?

$$K_{40} = 10.000,00 \cdot \left(1+\frac{0,04}{4}\right)^{40} = 10.000,00 \cdot 1,01^{40} \Leftrightarrow \underline{\underline{K_{40} = 14.888,64\text{ kr.}}}$$

d) Bestem fordoblingstiden i år i spørgsmål a) til c).

$$T_{2\text{A}} = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(1,04)} \Leftrightarrow \underline{\underline{T_{2\text{A}} = 17,67\text{ år}}}$$

$$T_{2\text{B}} = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(1,02)} \Leftrightarrow \underline{\underline{T_{2\text{B}} = 35,01\text{ halvår} \approx 17,5\text{ år}}}$$

$$T_{2\text{C}} = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(1,01)} \Leftrightarrow \underline{\underline{T_{2\text{C}} = 69,66\text{ kvartaler} \approx 17,42\text{ år}}}$$

Opgave 4 **p. 374**

En studerende lånte 1/8 1993 et beløb i et pengeinstitut. Den 1/8 1999 blev lånet indfriet med 23.290 kr. Renten har gennem hele perioden været 3,25 %

Hvor meget lånte den studerende den 1/8 1993?

Perioden strækker sig over 6 år fra 1/8 1993 til 1/8 1999.

$$K_0 = K_n \cdot (1+r)^{-n} \Leftrightarrow K_0 = 23.290,00 \cdot (1+0,0325)^{-6} = 23.290,00 \cdot 1,0325^{-6} \Leftrightarrow \underline{\underline{K_0 = 19.223,35 \text{ kr.}}}$$

Opgave 5 **p. 374**

Den 1/1 2000 hæves 20.000 kr. på en konto, hvis rente var 3 % pr. halvår.

a) Hvad var saldoen på kontoen 1/1 1995?

$$K_0 = K_n \cdot (1+r)^{-n} \Leftrightarrow K_0 = 20.000 \cdot (1+0,03)^{-10} = 20.000 \cdot 1,03^{-10} = \underline{\underline{14.881,88 \text{ kr.}}}$$

b) Hvad var saldoen, når renten 1/1 1997 ændredes fra 3% pr. halvår til 2% pr. halvår?

$$K_0 = K_n \cdot (1+r)^{-n} \Leftrightarrow K_0 = 20.000 \cdot (1+0,02)^{-6} = 20.000 \cdot 1,02^{-6} = 17.759,43 \text{ kr.}$$

$$K_0 = K_n \cdot (1+r)^{-n} \Leftrightarrow K_0 = 17.759,43 \cdot (1+0,03)^{-4} = 17.759,43 \cdot 1,03^{-4} = \underline{\underline{15.779,02 \text{ kr.}}}$$

Opgave 6 **p. 374**

En aktie købes til kurs 325 og sælges 2 år efter til kurs 375.

Bestem rentefoden p.a.

$$r = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 = \sqrt[2]{\frac{375}{325}} - 1 = \underline{\underline{0,0742 \approx 7,42\%}}$$

Opgave 7 p. 374

I et pengeinstitut tilbydes følgende rentesatser på en særlig opsparingskonto.

1. år	2,0% p.a.
2. år	2,5% p.a.
3. år	3,0% p.a.
4. år	4,0% p.a.
5. år	5,0% p.a.

a+b) Hvor meget vokser 10000 kr. til på 5 år?

$$\begin{aligned} r &= \sqrt[5]{(1+0,020)\cdot(1+0,025)\cdot(1+0,030)\cdot(1+0,040)\cdot(1+0,050)} - 1 \\ &= \sqrt[5]{(1,020)\cdot(1,025)\cdot(1,030)\cdot(1,040)\cdot(1,050)} - 1 \\ &= \sqrt[5]{1,17593657998} - 1 \\ &= 1,0329 - 1 \\ &= 0,0329 \approx 3,29\% \end{aligned}$$

$$K_5 = 10.000\cdot(1+0,0329)^5 = 10.000\cdot 1,0329^5 = \underline{\underline{11.759,37 \text{ kr.}}}$$

Opgave 8 p. 374

Hvor mange år går der før 2.500 kr. vokser til mindst 4.000 kr., når renten er 5% p.a. og der er:

a) Helårlig rentetilskrivning?

$$n = \frac{\ln(K_n)-\ln(K_0)}{\ln(1+r)} = \frac{\ln(4.000)-\ln(2.500)}{\ln(1+0,05)} = \frac{\ln(4.000)-\ln(2.500)}{\ln(1,05)} = 9,67 \text{ år} \approx \underline{\underline{10 \text{ år}}}$$

b) Halvårlig rentetilskrivning?

$$n = \frac{\ln(K_n)-\ln(K_0)}{\ln(1+r)} = \frac{\ln(4.000)-\ln(2.500)}{\ln\left(1+\frac{0,05}{2}\right)} = \frac{\ln(4.000)-\ln(2.500)}{\ln(1,025)} = 19,03 \text{ halvår} \approx \underline{\underline{10 \text{ år}}}$$

c) Kvartårlig rentetilskrivning?

