MATEMATIK

NOTAT

MATEMATISKE BEVISER

AF:

CAND. POLYT.

MICHEL MANDIX

SIDSTE REVISION: AUGUST 2017

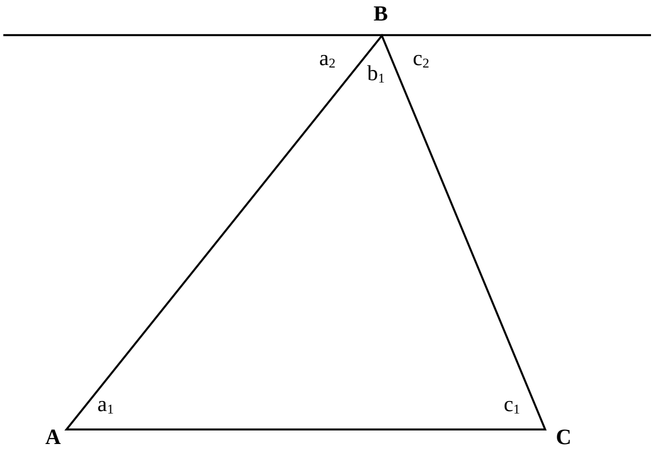
Indholdsfortegnelse:

01 - En trekants vinkelsum

Det ønskes bevist, at vinkelsummen i en trekant – altså værdierne af de tre vinkler i en trekant lagt sammen er 180°. Eller matematisk skrevet: $\sum_{i=1}^{3} v_i = v_1 + v_2 + v_3 = 180°$.

Dette kan ses af nedenstående figur. Husk at en fuld cirkel er defineret som 360°, og derfor er vinklen i en halvcirkel – f.eks. fra det yderste punkt til højre på cirklen og det yderste punkt til venstre – lig med 180°, da man i udgangspunktet står i cirklens centrum.

Med andre ord: ”Hvis man står på en ret linie, så er der to retninger man kan følge linien. Enten den ene eller den anden vej. Og vinklen mellem de to retninger – som er modsat rettede – er 180°.”



Idet linjen tegnes gennem pkt. B, som er parallel med linien AC,
ses det, da to modsat rettede retninger har vinklen 180°, at:

$$\measuredangle a_2 + \measuredangle b_1 + \measuredangle c_2 = 180°$$

Samtidig ved vi, at:

$$\measuredangle a_1 = \measuredangle a_2 \text{ og } \measuredangle c_1 = \measuredangle c_2$$

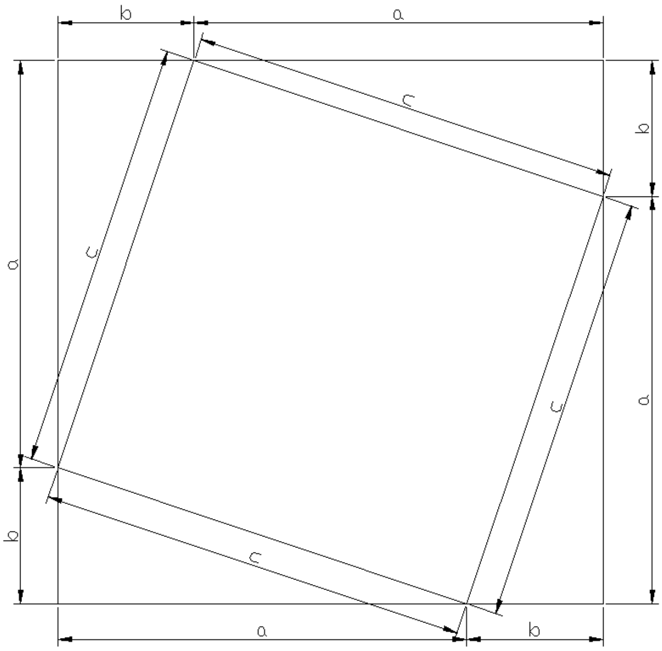
Ved simpel substitution, fås at:

$$\sum_{i=1}^{3} V_i = V_1 + V_2 + V_3 = \measuredangle a_1 + \measuredangle b_1 + \measuredangle c_1 = 180°,$$

hvorved sætningen er bevist!

Q.E.D.

02 - Pythagoras' læresætning



Det ønskes bevist, at grundformlen for Pythagoras' læresætning er: $c^2 = a^2 + b^2$!

Det ses umiddelbart at arealet af det inderste kvadrat er lig med:

$$\underline{A_{Lille\,Kvadrat} = c^2}$$

Ligeledes findes arealet af det store kvadrat:

$$A_{Stor\,Kvadrat} = (a+b)^2$$

$\Updownarrow$ Kvadratsætningerne

$$\underline{A_{Stor\,Kvadrat} = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b}$$

Der er fire trekanter. En i hvert hjørne.

Arealet af en enkelt trekant beregnes som:

$$A_{Trekant} = \frac{1}{2} \cdot Højde \cdot Grundlinie$$

$\Updownarrow$

$$\underline{A_{Trekant} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b}$$

Men der er jo som sagt fire trekanter, og deres samlede areal er:

$$A_{AlleTrekanter} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$

$\Updownarrow$

$$\underline{A_{AlleTrekanter} = 2 \cdot a \cdot b}$$

Så arealet af det lille kvadrat kan vel også skrives som arealet af det store kvadrat minus arealet af de fire trekanter. Tænk blot på, at tegne det store kvadrat og klippe de fire små trekanter fra. Tilbage sidder man med det lille kvadrat.

$$A_{LilleKvadrat} = A_{StorKvadrat} - A_{AlleTrekanter}$$

$\Updownarrow$

$$A_{LilleKvadrat} = a^2 + b^2 \cancel{+2 \cdot a \cdot b} \cancel{-2 \cdot a \cdot b}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{A_{LilleKvadrat} = a^2 + b^2}$$

Nu er det konkluderet, at arealet af det lille kvadrat er lig med c^2 , men tidligere er det også beregnet, at arealet af det lille kvadrat er lig med $a^2 + b^2$.

Da det er det samme kvadrat er $\underline{\underline{c^2 = a^2 + b^2}}$

Q.E.D.

Husk, at Pythagoras' Læresætning KUN gælder for retvinklede trekanter!!!

Pythagoras' Læresætning er igennem tiderne blevet bevist på mindst 365 forskellige måder. Det er nemt at huske… Det er en ny bevisførelse for hver dag i året…
De forskellige beviser kan læses i denne bog, hvis man vil dedikere resten af sit liv til Pythagoras…
Loomis, Elisha Scott (1968), The Pythagorean Proposition, The National Council of Teachers of Mathematics.

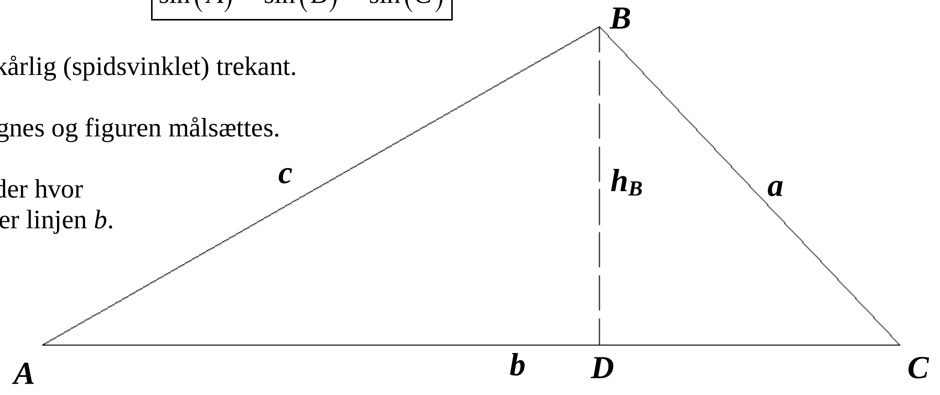
03 - Sinusrelationen

Følgende sætning ønskes bevist: $\boxed{\dfrac{a}{\sin(A)}=\dfrac{b}{\sin(B)}=\dfrac{c}{\sin(C)}}$

Først tegnes en vilkårlig (spidsvinklet) trekant.

Højden fra *B* indtegnes og figuren målsættes.

Punkt *D* indføres, der hvor højden fra *B* rammer linjen *b*.



Som det ses, inddeler højden fra pkt. *B*, h_B, den vilkårlige trekant i to retvinklede trekanter.

