MATEMATIK

NOTAT 23

KÆDEREGLEN

AF:

CAND. POLYT.

MICHEL MANDIX

SIDSTE REVISION: NOVEMBER 2024

Oversigt over græske bogstaver:

Kapitaler	Minuskler	Navn
Α	α	Alfa
Γ	γ	Gamma
Ε	ε	Epsilon
Η	η	Eta
Ι	ι	Jota
Λ	λ	Lambda
Ν	ν	Ny
Ο	o	Omikron
Ρ	ρ	Rho
Τ	τ	Tau
Φ	φ	Phi
Ψ	ψ	Psi

Kapitaler	Minuskler	Navn
Β	β	Beta
Δ	δ	Delta
Ζ	ζ	Zeta
Θ	θ	Theta
Κ	κ	Kappa
Μ	μ	My
Ξ	ξ	Xi
Π	π	Pi
Σ	σ	Sigma
ϒ	υ	Ypsilon
Χ	χ	Chi
Ω	ω	Omega

Indholdsfortegnelse:

Notation for differentialkvotient:

Notat om kædereglen (Differentiation af en sammensat funktion)

Først og fremmest er det vigtigt at se på, hvordan resultatet af denne operation – dvs. differentialkvotienten – forstås og skrives:

Indtil videre er skrivemåden: $f'(x)$ ("f mærke") benyttet, hvor mærket indikerer, at der er tale om den afledte funktion – nemlig differentialkvotienten.

Dog er der mange forskellige måder, hvorpå man kan notere dette … Nogle af disse er designet ud fra den betragtning at $f(x) = y$.

Således er givet: $f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}$. Der findes flere endnu, men disse fire notationer er dem, som bliver beskrevet i nærværende notat.

$f'(x)$ betyder, at det er differentialkvotienten af funktionen *f*, givet ved variablen *x* (og i øvrigt differentieret mht. *x*). Det giver vel sig selv, at hvis man arbejder med f.eks. en omkostningsfunktion, *C*(*x*), så ville differentialkvotienten hedde $C'(x)$.
Arbejder man med en funktion, som beskriver hastigheden *v* som funktion af tiden *t*, så vil differentialkvotienten skrives som: $v'(t)$ etc.

y' eller $y'(x)$ er fuldstændig samme situation som beskrevet ovenfor, men i stedet for $f(x)$ skrives *y* – (eller $y'(x)$.

$\frac{d}{dx}$ bruges, når man skal differentiere noget, som ikke er et funktionsudtryk, men blot et simpelt udtryk.
F.eks. hvis man har en funktion, $f(x) = 3x - 5$, så er $f'(x) = 3$. Men hvad nu hvis spørgsmålet er: "Differentier $3x - 5$". Så er det jo ikke et egentligt funktionsudtryk. Så kan man i stedet skrive:
$\frac{d}{dx}(3x - 5) = 3$. Så er der ikke brug for, at det er givet som et funktionsudtryk.

$\frac{dy}{dx}$ er en anden måde at skrive differentialkvotienten på. Det er en god notation, for den kan oversættes med: "Funktionen *y* differentieret mht. *x*".
Her er oplysningerne givet i notationen: $\frac{dy}{dx}$ = Funktionen *y* differentieret mht. *x*. Igen skal det huskes, at funktionen $f(x)$ er det samme som *y*.

Ser man på eksemplet fra tidligere med hastighedsfunktionen vil den, med denne notation være: $\frac{dv}{dt}$, da det er hastighedsfunktionen *v* differentieret mht. tiden – dvs. variablen *t*.

Så meget for navngivningen. Det bør dog være indlysende, at det er meget vigtigt at have styr på, hvilken funktion der skal differentieres mht. hvilken variabel. Der kan jo også sagtens være en situation, hvor der er mere end én variabel i funktionen, og så skulle der helst ikke være tvivl om hvad der differentieres mht. Dette fænomen – altså hvor man kun differentierer mht. en af flere variable – kaldes partiel differentiation, og beskrives i et senere notat.