$$n = \frac{\ln(K_n)-\ln(K_0)}{\ln(1+r)} = \frac{\ln(4000)-\ln(2500)}{\ln\left(1+\frac{0,05}{4}\right)} = \frac{\ln(4000)-\ln(2500)}{\ln(1,0125)} = 37,83 \text{ kvartaler} \approx \underline{\underline{9,5 \text{ år}}}$$

Opgave 9 p. 374

Beregn den effektive rente p.a., når renten er:

a) 1% pr. måned?

$$i = (1+r)^n - 1 = (1+0,01)^{12} - 1 = 1,03^4 - 1 = 0,1268 = \underline{\underline{12,68\%}}$$

b) 3% pr. kvartal?

$$i = (1+r)^n - 1 = (1+0,03)^4 - 1 = 1,03^4 - 1 = 0,1255 = \underline{\underline{12,55\%}}$$

c) 6% pr. halvår?

$$i = (1+r)^n - 1 = (1+0,06)^2 - 1 = 1,06^2 - 1 = 0,1236 = \underline{\underline{12,36\%}}$$

Opgave 10 p. 374

Et ungt par får tilbudt 2 billån til køb af en ny bil. Forhandleren kan tilbyde et lån med en rente på 6% p.a. med månedlig rentetilskrivning.

a) Beregn den effektive rente p.a. på forhandlerens billån.

$$i = (1+r)^n - 1 = \left(1+\frac{0,06}{12}\right)^{12} - 1 = 1,005^{12} - 1 = 0,0617 = \underline{\underline{6,17\%}}$$

Deres bank kan tilbyde et tilsvarende lån med 5,8% p.a. med kvartårlig rentetilskrivning.

b) Beregn den effektive rente p.a. på bankens tilbud.

$$i = (1+r)^n - 1 = \left(1+\frac{0,058}{4}\right)^{4} - 1 = 1,0145^4 - 1 = 0,05927 = \underline{\underline{5,93\%}}$$

c) Hvilket lån skal det unge par vælge?

Banklånet er det billigste!

Opgave 11 **p. 375**

Der indsættes 3.000 kr. hvert år i en årrække. Renten er 3% p.a.

Bestem saldoen på kontoen efter henholdsvis 10 og 15 indbetalinger.

A_n	=	Fremtidsværdien af annuiteten		
y	=	Annuitetsydelsen	=	3.000 kr.
r	=	Rentefoden pr. termin	=	3% p.a.
n	=	Antal ydelser (terminer)	=	10

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 3.000 \cdot \frac{(1+0,03)^{10} - 1}{0,03} = \underline{\underline{34.391,64 \text{ kr.}}}$$

A_n	=	Fremtidsværdien af annuiteten		
y	=	Annuitetsydelsen	=	3.000 kr.
r	=	Rentefoden pr. termin	=	3% p.a.
n	=	Antal ydelser (terminer)	=	15

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 3.000 \cdot \frac{(1+0,03)^{15} - 1}{0,03} = \underline{\underline{55.796,74 \text{ kr.}}}$$

Opgave 12 **p. 375**

I perioden 1/1 1994 til 1/1 1998 (begge inklusive) indsættes hvert kvartal 4.000 kr. på en opsparingskonto. I perioden fra 1/4 1998 til 1/10 2000 (begge inklusive) indsættes hvert kvartal 5.500 kr. I hele perioden er renten 1,5% pr. kvartal.

Hvor meget er der opsparet efter sidste indbetaling?

1) De første 13 ydelser:

A_n	=	Fremtidsværdien af annuiteten		
y	=	Annuitetsydelsen	=	4.000 kr.
r	=	Rentefoden pr. termin	=	1,5% pr. kvartal
n	=	Antal ydelser (terminer)	=	17

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 4.000 \cdot \frac{(1+0,015)^{17} - 1}{0,015} = \underline{\underline{76.805,42 \text{ kr.}}}$$

Dette beløb fremskrives så 11 terminer:

K_0	=	Begyndelseskapitalen	=	76.805,4 kr.
r	=	Rentefoden	=	0,015 (= 1,5%)
n	=	Antal terminer	=	11

$$K_{10} = 76.805,42 \cdot (1+0,015)^{11} = 76.805,43 \cdot 1,015^{11} = \underline{\underline{90.472,86 \text{ kr.}}}$$

De sidste 11 terminer giver bidraget:

A_n	=	Fremtidsværdien af annuiteten		
y	=	Annuitetsydelsen	=	5.500 kr.
r	=	Rentefoden pr. termin	=	1,5% pr. kvartal
n	=	Antal ydelser (terminer)	=	11

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 5.500 \cdot \frac{(1+0,015)^{11} - 1}{0,015} = \underline{\underline{65.247,94 \text{ kr.}}}$$

Sammenlagt giver de to resultater: 90.472,86 + 65.247,94 = $\underline{\underline{\text{155.720,81 kr.}}}$

Opgave 13 **p. 375**

Gennem hvor mange år skal man indsætte 10.000 kr. pr. år for at saldoen på kontoen overstiger 100.000 kr. når renten er 5% p.a.