Hvis den ”venstre” retvinklede trekant, trekant *ABD* betragtes, opstilles følgende ligning med de sædvanlige ”værktøjer” for den retvinklede trekant:

$$\sin(A)=\frac{\text{Modstående Katete}}{\text{Hypotenusen}}=\frac{h_B}{c}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{h_B=c\cdot\sin(A)}$$

Tilsvarende betragtes den ”højre” retvinklede trekant, trekant *BCD*, og der fremkommer et lignende udtryk:

$$\sin(C)=\frac{\text{Modstående Katete}}{\text{Hypotenusen}}=\frac{h_B}{a}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{h_B=a\cdot\sin(C)}$$

Det er den samme h_B i de to ligninger. Der er jo ikke tegnet en ny trekant i mellemtiden. Derfor kan følgende skrives:

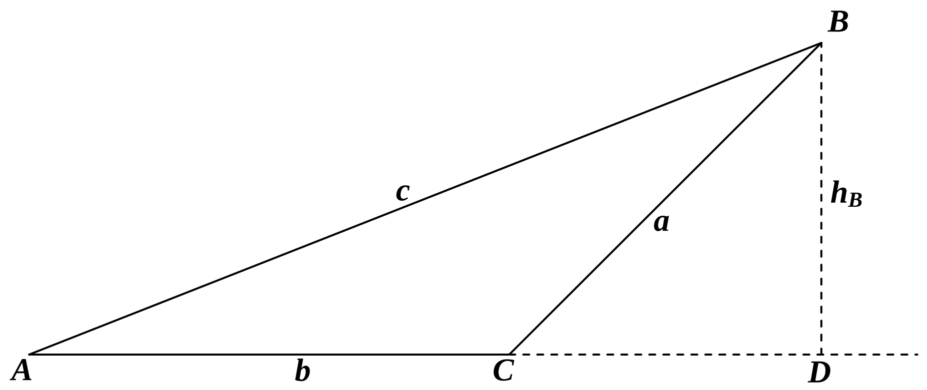
$$c\cdot\sin(A)=a\cdot\sin(C)$$
$$\Updownarrow \qquad \text{Almindelig division giver:}$$
$$\frac{c}{\sin(C)}=\frac{a}{\sin(A)}$$

Det er ganske vist kun en del af sinusrelationen (den hedder jo egentlig: $\dfrac{a}{\sin(A)}=\dfrac{b}{\sin(B)}=\dfrac{c}{\sin(C)}$), men resten kan nemt indses ved at tegne højden fra enten pkt. *A* eller pkt. *C*, og så køre beviset igen. (I princippet, kan man blot nøjes med at ændre navnene på trekantens hjørner og køre beviset igen. Da kan man undlade at ”dreje” hele figuren og tegne nye højder…)

Q.E.D.

Hvad nu hvis trekanten er stumpvinklet i stedet for spidsvinklet?

Det viser sig, at beviset er fuldstændig analogt med det allerede viste bevis for den spidsvinklede trekant:



Som det ses, danner højden fra pkt. *B* den vilkårlige trekant to retvinklede trekanter, *ABD* og *BCD*.

Hvis den ”venstre” retvinklede trekant, trekant *ABD*, betragtes, opstilles følgende ligning med de sædvanlige ”værktøjer” for den retvinklede trekant:

$$\sin(A) = \frac{\text{Modstående Katete}}{\text{Hypotenusen}} = \frac{h_B}{c}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{h_B = c \cdot \sin(A)}$$

Og betragtes tilsvarende den ”højre” retvinklede trekant, trekant *BCD*, fås et lignende udtryk:

$$\sin(C) = \frac{\text{Modstående Katete}}{\text{Hypotenusen}} = \frac{h_B}{a}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{h_B = a \cdot \sin(C)}$$

Det er den samme h_B i de to ligninger. Der er jo ikke tegnet en ny trekant i mellemtiden. Derfor kan følgende skrives:

$$c \cdot \sin(A) = a \cdot \sin(C)$$
$$\Updownarrow \qquad \text{Almindelig division giver:}$$
$$\frac{c}{\sin(C)} = \frac{a}{\sin(A)}$$

Det er ganske vist kun en del af sinusrelationen (den hedder jo egentlig: $\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$), men resten kan nemt indses ved at tegne højden fra enten pkt. A eller pkt. C, og så køre beviset igen. (I princippet, kan man blot nøjes med at ændre navnene på trekantens hjørner og køre beviset igen. Da kan man undlade at ”dreje” hele figuren og tegne nye højder…)

Q.E.D.

04 - Cosinusrelationerne

Der ønskes bevist følgende sætninger:

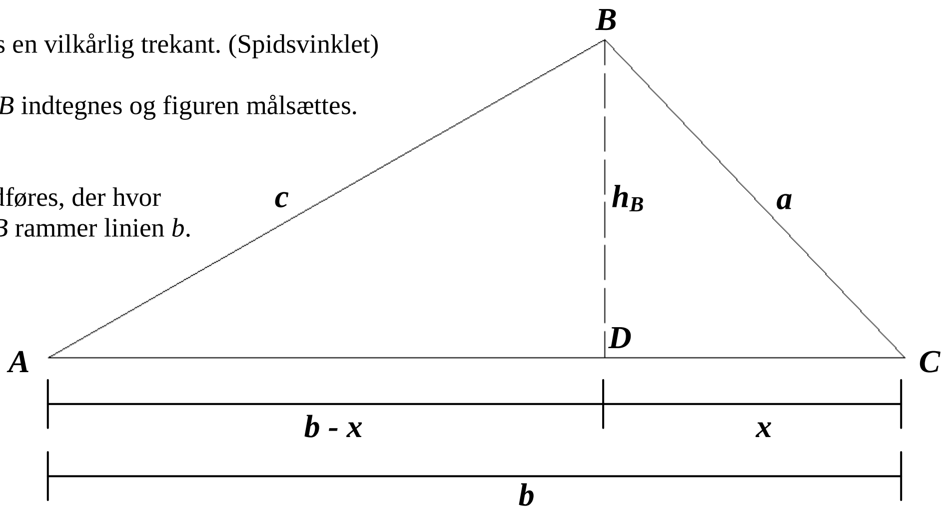
$$\begin{array}{|lcl|}\hline a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos(A) & \Leftrightarrow & \cos(A) = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c} \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot\cos(B) & \Leftrightarrow & \cos(B) = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2\cdot a\cdot c} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos(C) & \Leftrightarrow & \cos(C) = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b} \\ \hline\end{array},$$

der jo tilsammen udgør cosinusrelationerne…

Først tegnes en vilkårlig trekant. (Spidsvinklet)

Højden fra *B* indtegnes og figuren målsættes.

Punkt *D* indføres, der hvor højden fra *B* rammer linien *b*.



Som det ses, inddeler højden fra pkt. *B* den vilkårlige trekant i to retvinklede trekanter.

Ser man på den "venstre" retvinklede trekant, trekant *ABD*, kan man opstille følgende ligning med de sædvanlige "værktøjer" for den retvinklede trekant – i dette tilfælde: Pythagoras' Læresætning:

$$c^2 = {h_B}^2 + (x-b)^2$$

$\Updownarrow$ Ser man nøje efter, er det blot Pythagoras' Læresætning.

Derefter bruges kvadratsætningerne til at rydde op...

$$c^2 = {h_B}^2 + \left(x^2 + b^2 - 2\cdot x\cdot b\right)$$

$\Updownarrow$ Parentesen hæves...

$$\underline{c^2 = {h_B}^2 + x^2 + b^2 - 2\cdot x\cdot b}$$

Og betragtes tilsvarende den "højre" retvinklede trekant, trekant *BCD*, fås et lignende udtryk:

$$a^2 = {h_B}^2 + x^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{{h_B}^2 = a^2 - x^2}$$

Resultatet af den seneste udregning, $h_B{}^2$, indsættes i den første udregning:

$$c^2 = h_B{}^2 + x^2 + b^2 - 2 \cdot x \cdot b$$

$\Updownarrow$ Udtrykket for $h_B{}^2$ indsættes

$$c^2 = a^2 \cancel{- x^2} \cancel{+ x^2} + b^2 - 2 \cdot x \cdot b$$

$\Updownarrow$ Og der ryddes op...

$$\underline{c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot x \cdot b}$$

Det eneste problem er dog nu, at 'x' ikke er kendt! Men vha. de 'gamle' regneregler for den retvinklede trekant, kan 'x' nemt findes… Se blot på tegningen igen, og betragt specielt trekanten *BCD*. Her gælder:

$$\cos(v) = \frac{\text{Hosliggende Katete}}{\text{Hypotenusen}}$$

$\Updownarrow$

$$\cos(C) = \frac{x}{a}$$

$\Updownarrow$

$\underline{x = a \cdot \cos(C)}$, hvilket indsættes i den forrige udregning ...

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot x \cdot b$$

$\Updownarrow$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot \cos(C) \cdot b$$

$\Updownarrow$ Og hvis der ændres lidt på faktorernes rækkefølge...