Ydermere er det vigtigt at forstå skrivemåden $\frac{dy}{dx}$, da det bliver en essentiel del af beviset for differentiation af den sammensatte funktion.

Sammensat funktion:

Nu, hvor notationen er på plads, fortsættes med beskrivelsen af, hvad en sammensat funktion er.

En sammensat funktion er en funktion, hvor argumentet er en anden funktion.

F.eks. er det nemt nok at tage kvadratroden af *x*, men hvis man skal tage kvadratroden af 2*x*, er det nødvendigt først at udregne de 2 gange *x*, inden man kan udregne kvadratroden af det.

Så $f(x)=\sqrt{x}$ er en "almindelig" funktion, hvorimod $f(x)=\sqrt{2x}$ er en sammensat funktion.

Man taler om den "indre funktion" og den "ydre funktion". Den indre funktion er det, som skal bestemmes først. I ovenstående eksempel er det derfor "2*x*", som er den indre funktion. Den ydre funktion er at man skal beregne kvadratroden af "noget". Dette er en tankegang, som det godt kan betale sig at blive fortrolig med, da man ofte skal beregne "noget" før man kan gøre noget andet.

For at blive i det ovenstående eksempel, er "2*x*" den indre funktion, mens " $\sqrt{noget}$ " er den ydre funktion. "*noget*" er naturligvis i dette tilfælde lig med de 2*x*.

For at få styr på, hvad der er indre og ydre funktioner, indføres et begreb, som kaldes *substitution* (som betyder udskiftning).
Det kan øge overskueligheden at omdøbe den indre funktion til *u* eller måske endda til $u(x)$.
På den måde er det nemt at differentiere den ydre funktion, for så er der ikke noget, som "forstyrrer" udtrykket.

Tages der udgangspunkt i det ovenstående eksempel, $f(x)=\sqrt{2x}$, så er den indre funktion lig med 2*x*.

De 2*x* substitueres derfor med funktionsudtrykket: $u(x)$. Følgelig er da $u(x)=2x$. Det bemærkes, at man jo siger: "Funktionen *u*, som en funktion af (variablen) *x*". Og derfor er variablen *x* indeholdt i den indre funktion.

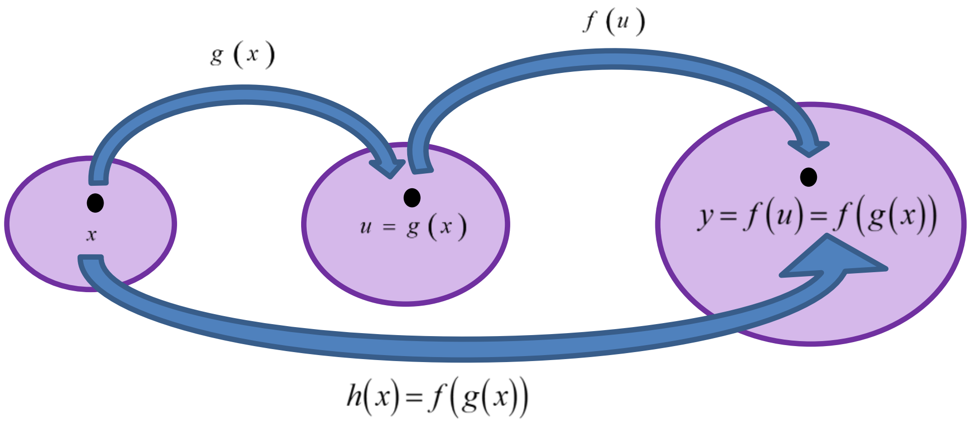
Det er derfor givet at: $f(x)=\sqrt{2x}=\sqrt{u}$
Det er allerede etableret, at en sammensat funktion består af en indre funktion og en ydre funktion. Det er ideen, at *x* indsættes i den indre funktion, og at resultatet af dette derefter indsættes i den ydre funktion.