A_n	=	Fremtidsværdien af annuiteten	=	100.000 kr.
y	=	Annuitetsydelsen	=	10.000 kr.
r	=	Rentefoden pr. termin	=	5% p.a.
n	=	Antal ydelser (terminer)		

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{A_n \cdot r}{y} + 1 = (1+r)^n$$

$$\Downarrow$$

$$n \cdot \ln(1+r) = \ln\left(\frac{A_n \cdot r}{y} + 1\right)$$

$$\Downarrow$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{A_n \cdot r}{y} + 1\right)}{\ln(1+r)} = \frac{\ln\left(\frac{100.000 \cdot 0,05}{10.000} + 1\right)}{\ln(1+0,05)} = \frac{\ln(1,5)}{\ln(1,05)} = 8,31 \approx \underline{\underline{9\text{ år}}}.$$

Opgave 14 **p. 375**

Ved at indbetale 15.000 kr. pr. halvår, første gang den 1/7 1992 og sidste gang den 1/7 2000, opsparer en familie 371.125,60 kr. (samlet opsparing efter sidste indbetaling)

Bestem rentefoden pr. halvår.

Ved at prøve sig frem, finder man frem til at renten p. halvår = $\underline{\underline{5\%}}$

Opgave 15 **p. 375**

Boysen opretter på sin søns 1-års fødselsdag en konto i en bank, der tilskriver rente helårligt med 4%. Han indsætter i 5 år 1.000 kr., de næste 8 år 1.200 kr. og de resterende år op til sønnens 18-års fødselsdag 1.600 kr.

Hvor meget står der på kontoen umiddelbart efter indbetalingen på sønnens 18-års fødselsdag?

1) De første 5 ydelser:

A_n	=	Fremtidsværdien af annuiteten		
y	=	Annuitetsydelsen	=	1.000 kr.
r	=	Rentefoden pr. termin	=	4% p.a.
n	=	Antal ydelser (terminer)	=	5

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 1.000 \cdot \frac{(1+0,04)^5 - 1}{0,04} = \underline{\underline{5.416,32 \text{ kr.}}}$$

Nu er sønnen 6 år, så resultatet fremskrives med 12 år op til hans 18 års fødselsdag:

K_0	=	Begyndelseskapitalen	=	5.416,32 kr.
r	=	Rentefoden	=	0,04 (= 4%)
n	=	Antal terminer	=	12

$$K_{10} = 5.416,32 \cdot (1+0,04)^{12} = 5.416,32 \cdot 1,04^{12} = \underline{\underline{8.671,71 \text{ kr.}}}$$

2) De næste 8 ydelser:

A_n	=	Fremtidsværdien af annuiteten		
y	=	Annuitetsydelsen	=	1.200 kr.
r	=	Rentefoden pr. termin	=	4% p.a.
n	=	Antal ydelser (terminer)	=	8

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 1.200 \cdot \frac{(1+0,04)^8 - 1}{0,04} = \underline{\underline{11.057,07 \text{ kr.}}}$$

Nu er sønnen 6+8=14 år, så resultatet fremskrives med 4 år op til hans 18 års fødselsdag:

K_0	=	Begyndelseskapitalen	=	11.057,07 kr.
r	=	Rentefoden	=	0,04 (= 4%)
n	=	Antal terminer	=	4

$$K_{10} = 11.057,07 \cdot (1+0,04)^4 = 11.057,07 \cdot 1,04^4 = \underline{\underline{12.935,21 \text{ kr.}}}$$

3) De sidste 4 ydelser:

A_n	=	Fremtidsværdien af annuiteten		
y	=	Annuitetsydelsen	=	1.600 kr.
r	=	Rentefoden pr. termin	=	4% p.a.
n	=	Antal ydelser (terminer)	=	5

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 1.600 \cdot \frac{(1+0,04)^5 - 1}{0,04} = \underline{\underline{8.666,12 \text{ kr.}}}$$

Nu er sønnen blevet 18, så der er ikke brug for fremskrivning for det sidste bidrag.

Total: 8.666,12+13.452,62+11.057,07 = **<u>31.137,31</u>**

Facitliste

Kapitel 6.1 – Renter

Øvelse 6.1.1: Rente på SU-lån

1. Hvad er renten *r* per termin og antallet af terminer *n*?	
	$r_{\%\,\text{pr.termin}} = 0{,}5\ \%/_{\text{termin}}$
	$n = 60\ terminer$

Øvelse 6.1.2: Rente per termin (Rentefod)

Helårligt	$r_{\%\,\text{pr.termin}} = 12\,\%/_{\text{termin}}$ $n = 10$ terminer
Halvårligt	$r_{\%\,\text{pr.termin}} = 6\,\%/_{\text{termin}}$ $n = 20$ terminer
Kvartårligt (kvartalsvis)	$r_{\%\,\text{pr.termin}} = 3\,\%/_{\text{termin}}$ $n = 40$ terminer
Månedligt	$r_{\%\,\text{pr.termin}} = 1\,\%/_{\text{termin}}$ $n = 120$ terminer

Ø18 (Matematik B$_1$, 2002) Sammensat rentesregning (Effektiv rente) p. 294

Beregn den effektive rente p.a. for dette forbrugslån og sammenlign med renten i eksempel 7.