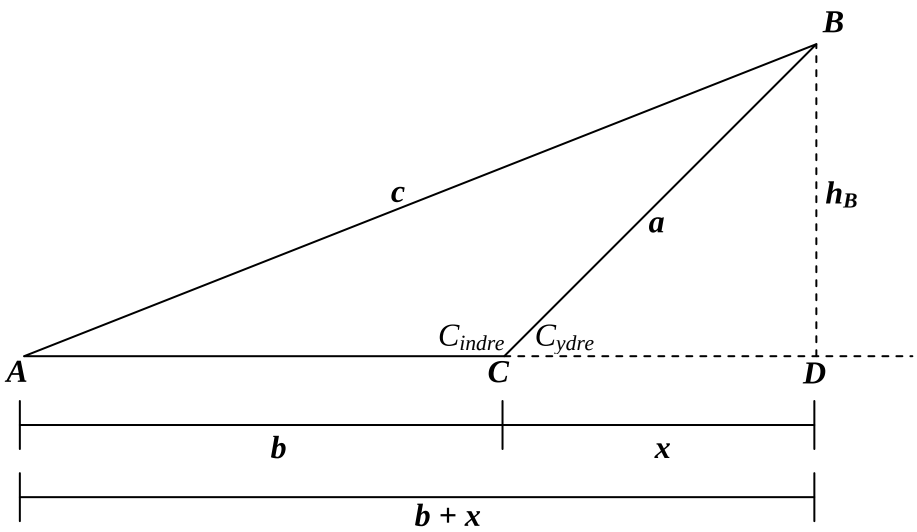
$$\underline{\underline{c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(C)}}$$

Det ses, at resultatet er den ene af ligningerne i det, som tidligere blev præsenteret som ”cosinusrelationerne”, men resten kan nemt indses – som det var tilfældet ved sinusrelationen – ved at tegne højden fra enten pkt. *A* eller pkt. *C*, og så køre beviset igen. (I princippet, kan man blot nøjes med at ændre navnene på trekantens hjørner og køre beviset igen. Da kan man undlade at ”dreje” hele figuren og tegne nye højder…)

Q.E.D.

Men hvad nu hvis trekanten er stumpvinklet i stedet for spidsvinklet?

Det viser sig, at beviset er stort set analogt med det allerede viste bevis for den spidsvinklede trekant, men dog med en lille krølle! Den beskrives senere:



Som det ses, danner højden fra pkt. *B* den vilkårlige trekant to retvinklede trekanter, *ABD* og *BCD*.

Ser man på den "store" retvinklede trekant, trekant *ABD*, kan man opstille følgende ligning med de sædvanlige "værktøjer" for den retvinklede trekant – i dette tilfælde: Pythagoras' Læresætning:

$$c^2 = h_B{}^2 + (x+b)^2$$

$\Updownarrow$ Ser man nøje efter, er det blot Pythagoras' Læresætning. Derefter bruges kvadratsætningerne til at rydde op...

$$c^2 = h_B{}^2 + (x^2 + b^2 + 2 \cdot x \cdot b)$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{c^2 = h_B{}^2 + x^2 + b^2 + 2 \cdot x \cdot b}$$

Og ser man tilsvarende på den "lille" retvinklede trekant, trekant *BCD*, fås et lignende udtryk:

$$a^2 = h_B{}^2 + x^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{h_B{}^2 = a^2 - x^2}$$

Resultatet af den seneste udregning, $h_B{}^2$, indsættes i den første udregning:

$$c^2 = h_B{}^2 + x^2 + b^2 + 2 \cdot x \cdot b$$

$\Updownarrow$ Udtrykket for $h_B{}^2$ indsættes

$$c^2 = a^2 \cancel{-x^2} \cancel{+x^2} + b^2 + 2 \cdot x \cdot b$$

$\Updownarrow$ Og der ryddes op...

$$\underline{c^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot x \cdot b}$$

Det eneste problem er dog nu, at '*x*' ikke er kendt! Men vha. de 'gamle' regneregler for den retvinklede trekant, kan '*x*' nemt findes… Se blot på tegningen igen, og betragt specielt trekanten *BCD*. Her gælder:

$$\cos(v) = \frac{\text{Hosliggende Katete}}{\text{Hypotenusen}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\cos(C) = \frac{x}{a}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{x = a \cdot \cos(C)}$$

Men trekant *BCD* er jo kun en hjælpetrekant, som ligger helt uden for den egentlige trekant *ABC*. Og det bemærkes, at vi har fundet "ydersiden" af vinklen *C* - C_{ydre}. Det erl jo C_{indre} som skal bruges.

Vinklerne C_{ydre} og C_{indre} er supplementvinkler. Det betyder, at:

$$\boxed{\cos(180° - v) = -\cos(v)}$$

Eller i vores tilfælde:

$$\boxed{\cos(C_{indre}) = -\cos(C_{ydre})}$$

Og nu ikke mere snak om "indre" og "ydre"… (Det blev kun indført for bedre at kunne forstå problematikken omkring vinkel *C*.) Det ses, at "C_{indre}" overhovedet ikke benyttes, og derfor kaldes "C_{ydre}" blot "C" fremover.

Altså er:

$$x = a \cdot (-\cos(C))$$

$$\Updownarrow$$

$\underline{x = -a \cdot \cos(C)}$, hvilket indsættes i den forrige udregning...

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot x \cdot b$$

$$\Updownarrow$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot (-a \cdot \cos(C)) \cdot b$$

$\Updownarrow$ Og hvis parentesen hæves, og der ændres lidt på faktorernes rækkefølge...

$$\underline{\underline{c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(C)}}$$

Det ses, at resultatet er den ene af ligningerne i det, som tidligere blev præsenteret som "cosinusrelationerne", men resten kan nemt indses – som det var tilfældet ved sinusrelationen – ved at tegne højden fra enten pkt. A eller pkt. C, og så køre beviset igen. (I princippet, kan man blot nøjes med at ændre navnene på trekantens hjørner og køre beviset igen. Da kan man undlade at "dreje" hele figuren og tegne nye højder…)

Q.E.D.

05 - 2.Gradsligningen

Beviset for at løsningerne til $ax^2+bx+c=0,\ \ a\neq 0$ kan udregnes som:

$r=\dfrac{-b\pm\sqrt{d}}{2\cdot a}$, hvor $d=b^2-4\cdot a\cdot c$:

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$

$\Updownarrow$ Gang med 4a på begge sider

$$4\cdot a^2\cdot x^2+4\cdot a\cdot b\cdot x+4\cdot a\cdot c=0$$

$\Updownarrow$ Læg $b^2-4\cdot a\cdot c$ til på begge sider

$$\underbrace{4\cdot a^2\cdot x^2+2\cdot 2\cdot a\cdot x\cdot b+b^2}_{(a+b)^2=a^2+b^2+2\cdot a\cdot b}=b^2-4\cdot a\cdot c$$

$\Updownarrow$ Kvadratsætning

$$(2\cdot a\cdot x+b)^2=b^2-4\cdot a\cdot c$$

$\Updownarrow$ $d=b^2-4\cdot a\cdot c$

$$(2\cdot a\cdot x+b)^2=d$$ $\leftarrow$ Ligning 1

Her har vi indført størrelsen $d=b^2-4\cdot a\cdot c$, som også kaldes for andengradsligningens diskriminant.
Det viser sig, at den videre løsning af ligningen afhænger af fortegnet for d.

d < 0
I ligning 1, vil højre side da være negativ, mens venstre side altid er positiv (eller 0).
(Noget i anden potens vil altid være positivt eller 0).
Derfor findes der ingen værdier af *x*, der opfylder ligningen.

d = 0
Ligning 1 har i dette tilfælde udseendet:

$$(2\cdot a\cdot x+b)^2=d$$

$\Updownarrow$

$$(2\cdot a\cdot x+b)\cdot(2\cdot a\cdot x+b)=0$$

$\Updownarrow$

$$(2\cdot a\cdot x+b)=0$$

$\Updownarrow$

$$2\cdot a\cdot x=-b$$

$\Updownarrow$

$$x=\frac{-b}{2\cdot a}$$

- Altså har ligningen netop 1 løsning.

d > 0

Ligning 1 kan videre omskrives således:

$$(2 \cdot a \cdot x + b)^2 = d$$

$$\Updownarrow$$

$$2 \cdot a \cdot x + b = \pm\sqrt{d}$$

$$\Updownarrow$$

$$2 \cdot a \cdot x = -b \pm \sqrt{d}$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2 \cdot a}$$

- Altså har ligningen 2 løsninger.

Q.E.D.

06 - 2.Gradsligningen (Alternativt bevis)

En anden alternativ metode til at eftervise andengradsligningens løsninger, er en metode, som til dels også benyttes til udledning af toppunktsfomlen. I modsætning til det forrige bevis, anskueliggøres de forskellige antal løsninger ikke her. Udelukkende selve formlen udledes.

Et andengradspolynomium har forskriften: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Nulpunktsformlen ønskes bevist: $\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2 \cdot a}}$.