Resultatet af alt dette er, at man får den sammensatte funktionsværdi af *x*.

I de fleste bøger, notater og opslagsværker, ses ofte følgende navngivninger:

Det initielle funktionsudtryk:	$h(x) = f(g(x))$
Den indre funktion:	$u = g(x)$
Den ydre funktion:	$h(x) = y = f(u)$

Den sammensatte funktion, $h(x)$, er da defineret således, som vist på nedenstående figur:



Opgave 100:

Der skal dannes en sammensat funktion, $h(x) = f(g(x))$, hvor

$$u = g(x) = 2x - 1 \quad \text{og} \quad y = f(u) = \sqrt{u}$$

a) Udregn $h(1)$, $h(5)$ og $h(13)$ ved at begynde med at udregne $g(1)$, $g(5)$ og $g(13)$ og derefter at indsætte disse tal i funktionen $f(u)$ i stedet for *u*.

b) Opstil et udtryk for $h(x)$.

c) Opskriv definitionsmængden, $Dm(h)$ for $h(x)$.

Kædereglen

Opgave 101:

Betragt den sammensatte funktion: $h(x) = (3x+1)^2$

a) Opskriv en forskrift for den indre funktion $g(x)$

b) Opskriv en forskrift for den ydre funktion $f(u)$

c) Udregn parentesen i anden i den sammensatte funktion ovenfor, og bestem herefter den afledede funktion $h'(x)$

d) Beregn så $h(0)$, $h(1)$ og $h(5)$

Teorien om kædereglen:

For et kort øjeblik rettes blikket igen mod teorien om sekantmetoden. Det erindres, at man på et tidspunkt beregner hældningen af en vilkårlig sekant, differenskvotienten. Denne skrives som: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ og kan forklares som den lodrette funktionstilvækst divideret med den vandrette funktionstilvækst mellem de to punkter *P* og *Q* på grafen.

Nogle vil holde stejlt på, at $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ er et fast udtryk, som ikke kan ændres (skilles ad), men da det gøres i flere matematikbøger og artikler, ses der i dette notat ikke på $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ som et fast udtryk, men derimod mere som en helt normal brøk med Δy i tælleren og Δx i nævneren.

Idet det antages at $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ er en almindelig brøk, kan den multipliceres med en konstant.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot k$$

Lad denne konstant være lig med 1

$$=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot 1$$

Ethvert tal divideret med sig selv er lig med 1

Derfor er $\frac{\Delta u}{\Delta u}=1$

$$=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

Da multiplikation er kommutativt $(a\cdot b=b\cdot a)$ og da produktet af to brøker er lig med tællernes produkt divideret med produktet af nævnerne $\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\right)$, fås:

$$=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Konklusionen er, at $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$

Fra Sekantmetoden erindres det, at differentialkvotienten, $f'(x)$, var resultatet af at lade $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ gå imod 0.

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Det viser sig, at når $\Delta x\to 0$, så vil hhv. $\Delta y\to 0$ og $\Delta u\to 0$.

At $\Delta y\to 0$ er måske indlysende. Se på grafen i sekantmodellen. Når $\Delta x\to 0$ dvs. når den vandrette afstand mellem de to punkter bliver mindre og mindre, så ender det jo også med, at den lodrette afstand bliver mindre og mindre, når punktet *Q* nærmer sig punktet *P*. Man siger også at Δy *konvergerer* (nærmer sig) – dvs. at den rent faktisk har en grænseværdi, som ikke er $\pm\infty$.

At $\Delta u\to 0$ er en helt analog følgeslutning, da $\Delta y\to 0$.

Kædereglen

Således kan udtrykket $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$ udvides til: $\underline{\underline{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}}$

Sammenholdes dette resultat med skrivemåden for en differentialkvotient, kan man udlede følgende:

”Differentialkvotienten for den sammensatte funktion, $f(x)$ er lig med funktionen y (= $f(x)$) differentieret mht. variablen u – multipliceret med funktionen $u(x)$ differentieret mht. variablen x”.