$i = 0{,}1255 \Leftrightarrow i = 12{,}55\%$

Så det kan bedre betale sig at tage forbrugslånet i X-købing Bank, da udlånsrenten her er 0,13 % lavere.

Ø19 (Matematik B$_1$, 2002) Sammensat rentesregning (Effektiv rente) p. 294

a) 2% pr. måned	$i = 0{,}2682 \Leftrightarrow i = 26{,}82\%$
b) 6% pr. halvår	$i = 0{,}1236 \Leftrightarrow i = 12{,}36\%$
c) 4% pr. kvartal	$i = 0{,}1698 \Leftrightarrow i = 16{,}98\%$

Øvelse 6.1.3: Effektiv rente

a) Den halvårlige rente er 3 %.	$i \approx 6{,}09\%$
b) Den månedlige rente er 1 %.	$i \approx 12{,}68\%$
c) Den kvartalsvise rente er 2 %.	$i \approx 8{,}24\%$

Øvelse 6.1.4: Gennemsnitlig rente

a) Beregn den gennemsnitlige rente.	$r_{snit} = 0{,}0362 \approx 3{,}62\%$

Ø13 (Matematik B$_1$, 2002) Sammensat rentesregning (Gennemsnitlig rente) p. 292

a) Hvad bliver den gennemsnitlige årlige rente i en 3-års periode?	$r = 0{,}0499 \approx 4{,}99\%$
b) Hvad bliver den gennemsnitlige årlige rente i en 5-års periode, når renten i de sidste 2 år er 4,5 % p.a.?	$r = 0{,}04098 \approx 4{,}098\%$

Ø14 (Matematik B_1, 2002) **Sammensat rentesregning (Gennemsnitlig rente)** **p. 292**

a) Beregn den gennemsnitlige årlige prisstigning på huset i de tre år.	$r = 0,03326 \approx 3,326\%$
b) Beregn prisen på huset efter de tre år.	$K_3 = 992.817\ kr.$
c) Beregn købsprisen på huset, hvis dette hus steg med de samme procenter.	$K_0 = 1.087.813,77\ kr.$

d) Beregn indekstal for huspriserne i de tre år.

År	År 0	År 1	År 2	År 3
Pris	900.000	945.000	973.350	992.817
Index	100	105	108,15	110,31

Index beregnes som:

$$Index = \frac{Aktuelværdi}{Basisværdi} \cdot 100 \quad = \quad \frac{K_i}{K_0} \cdot 100$$

Øvelse 6.1.5: Rente

a) Hvad er den månedlige rente? Hvad er den effektive rente?	$r_{\%\ \text{pr.termin}} = 1 \%/_{\text{termin}}$ $i \approx 12,68\ \%$
b) Bestem den gennemsnitlige rente p.a. med 3 decimaler.	$r_{snit} = 0,04475 \approx 4,475\%$

Kapitel 6.2 – Sammensat Rentesregning

Øvelse 6.2.1: Fremskriv ét beløb

a) På 24 måneder, hvis renten er 1 % per måned?	$K_{24} = 12.697,35\ kr.$
b) På 5 år, hvis renten er 4 % per år?	$K_5 = 12.166,53\ kr.$
c) På 20 kvartaler, hvis renten er 1,5 % per kvartal?	$K_{20} = 13.468,55\ kr.$
d) På 10 halvår, hvis renten er 3 % per halvår?	$K_{10} = 13.439,16\ kr.$
e) På 3 år, hvis renten er 0,5 % per måned?	$K_{36} = 11.966,81\ kr.$

Ø1 (Matematik B_1, 2002) **Sammensat rentesregning (Fremskrivningsformlen)** **p. 288**

Beregn slutkapitalen i eksempel 1 ved følgende rentesatser pr. termin:

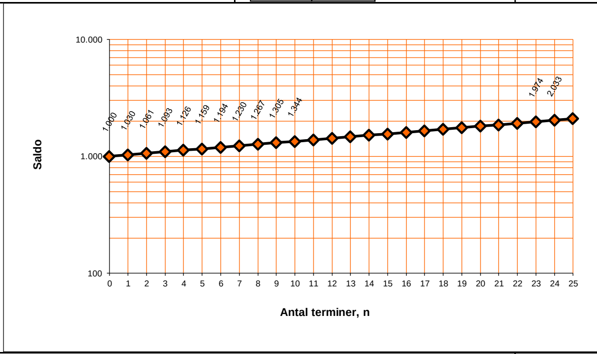
a) 4 %	$K_{10} = 1.448,24\ kr.$
b) 5 %	$K_{10} = 1.628,89\ kr.$
c) 6 %	$K_{10} = 1.790,85\ kr.$

Ø2 (Matematik B_1, 2002) — Sammensat rentesregning (Fremskrivningsformlen) — p. 288

Udarbejd en tabel, der viser saldoen i de forskellige terminer i eksempel 1, dvs. bestem $K_0, K_1, \cdots, K_{10}$ ved rentesatsen 3 % p.a.:

n	Saldo
0	1.000,00
1	1.030,00
2	1.060,90
3	1.092,73
4	1.125,51
5	1.159,27
6	1.194,05
7	1.229,87
8	1.266,77
9	1.304,77
10	1.343,92

a) Indtegn funktionens graf på enkeltlogaritmisk papir



b) Aflæs fordoblingstiden og beregn denne. Vink: Se kapitel 8.