Koordinaterne til toppunktet kan udledes af følgende omskrivning:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Sætter a udenfor parentesen

$$= a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right)$$

Lægger $\frac{b^2}{4a^2}$ til og trækker $\frac{b^2}{4a^2}$ fra

$$= a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right)$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{bx}{a} \quad (\text{Kvadratsætning})$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)$$

De to sidste led sættes på fælles brøkstreg

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right)$$

Der skiftes fortegn i det andet led

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{-4ac + b^2}{4a^2}\right)$$

Bytter om på leddene i tælleren i det andet led

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$$

$d = b^2 - 4ac$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{d}{4a^2}\right)$$

Det andet led sættes udenfor parentesen

$$\underline{= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{d}{4a}}$$

Eventuelle nulpunkter vil forekomme for $y = f(x) = 0$, hvilket ifølge ovenstående omskrivning er det samme som:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{d}{4a} = 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{d}{4a} = 0$$

$\Updownarrow$ Flytter det andet led over på den anden side

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{d}{4a}$$

$\Updownarrow$ Dividerer med a

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{d}{4a^2}$$

$\Updownarrow$ Tager kvadratroden på begge sider

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{d}{4a^2}}$$

$\Updownarrow$ Isolerer x ved at flytte $\frac{b}{2a}$ over på den anden side og reducerer

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{d}}{2a}$$

$\Updownarrow$ Sætter på fælles brøkstreg

$$\underline{\underline{x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}}}$$

Q.E.D.

07 - Toppunktsformlen

Et andengradspolynomium har forskriften: $f(x)=ax^2+bx+c$

Vi ønsker at bevise toppunktsformlen: $\boxed{TP=(x;y)=\left(\frac{-b}{2a};\frac{-d}{4a}\right)}$.

Koordinaterne til toppunktet kan udledes af følgende omskrivning:

$$f(x) = ax^2+bx+c$$

Sætter a udenfor parentesen

$$= a\left(x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}\right)$$

Lægger $\frac{b^2}{4a^2}$ til og trækker $\frac{b^2}{4a^2}$ fra

$$= a\left(x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{bx}{a}\quad \text{(Kvadratsætning)}$$

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)$$

De to sidste led sættes på fælles brøkstreg

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)$$

Der skiftes fortegn i det andet led

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{-4ac+b^2}{4a^2}\right)$$

Bytter om på leddene i tælleren i det andet led

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$$

$d=b^2-4ac$

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{d}{4a^2}\right)$$

Det andet led sættes udenfor parentesen

$$\underline{= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{d}{4a}}$$

Den inderste parentes i det andet led er opløftet i 2. potens, så derfor vil den altid være positiv eller mindst lig med nul.

Da hele udtrykket er en funktion, hvor *x* er den uafhængige variabel, og da det sidste led ikke indeholder *x* er det dermed det første led, som primært dikterer funktionsværdien.

Men parentesen er jo positiv eller nul, og dermed er det *a*¸ som er den styrende faktor.

Så hvis *a* er positiv, vil $f(x)$ antage sin **mindste** værdi når parentesen er lig med 0.

Dvs. når $\left(x+\frac{b}{2a}\right)=0$, hvilket kun er muligt når $\underline{x=\frac{-b}{2a}}$.

På samme måde – hvis a er negativ – vil $f(x)$ antage sin **største** værdi når parentesen er lig med 0, og dermed når $\underline{x=\frac{-b}{2a}}$, hvilket ses at være det samme, som for når *a* er positiv.

I begge tilfælde, vil det første led være lig med 0, og funktionsværdien bliver derfor:

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right)=\frac{-d}{4a},$$

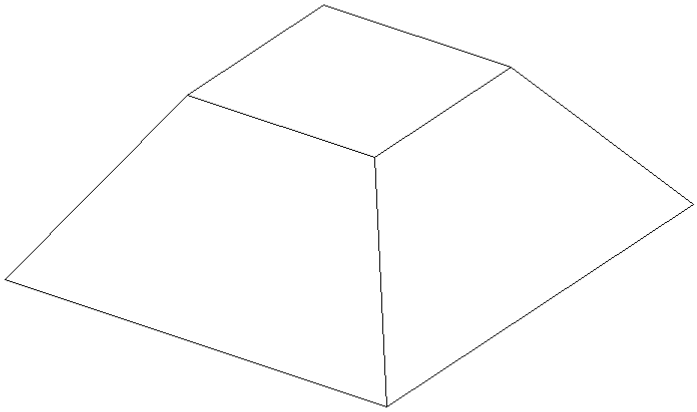
hvilket vil sige, at toppunktet, TP, forekommer for $\underline{x=\frac{-b}{2a}}$ og $\underline{y=\frac{-d}{4a}}$.

$$\underline{\underline{TP=(x;y)=\left(\frac{-b}{2a};\frac{-d}{4a}\right)}}$$

Q.E.D.

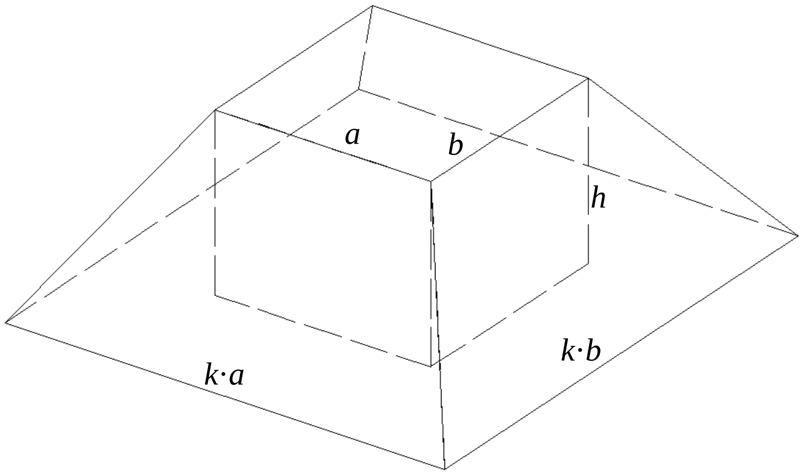
08 - Rumfang af pyramidestub

Det ønskes bevist at formlen: $V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \left(G + g + \sqrt{G \cdot g} \right)$ er sand.



En pyramidestub…
Ikke nødvendigvis kvadratisk, men rektangulær, dvs. alle vandrette vinkler er 90°!

Der sættes mål på, idet det antages at bunden og toppen har samme form, men blot er skaleret med faktoren '*k*'.



Den lodrette afstand mellem de to vandrette planer – 'Top' og 'Bund' sættes til '*h*'

Heraf kan det ses, at:

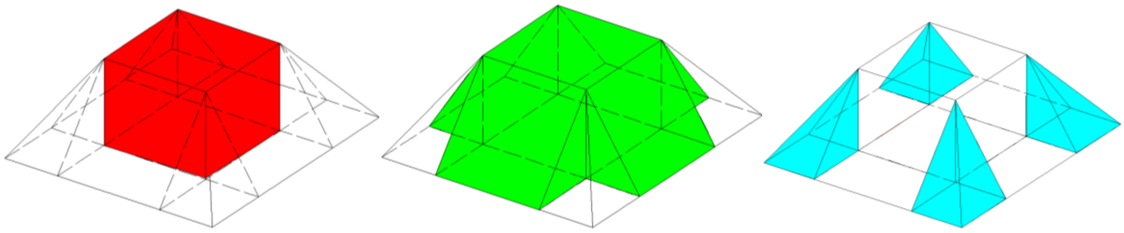
$\boxed{Grundflade_{lille} = a \cdot b = g}$

$\boxed{Grundflade_{stor} = k \cdot a \cdot k \cdot b = k^2 \cdot a \cdot b = G}$

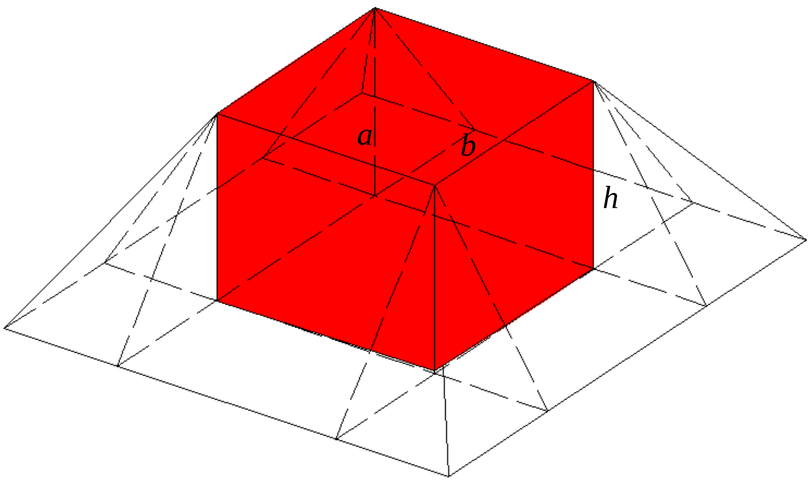
$$\boxed{\begin{array}{l} G \cdot g = k^2 \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b = k^2 \cdot a^2 \cdot b^2 \\ \Updownarrow \\ kab = \sqrt{G \cdot g} \end{array}}$$

Pyramidestubben inddeles i 3 dele:

1. Den store kasse i midten (Rød)
2. De fire prismer i siderne (Grøn)
3. De fire pyramider i hjørnerne (Cyan)



Den inderste kasse (rød) beregnes først. Som bekendt er rumfanget af en kasse lig med grundflade gange med højden.