Det erindres, at $u(x)$ var den funktion, som erstattede den indre funktion.

Så … hvis funktionen som skal differentieres er $f(x) = \sqrt{2x}$, gøres det som følger:

$$f(x) = \sqrt{2x}$$

Det indses, at der er tale om en sammensat funktion, så den indre funktion substitueres med $u(x)$.

$$u(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad u'(x) = 2$$

$\boxed{\text{Det betyder at } y = f(u) = \sqrt{u} \quad \text{og} \quad u(x) = 2x}$

$$f'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$$

Så $f(u)$ differentieres mht. u.

$$f(u) = \sqrt{u} \quad \Rightarrow \quad f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

Nu kendes alle størrelser der skal til, for at udregne den endelige differentialkvotient:

$$f'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(u) \cdot g'(x)$$

$\Downarrow$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{u}}$$

$\Downarrow$ Der substitueres tilbage (Navnet $"u"$ var kun på lånt tid).

$$\underline{\underline{f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}}}$$

I praksis gøres det noget hurtigere, og med lidt øvelse behøver man ikke tænke så meget over tingene undervejs.
Lav evt. en ”remse”, som er personlig og let at huske – f.eks. ”Den ydre differentieret med den indre intakt, ganget med differentialkvotienten af den indre.” Eller noget endnu bedre.

Eksempler:

Eksempel 01

Givet funktionen: $h(x)=(2x-1)^3$

$u(x)=2x-1 \qquad \Rightarrow \qquad u'(x)=2$

$\boxed{\text{Det betyder at } y=f(u)=u^3,\quad f'(u)=3u^2,\quad g(x)=u(x)=2x-1 \quad \text{og} \quad g'(x)=u'(x)=2}$

$$f'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)=f'(u(x))\cdot u'(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$h'(x)=3u^2\cdot 2$$
$$\Updownarrow$$
$$h'(x)=3(2x-1)^2\cdot 2$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{h'(x)=6(2x-1)^2}}$$

Eksempel 02

Bestem differentialkvotienten af funktionen: $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^3+2}}$.

Først omskrives udtrykket til noget, som kan arbejdes med: $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^3+2}}=(x^3+2)^{-\frac{1}{2}}$.

Til dette er benyttet "klassikerne": $\boxed{\dfrac{1}{a^n}=a^{-n}}$ og $\boxed{\sqrt[n]{a^p}=a^{\frac{p}{n}}}$ $\left(\text{Specielt: } \boxed{\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}}\right)$

$u(x)=x^3+2 \qquad \Rightarrow \qquad u'(x)=3x^2$

$\boxed{\text{Det betyder at } y=f(u)=u^{-\frac{1}{2}},\quad f'(u)=-\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}},\quad g(x)=u(x)=x^3+2 \quad \text{og} \quad g'(x)=u'(x)=3x^2}$

$$h'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)=f'(u(x))\cdot u'(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$h'(x)=-\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}\cdot 3x^2$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{h'(x)=-\frac{3}{2}(x^3+2)^{-\frac{3}{2}}\cdot x^2}}$$

Opgave 102:

a) Beregn den afledede funktion $h'(x)$ for den funktion, der optræder i opgave 100.
b) Beregn $h'(1)$, $h'(5)$ og $h'(13)$.

Opgave 103:

a) Beregn – nu vha. kædereglen – den afledede funktion $h'(x)$ for den funktion, der optræder i opgave 101.
b) Beregn $h'(0)$, $h'(1)$ og $h'(5)$.
c) Sammenlign disse resultater med resultaterne fra opgave 101.

Opgave 104:

a) Beregn den afledede funktion af $h(x)=(10x-3)^7$.
b) Beregn den afledede funktion af $h(x)=\dfrac{1}{3x-2}$ og herefter $h'(1)$.