Aflæsning: Det ses af grafen, at funktionsværdien 2.000 opnås ca. midt mellem den 23. og den 24. termin. Da man altid skal runde terminer opad, er det altså 24 terminer.

Beregning: $T_2 = 23,45$, altså igen lig med 24 terminer.

Ø3 (Matematik B_1, 2002) — Sammensat rentesregning (Fremskrivningsformlen) — p. 288

Hvor meget er 25.000,00 kr. vokset til på 10 år, når renten i hele perioden er 9 % p.a.?	$K_{10} = 59.184,09$ kr.

Ø4 (Matematik B_1, 2002) — Sammensat rentesregning (Fremskrivningsformlen) — p. 288

Hvis det tænkes, at man siden år 0 har fået forrentet 1 øre med 5 % p.a., hvor meget er denne kapital vokset til i år 2000?	$K_{2000} = 2,39 \cdot 10^{40}\ kr.$

Ø5 (Matematik B_1, 2002) — Sammensat rentesregning (Fremskrivningsformlen) — p. 288

Hvor meget er saldoen på boligopsparingen efter 9 år?	$K_3 = 14.859,93\ kr.$

Ø6 (Matematik B_1, 2002) — Sammensat rentesregning (Fremskrivningsformlen) — p. 288

Hvor meget er gælden vokset til?	$K_{24} = 24.126,56\ kr.$

Ø7 (Matematik B_1, 2002) — Sammensat rentesregning (Fremskrivningsformlen) — p. 288

Hvor meget vokser beløbet til på 1 år, hvis:

a) Renten tilskrives én gang årligt?	$K_1 = 105.000,00\ kr.$	**a) Renten tilskrives månedligt?**	$K_{12} = 105.116,19\ kr.$
b) Renten tilskrives halvårligt?	$K_2 = 105.062,50\ kr.$	**b) Renten tilskrives ugentligt?**	$K_{52} = 105.124,58\ kr.$
c) Renten tilskrives kvartårligt?	$K_4 = 105.094,53\ kr.$	**c) Renten tilskrives dagligt?**	$K_{365} = 105.126,75\ kr.$

Øvelse 6.2.2 – Tilbagefør ét beløb

a) Hvor stort et beløb skal der indsættes i dag for at gælden kan indfries?	$K_0 = 82.034,83\ kr.$
b) Hvor stort et beløb har Schmidt indsat, hvis der er en helårlig rentetilskrivning på 3 %?	$K_0 = 43.130,44\ kr.$
c) Hvor stort et beløb skal indsættes, hvis der er tale om en kvartalsvis rentetilskrivning på 2 %?	$K_0 = 33.648,57\ kr.$

Finansregning

Ø8 (Matematik B_1, 2002) **Sammensat rentesregning (Tilbageskrivningsformlen)** p. 290

Hvor meget skal der indsættes på en konto, når der tilskrives 6 % p.a., og der ønskes et beløb om 10 år på 100000 *kr*., hvis der tilskrives renter:

a) Helårligt?	$\underline{\underline{K_0 = 55.839,48\,kr.}}$
b) Halvårligt?	$\underline{\underline{K_0 = 55.367,58\,kr.}}$
c) Kvartårligt?	$\underline{\underline{K_0 = 55.126,23\,kr.}}$

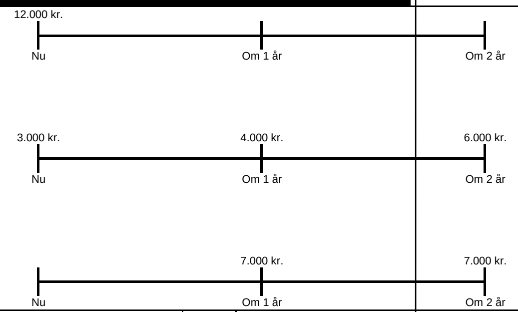
Ø9 (Matematik B_1, 2002) **Sammensat rentesregning (Tilbageskrivningsformlen)** p. 290

Hvor meget har man indsat på en konto i 1977, hvis der i 1998 blev udbetalt 35.000 kr., hvis:

a) Renten i hele perioden har været 10 % p.a. med helårlig rentetilskrivning?	$\underline{\underline{K_0 = 4.729,57\,kr.}}$
b) Renten i hele perioden har været 10 % p.a. med halvårlig rentetilskrivning?	$\underline{\underline{K_0 = 4.509,39\,kr.}}$
c) Renten i var 14 % p.a. indtil 1991, og derefter 9 % p.a. med helårlig rentetilskrivning?	$\underline{\underline{K_0 = 3.057,84\,kr.}}$