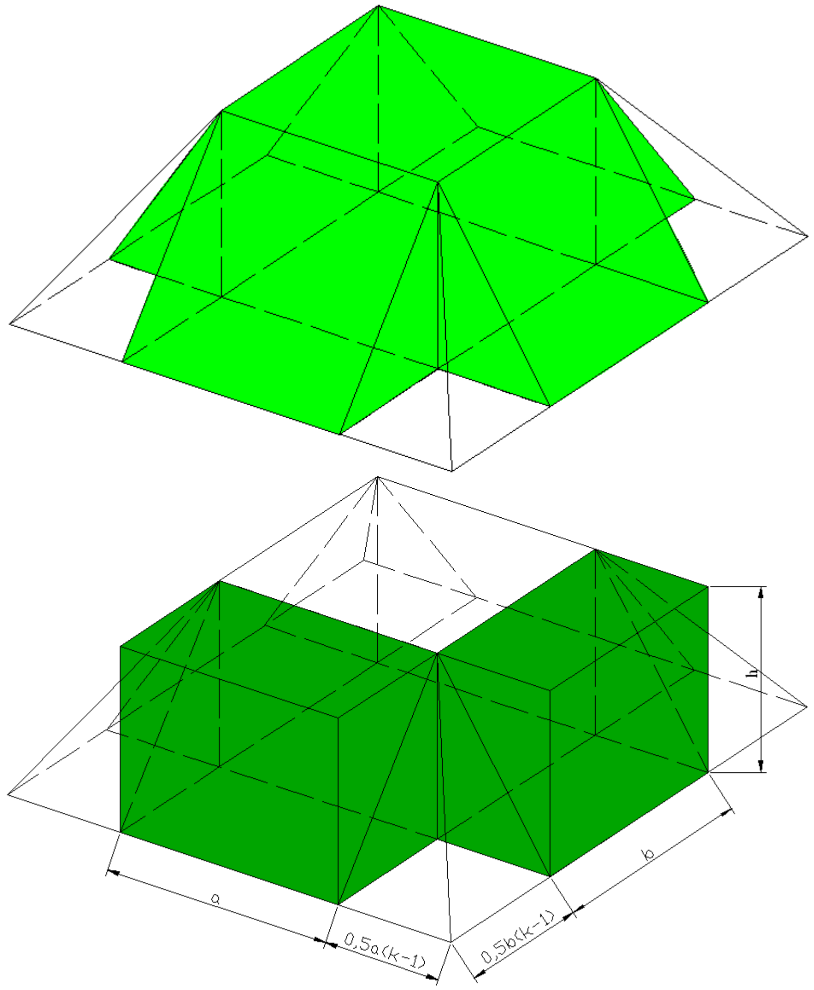
Da grundfladen er den samme som topfladen, må rumfanget være lig med:

$\underline{V_{kasse} = a \cdot b \cdot h}$

Dernæst kommer de fire prismer, som sidder på hver side af pyramidestubben. De sidder, som de ses på næste figur og vises med lys grøn farve.

Man kan indse, at hvis man tager de prismer, som sidder på "bagsiderne" af pyramidestubben, og drejer dem 180° i forhold til lodret, så kan de "lægges sammen" med de prismer, som sidder på de modsatte sider.

Ved denne manøvre, skal der derved blot regnes på to "kasser", som ses med mørkegrøn på næste figur.



Da sidelængden i bunden er lig med $k \cdot a$, må ”kassernes” ”dybde” være lig med halvdelen af forskellen mellem sidelængden i top og sidelængden i bund, da forskellen fordeles jævnt i begge sider.

$\frac{1}{2} \cdot (k \cdot a - a) = \frac{1}{2} \cdot a(k-1)$ (Og ligeledes for den anden side: $\frac{1}{2} \cdot b(k-1)$.

Altså er rumfanget af de to kasser:

$$V_{sider} = a \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot (k-1) \cdot h + b \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot (k-1) \cdot h$$

$\Updownarrow$

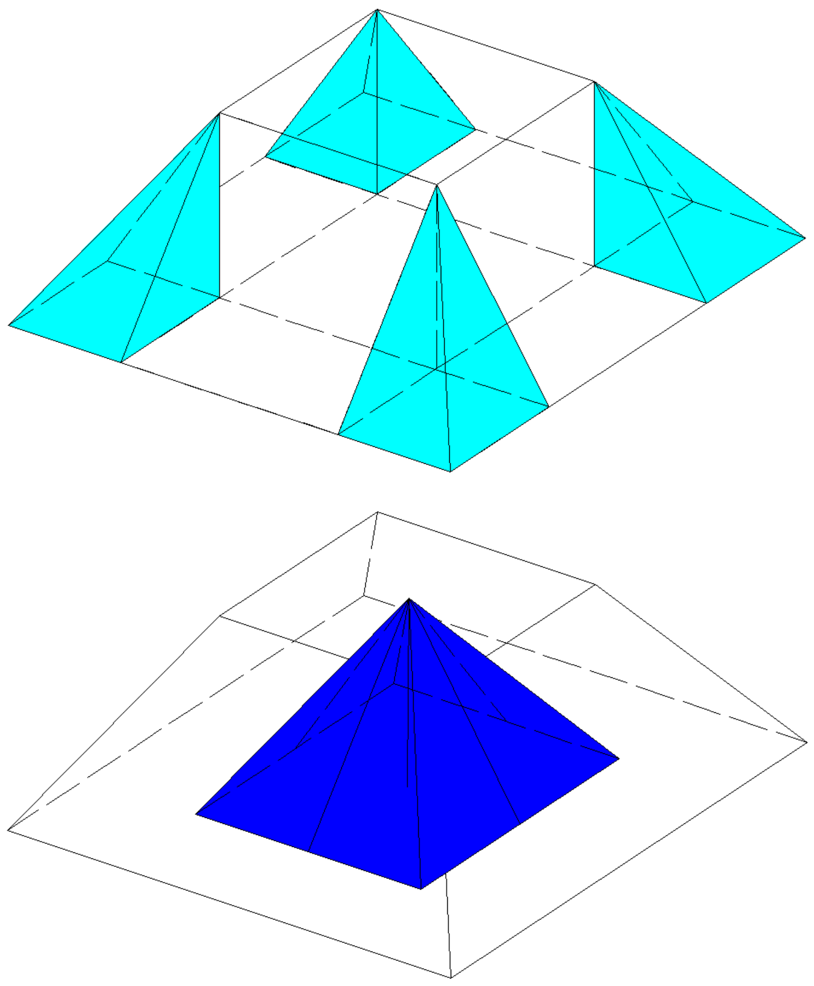
$$V_{sider} = a \cdot b \cdot (k-1) \cdot h$$

$\Updownarrow$

$$\underline{V_{sider} = a \cdot b \cdot h \cdot (k-1)}$$

Til sidst mangler kun de fire pyramidehjørner.

Her tænkes det – for nemheds skyld – at kassen i midten og de fire sider”fjernes”, og de fire hjørner (tegnet op med cyan farve) stødes sammen. Herved fremkommer en pyramide. (tegnet op med mørk blå på efterfølgende figur.)