Opgaver:

Øvelse 01:

Differentier følgende sammensatte funktioner:

a)	$f(x)=(7+3x^2)^5$
b)	$f(x)=(2+4x^2-9x^3)^4$
c)	$f(x)=\dfrac{1}{(5x-3)^3}$
d)	$f(x)=\dfrac{5}{\sqrt{3-x}}$
… og lidt sværere (Dobbelt sammensatte funktioner)	
e)	$f(x)=(2-\sqrt{x+1})^3$
f)	$f(x)=3\cdot\sqrt{(1-x^2)^5}$

Bevis for kædereglen vha. sekantmetoden:

Det initielle funktionsudtryk: $h(x) = f(g(x))$

Den indre funktion: $u = g(x)$

Den ydre funktion: $h(x) = y = f(u)$

Trin 1 – Funktionstilvæksten i funktionen $g(x)$ (Den indre funktion):

$\Delta u = \Delta g = g(x+\Delta x) - g(x)$

… men den ydre funktion har en tilsvarende funktionstilvækst:

$\Delta y = \Delta f = f(u+\Delta u) - f(u)$, hvor Δu netop er beregnet

Det forudsættes, at funktionen $g(x)$ er differentiabel i x, så: $\frac{\Delta g}{\Delta x} \to g'(x)$ når $\Delta x \to 0$,

Og at $\frac{\Delta f}{\Delta u} \to f'(u)$ når $\Delta u \to 0$

Trin 2 – Differenskvotienten beregnes:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x}$$

Dette er differenskvotienten for den sammensatte funktion, $h(x)$, hvorfor den også kan betegnes med $\frac{\Delta h}{\Delta x}$.

Dette betyder derfor også, at differenskvotienten kan omskrives til:

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x},$$

Hvilket jo – på baggrund af det indledende kapitel i dette afsnit betyder:

Differentialkvotienten af funktionen *h* er lig med differentialkvotienten af funktionen *f* differentieret mht. *u*, multipliceret med differentialkvotienten a funktionen *g*, differentieret mht. *x*.

Eller på matematisk form:

Givet den sammensatte funktion, $h(x) = f(g(x))$.

Da er differentialkvotienten lig med: $\underline{\underline{h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)}}$

Opgave 100: Løsning

Der skal dannes en sammensat funktion, $h(x) = f(g(x))$, hvor

$$u = g(x) = 2x - 1 \qquad \text{og} \qquad y = f(u) = \sqrt{u}$$

d) Udregn $h(1)$, $h(5)$ og $h(13)$ ved at begynde med at udregne $g(1)$, $g(5)$ og $g(13)$ og derefter at indsætte disse tal i funktionen $f(u)$ i stedet for u.

$g(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = \underline{g(1) \Leftrightarrow 1}$ $\qquad h(1) = \sqrt{1} \Leftrightarrow \underline{\underline{h(1) = 1}}$

$g(5) = 2 \cdot 5 - 1 = 10 - 1 = \underline{g(1) \Leftrightarrow 9}$ $\qquad h(9) = \sqrt{9} \Leftrightarrow \underline{\underline{h(1) = 3}}$

$g(13) = 2 \cdot 13 - 1 = 26 - 1 = \underline{g(13) \Leftrightarrow 25}$ $\qquad h(25) = \sqrt{25} \Leftrightarrow \underline{\underline{h(25) = 5}}$

e) Opstil et udtryk for $h(x)$.

$\underline{\underline{h(x) = \sqrt{2x - 1}}}$

f) Opskriv definitionsmængden, $Dm(h)$ for $h(x)$.

$$2x - 1 \geq 0$$
$$\Updownarrow$$
$$2x \geq 1$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{x \geq \frac{1}{2}}$$

$$\underline{\underline{Dm(h) = \left[\frac{1}{2}; \infty\right[}}$$