Ø10 (Matematik B_1, 2002) **Sammensat rentesregning (Tilbageskrivningsformlen)** p. 290

a) Illustrér betalingerne på en tidsakse (Én for hver betalingsmetode)



b) Hvilket af de tre tilbud er billigst for køberen, når renten er 8 % p.a.?
Vink: Tilbageskriv de enkelte beløb til købstidspunktet

A)	$12.000,00\,kr.$
B)	$11.847,74\,kr.$
C)	$12.482,85\,kr.$

<u>Altså er alternativ B) billigst!</u>

Ø11 (Matematik B_1, 2002) **Sammensat rentesregning (Rentefodsbestemmelse)** p. 291

$r = \underline{\underline{0,035 \approx 3,5\%}}$

Ø12 (Matematik B_1, 2002) **Sammensat rentesregning (Rentefodsbestemmelse)** p. 291

a) Bestem saldoen på kontoen i 1998.	$\underline{\underline{K_8 = 7.384,60\,kr.}}$
b) Hvad er den gennemsnitlige rente i pct. p.a. for hele perioden (1990-1998)?	$\underline{\underline{r = 0,0499 \approx 4,99\%}}$

Ø15 (Matematik B_1, 2002) **Sammensat rentesregning (Terminsantal)** p. 293

Hvor mange kvartaler går der, før 6.200 kr. er vokset til 15.000 kr., når renten er 2,5 % pr. kvartal?	$n = 35,77 \Leftrightarrow \underline{\underline{n \approx 36 \text{ kvartaler}}}$

Ø16 (Matematik B_1, 2002) **Sammensat rentesregning (Terminsantal)** p. 293

a) Hvor mange år har beløbet mindst stået på kontoen i X-købing Bank?	$n = 20,15 \Leftrightarrow$ $\Updownarrow$ $\underline{\underline{n \approx 21 \text{ kvartaler eller } 10,5 \text{ år}}}$
b) Vis at saldoen efter 20 terminer (10 år) er nøjagtig 13.468,55	$\underline{\underline{K_{20} = 13.468,55\,kr.}}$

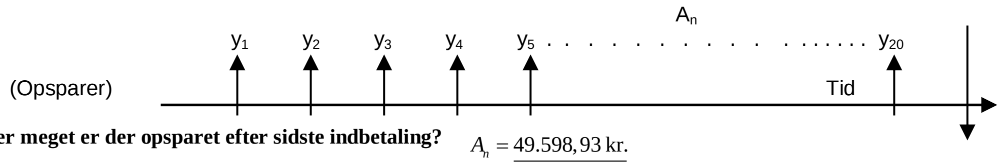
Ø17 (Matematik B_1, 2002) **Sammensat rentesregning (Terminsantal)** p. 293

a) 6 %	$T_2 = 11,89 \Leftrightarrow \underline{\underline{T_2 \approx 12 \text{ terminer}}}$	**b) 10 %**	$T_2 = 7,27 \Leftrightarrow \underline{\underline{T_2 \approx 8 \text{ terminer}}}$
c) 2 %	$T_2 = 35,0027 \Leftrightarrow \underline{\underline{T_2 \approx 36 \text{ kvartaler}}}$	**d) 3,4 %**	$T_2 = 20,149 \Leftrightarrow \underline{\underline{T_2 \approx 21 \text{ kvartaler}}}$

Kapitel 11.3 – Fremtidsværdi af en annuitet

Ø1 p. 298

a) Illustrér annuiteten på en tidsakse,



b) Hver meget er der opsparet efter sidste indbetaling? $A_n = \underline{\underline{49.598,93\text{ kr.}}}$

Ø2 p. 298

Hvor meget skylder den studerende efter sidste udbetaling? $A_n = \underline{\underline{79.637,04\text{ kr.}}}$

Ø3 p. 298

a) Beregn hvor meget han kan indbetale, når han vil betale 25% af netto-lønnen. y = 37.500 kr.

b) Hvor meget har Clausen opsparet, når han er 30 år og renten er 4% p.a. med helårlig rentetilskrivning? $A_n = \underline{\underline{203.112,10\text{ kr.}}}$

c) Hvor meget er der opsparet hvis Clausen indskyder 50.000 kr. hvert år? $A_n = \underline{\underline{270.816,13\text{ kr.}}}$

d) Hvor meget er der opsparet, hvis der kun indskydes 5.000 kr. hvert år? $A_n = \underline{\underline{27.081,61\text{ kr.}}}$

Ø4 p. 298

Hvor meget har funktionæren opsparet efter sidste indbetaling? $A_n = \underline{\underline{924.081,79\text{ kr.}}}$