Da bredden på hver enkelt af de fire hjørner er hhv. $\frac{1}{2}\cdot a\cdot(k-1)$ eller $\frac{1}{2}\cdot b\cdot(k-1)$ må grundfladen af de fire pyramider tilsammen være:

$$2\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot(k-1)\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot b\cdot(k-1)=4\cdot\frac{1}{4}\cdot a\cdot b\cdot(k-1)^2=a\cdot b\cdot(k-1)^2 .$$

Højden er naturligvis stadig h! Og derfor er rumfanget af pyramiden (iflg. formlen for en pyramides rumfang):

$$V_{pyramide}=\frac{1}{3}\cdot h\cdot G=\frac{1}{3}\cdot h\cdot a\cdot b\cdot(k-1)^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{V_{pyramide}=\frac{1}{3}\cdot a\cdot b\cdot h\cdot(k-1)^2}$$

Der opsummeres, inden det løber løbsk… Nu er alle rumfangene for delfigurerne i pyramidestubben beregnet:

$$V_{kasse} = a \cdot b \cdot h$$

$$V_{sider} = a \cdot b \cdot h \cdot (k-1)$$

$$V_{pyramide} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot h \cdot (k-1)^2$$

Derfor må det totale areal være lig med summen af de tre voluminer.

$$V_{pyramidestub} = V_{kasse} + V_{sider} + V_{pyramide}$$

$\Updownarrow$

$$V_{pyramidestub} = a \cdot b \cdot h + a \cdot b \cdot h \cdot (k-1) + \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot h \cdot (k-1)^2$$

$\Updownarrow$ Kvadratsætning: $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$

$$V_{pyramidestub} = a \cdot b \cdot h + a \cdot b \cdot h \cdot (k-1) + \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot h \cdot (k^2 + 1 - 2 \cdot k)$$

$\Updownarrow$ Ganger '$a \cdot b$' ind i parenteserne

$$V_{pyramidestub} = a \cdot b \cdot h + h \cdot (k \cdot a \cdot b - a \cdot b) + \frac{1}{3} \cdot h \cdot (k^2 \cdot a \cdot b + a \cdot b - 2 \cdot k \cdot a \cdot b)$$

$\Updownarrow$ Ganger 'h' ind i den ene parentes

$$V_{pyramidestub} = \cancel{a \cdot b \cdot h} + h \cdot k \cdot a \cdot b \cancel{- h \cdot a \cdot b} + \frac{1}{3} \cdot h \cdot (k^2 \cdot a \cdot b + a \cdot b - 2 \cdot k \cdot a \cdot b)$$

$\Updownarrow$ Ganger og dividerer med '3' for at sætte på fælles brøkstreg

$$V_{pyramidestub} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot 3 \cdot k \cdot a \cdot b + \frac{1}{3} \cdot h \cdot (k^2 \cdot a \cdot b + a \cdot b - 2 \cdot k \cdot a \cdot b)$$

$\Updownarrow$ Faktoriserer og sætter $\frac{1}{3} \cdot h$ uden for parentesen

$$V_{pyramidestub} = \frac{1}{3} \cdot h(k^2 \cdot a \cdot b + a \cdot b - 2 \cdot k \cdot a \cdot b + 3 \cdot k \cdot a \cdot b)$$

$\Updownarrow$ Rydder lidt op

$$V_{pyramidestub} = \frac{1}{3} \cdot h(k^2 \cdot a \cdot b + a \cdot b + k \cdot a \cdot b)$$

$\Updownarrow$ Det erindres fra begyndelsen: $k^2 \cdot a \cdot b = G$, $a \cdot b = g$ og $k \cdot a \cdot b = \sqrt{G \cdot g}$

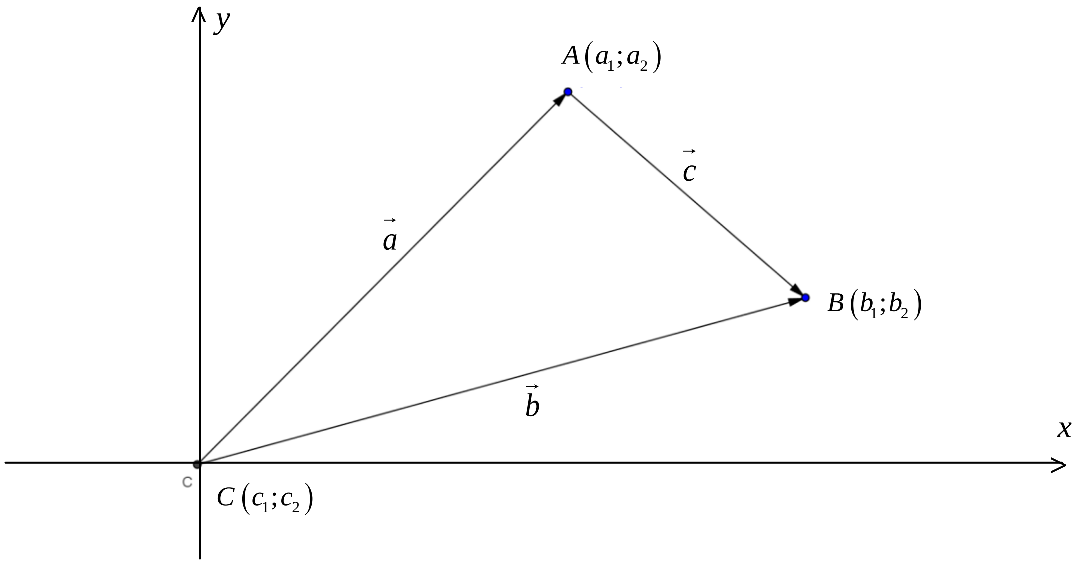
$$\underline{\underline{V_{pyramidestub} = \frac{1}{3} \cdot h\left(G + g + \sqrt{G \cdot g}\right)}}$$

$\boxed{\textbf{Q.E.D.}}$

09 - Forholdet mellem skalarprodukt og vinkel mellem vektorer

Sammenhængen mellem skalarproduktet og vinklen mellem to givne vektorer, $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, ønskes bevist. Desuden findes $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$

Det er vigtigt at huske, at selve skalarproduktet er **defineret** som: $\boxed{\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}$.



Af figuren ses det, at:

$$|\vec{a}| = |CA| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2}$$

$$|\vec{b}| = |CB| = \sqrt{b_1{}^2 + b_2{}^2}$$

$$|\vec{c}| = |AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

Cosinusrelationen (se tidligere bevis), giver f.eks.:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(C)$$

Ved at indsætte de fundne udtryk for længderne af vektorerne $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$, som jo netop svarer til siderne *a*, *b* og *c* i trekanten, fås følgende:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(C)$

$\Updownarrow$ Indsætter værdierne fra tegningen

$\left(\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2}\right)^2 + \left(\sqrt{b_1{}^2 + b_2{}^2}\right)^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(C)$

$\Updownarrow$ Kvadratrod i anden potens ophæver sig selv

$(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 = a_1{}^2 + a_2{}^2 + b_1{}^2 + b_2{}^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(C)$

$\Updownarrow$ Kvadratsætninger

$\cancel{b_1^2} \cancel{+a_1^2} - 2 \cdot a_1 \cdot b_1 \cancel{+b_2^2} \cancel{+a_2^2} - 2 \cdot a_2 \cdot b_2 = \cancel{a_1^2} \cancel{+a_2^2} \cancel{+b_1^2} \cancel{+b_2^2} - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(C)$

$\Updownarrow$ Reducerer

$-2 \cdot a_1 \cdot b_1 - 2 \cdot a_2 \cdot b_2 = -2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(C)$

$\Updownarrow$ Dividerer igennem med -2

$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(C)$

$\Updownarrow$ Vi husker, at skalarproduktet er defineret som: $\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$

$$\underline{\underline{\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(C)}}$$

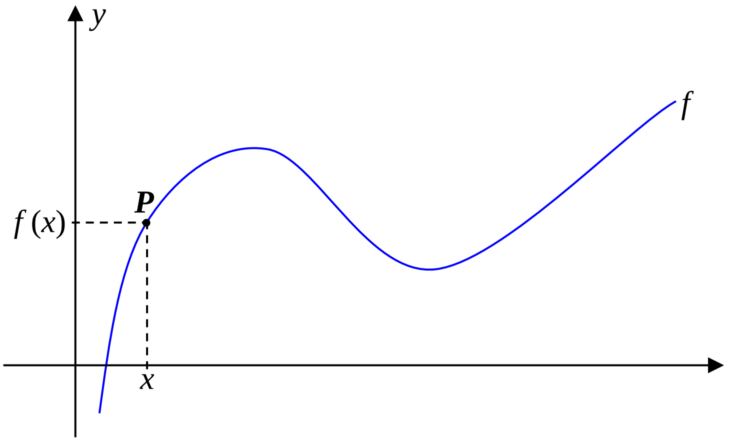
Q.E.D.

10 - Tre-trins-reglen for differentialkvotienter

Ønsket med dette bevis er at vise, at hældningen på en funktion i et givet punkt, kan defineres som differentialkvotienten $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Det er noget af en påstand! Lad os begynde fra begyndelsen.

Givet er en funktion, f, hvis kurve er beliggende i et almindeligt koordinatsystem. Se figur 1. Funktionen *f* er afbildet som den blå kurve.

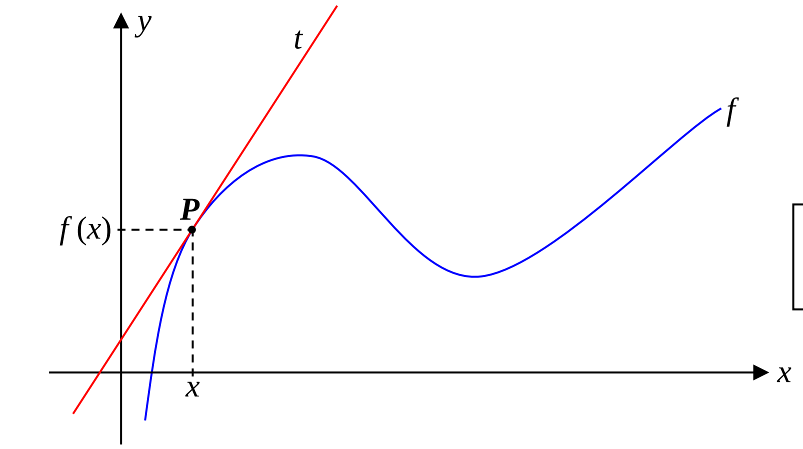


Figur 1:
Grafen for funktionen *f* med punktet ***P***

Det ønskes at bestemme funktionens hældning i punktet '***P***'. Punktet '***P***' betragtes. Ved nærmere observation opdages det, at punktet '***P***' kan projiceres lodret ned på *x*-aksen i værdien '*x*'. Således kan dette punkt være hvor som helst på funktionen. Den eneste betingelse er dog, at funktionen skal være differentiabel og dermed også kontinuert i dette punkt samt i det område, som undersøges. (Kontinuitet og differentiabilitet beskrives i et andet notat).
Der er naturligvis også en funktionsværdi i punktet '***P***'. Den er – som normalt – lig med $y = f(x)$. Dette indses ved at projicere punktet '***P***' vandret ind på *y*-aksen.

Hældningen i dette punkt, kan bestemmes ved en kendt geometrisk figur.
Det er **tangenten**, *t*, som berører funktionen i ét og kun et punkt – nemlig i punktet '***P***'.
Se figur 2. Tangenten er den røde linie.
Tangenten kendetegnes ved at have samme hældning, som funktionen i netop røringspunktet.

Hold godt fast på denne tangent! Den er vigtig, og vil blive detaljeret beskrevet senere…

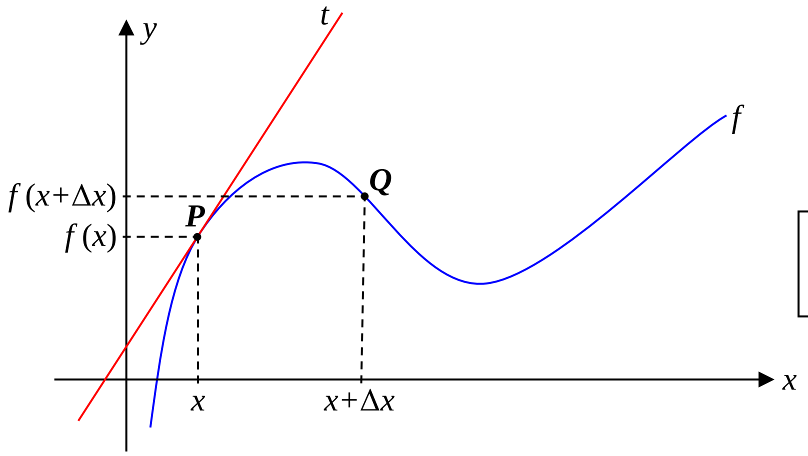


Figur 2:
Tilføjet tangenten i punktet ***P***
(Den røde linie)

Et andet punkt, '***Q***', introduceres, som også er beliggende på funktionen. For nemheds skyld ligger '***Q***' til højre for '***P***' på kurven i dette tilfælde. Naturligvis kan punktet '***Q***' ligge hvor som helst – altså også til venstre for '***P***', og det er kun af pædagogiske årsager, at punkternes beliggenhed er valgt således.

Den vandrette afstand mellem '***P***' og '***Q***' sættes til Δx. Symbolet Δ (Det græske bogstav, store delta) er kendt fra bl.a. fysikken og bruges i forbindelse med tilvækst, forandring, ændring eller udvidelse.

I dette tilfælde er det forskellen på hhv. punkterne '***P***' og '***Q***''s *x*-værdier. Da punktet '***P***''s *x*-værdi blot kendes som *x*, og dermed ikke kan beskrives anderledes, må punktet '***Q***''s *x*-værdi være lig med: $x+\Delta x$.



Figur 3:
Tilføjet punktet ***Q***

På samme måde, som for punktet '***P***', findes funktionsværdien til punktet '***Q***'.

Da $x+\Delta x$ er punktet '***Q***''s *x*-værdi, må den tilhørende funktionsværdi nødvendigvis være lig med: $f\left(x+\Delta x\right)$. Se figur 3.

Det kan godt være lidt abstrakt med funktionsværdien i punkt '***Q***'. Måske kan det hjælpe at tænke på, at hvis *x*-værdien er 8, så kan funktionsværdien skrives som *f*(8), altså hvor man indsætter talværdien 8 på alle pladser, hvor der står *x*. Så hvis man i stedet indsætter *x*-værdien $x+\Delta x$, så må funktionsværdien være: $f\left(x+\Delta x\right)$.

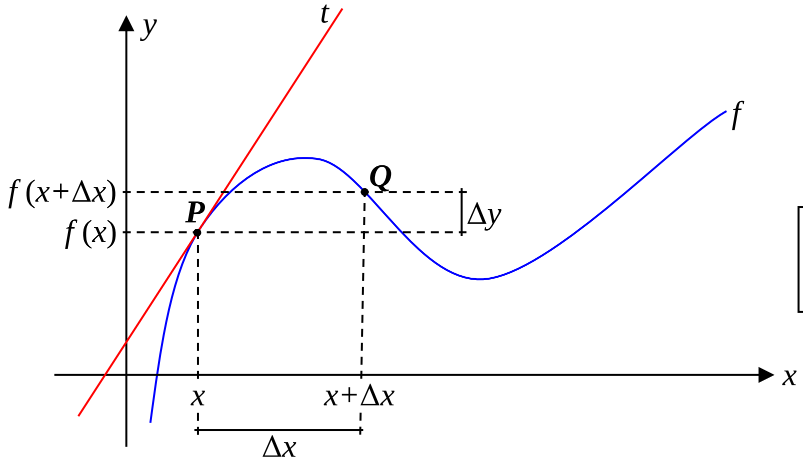
Således haves nu to veldefinerede punkter, beliggende på kurven for $f(x)$, nemlig $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}\,;\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$ og $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}+\Delta \boldsymbol{x}\,;\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\Delta \boldsymbol{x}))$.

Den vandrette afstand mellem '***P***' og '***Q***' er jo allerede givet som Δx – altså ændringen i *x*-værdien. Se figur 4.

Men hvad med den lodrette afstand? Af figuren ses, at den kan findes som $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\Delta \boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ altså funktionsværdien i pkt. '***Q***' minus funktionsværdien i pkt. '***P***'.

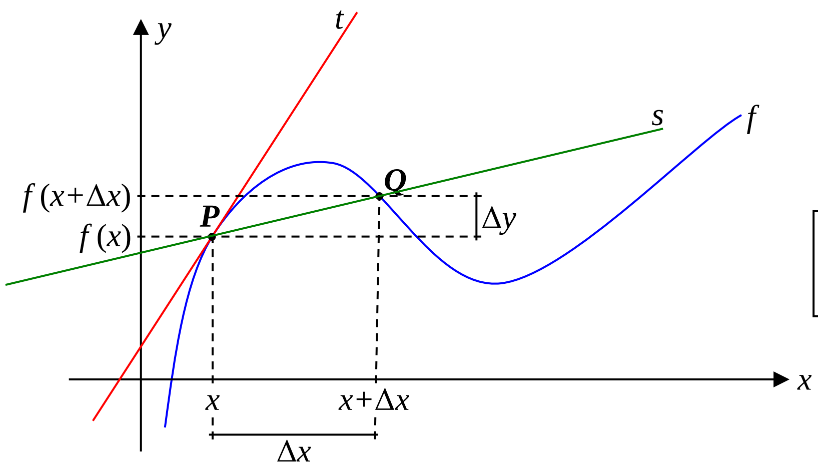
For nemheds skyld kaldes denne lodrette afstand for Δy – altså den lodrette tilvækst (afstand) mellem '***P***' og '***Q***'. Se figur 4. I dette forklarende eksempel er punkterne

konstrueret således, at $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\Delta \boldsymbol{x})$ er beliggende over (højere end) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Igen er dette af pædagogiske årsager, for at forenkle figurerne og forklaringerne. Senere i dette notat beskrives det hvad der sker, hvis de to funktionsværdier bytter plads.