Ø5 p. 299

$n = 74,89 \approx \underline{\underline{75}}\text{ mdr.}$

Ø6 p. 299

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$\Downarrow$$

$$64.202,82 = 1.000 \cdot \frac{(1+0,11)^{20} - 1}{0,11}$$

$$\Downarrow$$

$$64.202,82 = 1.000 \cdot \frac{(1+0,11)^{20} - 1}{0,11}$$

$$\Downarrow$$

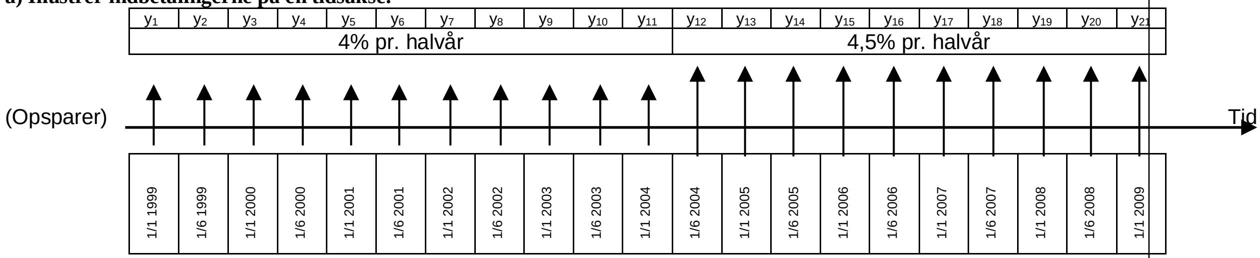
$$64.202,82 = 64.202,82 \qquad Q.E.D$$

Ø7 p. 299

Hvor meget skal indsættes hvert år, hvis der efter 10 indbetalinger med renter og renters rente er opsparet 32.594,63 kr., og renten er 8% p.a.? $y = \underline{\underline{2250,00\text{ kr.}}}$

Ø10 p. 299

a) Illustrér indbetalingerne på en tidsakse.



b) Hvor mange ydelser betales der indtil og med 1/1 2004, og hvor mange ydelser betales derefter?

Der betales (Se tidsaksen) 11 ydelser til og med 1/1 2004 og 10 ydelser derefter.

c) Hvor meget er der opsparet på kontoen efter sidste ydelse?

Sammenlagt giver de to resultater: 104.719,45 + 61.441,05 = <u>166.160,51 kr.</u>

Ø11 p. 299

Kontrollér disse resultater:

r = 3,00% $An = \underline{\underline{60.533,79 \text{ kr.}}}$

r = 3,50% $An = \underline{\underline{65.943,06 \text{ kr.}}}$

r = 4,00% $An = \underline{\underline{71.814,95 \text{ kr.}}}$

r = 5,50% $An = \underline{\underline{92.598,26 \text{ kr.}}}$

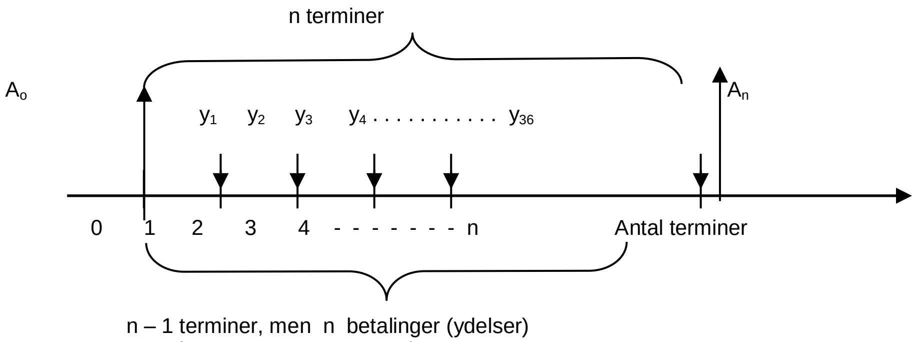
Kapitel 11.4 – Nutidsværdi af en annuitet

Ø1 **p. 302**

Hvor stort et lån kan optages? $A_0 = \underline{\underline{61.251,38 \text{ kr.}}}$

Ø2 **p. 302**

a) Illustrér beløbene på en tidsakse.



b) Hvor meget koster bilen kontant, når renten er 0,75% pr. måned? 109.670,73 + 40.000,00 = 149.670,73 kr.

Ø3 **p. 302**

a) Vis, at den effektive rente ved et billån med variabel rente med 20% udbetaling er 0,7055% pr. måned.

100.000 – 20.000 = 80.000 kr.

5 * 12 = 60 terminer

60 * 1.640 = 98.400 kr.

Bilens pris 98.400 + 20.000 = 118.400 kr.

118.400 / 60 =

Ø4 **p. 303**

En pensionist har den 1. januar 1999 opsparet 1.000.000 kr. på en pensionskonto, hvor renten er 7% p.a. Opsparingen udbetales i form af et fast årligt beløb på 150.000 kr.; første gang den 1. januar 2000

Kapitel 11 – Opgaver

Opgave 1 **p. 374**

Hvor meget er beløbet vokset til efter henholdsvis 10 og 15 år?

$K_{10} = \underline{\underline{3.023,81 \text{ kr.}}}$

$K_{15} = \underline{\underline{3.505,43 \text{ kr.}}}$

Finansregning

Opgave 2 **p. 374**

Hvor meget kan personen hæve på sin 60 års fødselsdag? $K_{10} = \underline{\underline{62.539,63 \text{ kr.}}}$

Opgave 3 **p. 374**

a) Hvis renten tilskrives helårligt? $K_{10} = \underline{\underline{14.802,44 \text{ kr.}}}$

b) Hvis renten tilskrives halvårligt? $K_{20} = \underline{\underline{14.859,47 \text{ kr.}}}$

c) Hvis renten tilskrives kvartårligt? $K_{40} = \underline{\underline{14.888,64 \text{ kr.}}}$

d) Bestem fordoblingstiden i år i spørgsmål a) til c).

$T_{2A} = \frac{\text{Ln}(2)}{\text{Ln}(a)} = \frac{\text{Ln}(2)}{\text{Ln}(1{,}04)} = \underline{\underline{17{,}67 \text{ år}}}$ $T_{2B} = \frac{\text{Ln}(2)}{\text{Ln}(a)} = \frac{\text{Ln}(2)}{\text{Ln}(1{,}02)} = \underline{\underline{35{,}01 \text{ halvår} \approx 17{,}5 \text{ år}}}$ $T_{2C} = \frac{\text{Ln}(2)}{\text{Ln}(a)} = \frac{\text{Ln}(2)}{\text{Ln}(1{,}01)} = \underline{\underline{69{,}66 \text{ kvartaler} \approx 17{,}42 \text{ år}}}$

Opgave 4 **p. 374**

Hvor meget lånte den studerende den 1/8 1993? $K_0 = \underline{\underline{19.223,35 \text{ kr.}}}$

Opgave 5 **p. 374**

a) Hvad var saldoen på kontoen 1/1 1995? $K_0 = \underline{\underline{14.881,88 \text{ kr.}}}$

b) Hvad var saldoen, når renten 1/1 1997 ændredes fra 3% pr. halvår til 2% pr. halvår? $K_0 = \underline{\underline{15.779,02 \text{ kr.}}}$

Opgave 6 **p. 374**

Bestem rentefoden p.a. $r = \underline{\underline{0{,}0742 \approx 7{,}42\%}}$

Opgave 7 **p. 374**

a+b) Hvor meget vokser 10000 kr. til på 5 år?

$r = \underline{\underline{0{,}0329 \approx 3{,}29\%}}$

$K_5 = \underline{\underline{11.759,37 \text{ kr.}}}$

Opgave 8 **p. 374**

a) Helårlig rentetilskrivning? $n = 9{,}67 \text{ år} \approx \underline{\underline{10 \text{ år}}}$

b) Halvårlig rentetilskrivning? $n = 19{,}03 \text{ halvår} \approx \underline{\underline{10 \text{ år}}}$

c) Kvartårlig rentetilskrivning? $n = 37{,}83 \text{ kvartaler} \approx \underline{\underline{9{,}5 \text{ år}}}$

Opgave 9 **p. 374**

a) 1% pr. måned? $i = 0{,}1268 = \underline{\underline{12{,}68\%}}$

b) 3% pr. kvartal? $i = 0{,}1255 = \underline{\underline{12{,}55\%}}$

c) 6% pr. halvår? $i = 0{,}1236 = \underline{\underline{12{,}36\%}}$

Opgave 10 **p. 374**

a) Beregn den effektive rente p.a. på forhandlerens billån. $i = 0{,}0617 = \underline{\underline{6{,}17\%}}$

b) Beregn den effektive rente p.a. på bankens tilbud. $i = 0{,}05927 = \underline{\underline{5{,}93\%}}$

c) Hvilket lån skal det unge par vælge? Banklånet er det billigste!

Opgave 11 **p. 375**

Bestem saldoen på kontoen efter henholdsvis 10 og 15 indbetalinger.

$A_{10} = \underline{\underline{34.391,64 \text{ kr.}}}$

$A_{15} = \underline{\underline{55.796,74 \text{ kr.}}}$

Opgave 12 **p. 375**

Hvor meget er der opsparet efter sidste indbetaling? Sammenlagt giver de to resultater: 90.472,86 + 65.247,94 = 155.720,81 kr.

Opgave 13 **p. 375**

Gennem hvor mange år skal man indsætte 10.000 kr. pr. år for at saldoen på kontoen overstiger 100.000 kr. når renten er 5% p.a.

$n = 8{,}31 \approx \underline{\underline{9}} \text{ år.}$

Opgave 14 **p. 375**

Bestem rentefoden pr. halvår.
Ved at índtaste på en finanslommeregner, finder man frem til at renten p. halvår = 4,5%

Opgave 15 **p. 375**

Hvor meget står der på kontoen umiddelbart efter indbetalingen på sønnens 18 års fødselsdag?

Total: 8.666,12+13.452,62+11.057,07 = 31.137,31