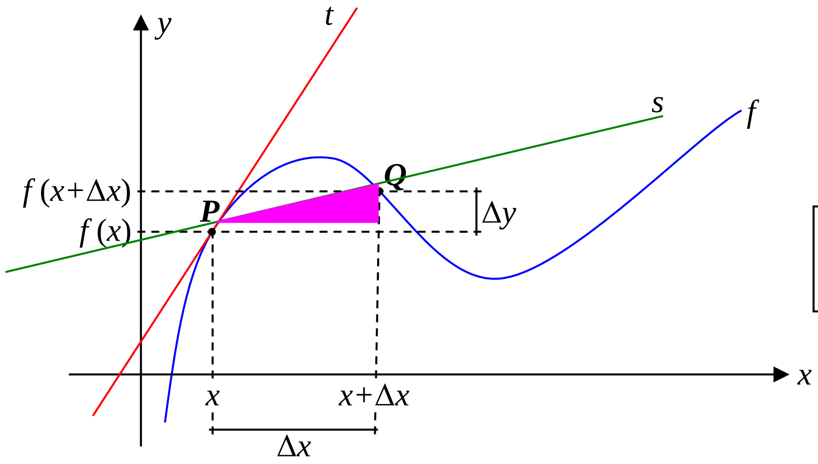
Figur 4:
Bestemmer Δx og Δy

Der tegnes nu en streg, *s* (grøn linie), som går igennem de to punkter '***P***' og '***Q***'. Denne linie kaldes for en **sekant**.
(Sekant, (af latin *secans*, 'skære'), i matematik en linje gennem to punkter på en kurve.)



Figur 5:
Indfører sekanten, *s*
(Grøn linie)

Betragtes sekanten mellem ’***P***’ og ’***Q***’ som hypotenusen i den retvinklede trekant der dannes, som vist på tegningen (den lilla trekant på figur 6), kan hældningen af hypotenusen udregnes.
Det er denne størrelse, som fremover vil blive refereret til som **differenskvotienten** – altså forholdet mellem ændringen i *y*-retningen og i *x*-retningen for en sekant.



Figur 6:
Den retvinklede trekant

Det erindres fra trigonometrien og den analytiske plangeometri:

Hældningen: $\alpha = a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{\text{modstående katete}}{\text{hosliggende katete}} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$

Hvis der tages udgangspunkt i $\alpha = \dfrac{\text{modstående katete}}{\text{hosliggende katete}}$, kan det i figuren aflæses, at hypotenusens – det vil i dette her tilfælde sige sekantens – hældning (eller differenskvotient) må være det samme som: $\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

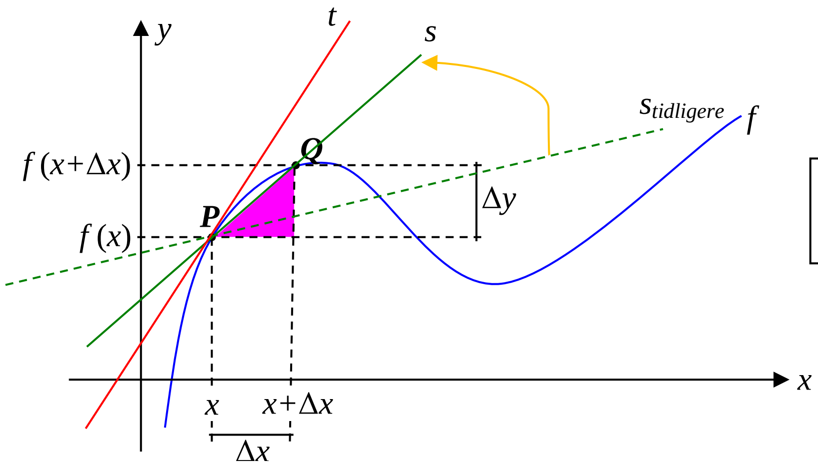
Dette er et meget vigtigt punkt i beviset, så derfor opsummeres, hvad der er konkluderet indtil nu…

Givet en funktion med et punkt ’***P***’. Hældningen i dette punkt ønskes bestemt, så derfor ønskes funktionens tangent i punktet ’***P***’, idet tangenten og funktionen må have samme hældning.

Dernæst sættes endnu et punkt ’***Q***’ på funktionen. Mellem punkterne ’***P***’ og ’***Q***’, tegnes en **sekant**. Ved hjælp af en simpel trigonometrisk betragtning, findes sekantens hældning (differenskvotient) at være lig med: $\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

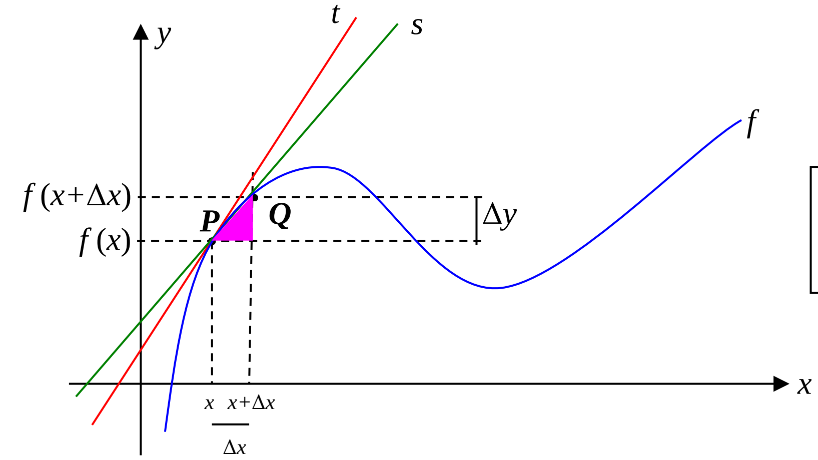
Nu er det dog **tangentens** hældning der søges, og ikke **sekantens**.

Derfor undersøges hvad der sker, hvis Δx bliver mindre – f.eks. halveret.



Figur 7:
Den vandrette afstand mellem x og Δx halveres.

Som det fremgår af ovenstående figur, flytter sekanten sig, når Δx halveres. Det er jo klart, for hele figuren skal jo tegnes om, når punkt '***Q***' flytter sig nærmere. Så sekanten flyttes, som antydet af den orange pil på tegningen. Det ses, at den nye sekant er "tættere" på tangenten end den oprindelige sekant var. Dette skyldes til dels at eksemplet er konstrueret således at sekanten visuelt nærmer sig tangenten, men uanset sekantens hældning, så vil den komme nærmere tangenten, når Δx mindskes.



Figur 8:
Den vandrette afstand mellem x og Δx halveres en gang mere.

På figuren ovenfor er det tydeligt, at sekanten er på vej over mod tangenten. Det er også indlysende, at afstanden Δx bliver mindre og mindre. Har man fantasi nok, kan man forestille sig, at afstand en Δx til sidst bliver så lille, at den faktisk er lig med 0. Hvad vil der ske, hvis $\Delta x = 0$?

Forestiller man sig problemet i bevægelse, vil man se, at som Δx nærmer sig 0, så vil sekanten dreje sig, så den kommer nærmere og nærmere tangenten. Når Δx er lig med 0 (det vil den aldrig blive, men den kommer så tæt på, at "den nok er god nok"), så vil sekanten være lig med tangenten.

Dette kan skrives som, at når Δx nærmer sig 0, så vil differenskvotienten blive lig med differentialkvotienten.

Når man i matematik vil skrive at noget nærmer sig en bestemt værdi, omtaler man det som **grænseværdien, når en værdi flytter sig mod en konstant**.

Den matematiske notation for en grænseværdi stammer fra det latinske udtryk: ”limes”, som betyder ”grænse”. Det kendes også fra engelsk, hvor ”limit” også betyder ”grænse”.

Notationen for grænseværdi er som vist i det følgende eksempel:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

I det ovenstående eksempel betyder det, at grænseværdien (lim) for *x* gående imod uendeligt $(x \to \infty)$ i udtrykket: $\frac{1}{x}$ er lig med 0, idet man forestiller sig, at 1 divideret med et ”meget stort tal” vil blive tæt på 0. Det er dog muligt at forestille sig, at man dividerer med et tal som er endnu større end det ”meget store tal”, hvilket vil betyde at udtrykkets værdi kommer endnu tættere på 0.

I dette tilfælde – altså i beviset for differentialkvotienten – der kan grænseværdien skrives som:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Eller for at skrive det på ”dansk”:

Differentialkvotienten, som er funktionens hældning i et bestemt punkt, beskrives som hældningen af den linje, som fremkommer, når en sekant, som går igennem punktet samt et andet punkt, drejes ved at det andet punkt nærmer sig det første punkt langs funktionen.

Tre-trins-reglen for differentialkvotienter

Alt dette kan sammenfattes til en ”Tre-trins-model”
(Her beskrevet som: ”**Hvad skal man gøre?**”,
”Hvad betyder det på ”dansk”?”,
”Hvordan gør man det?” og så et
eksempel med udgangspunkt i funktionen: $f(x) = x^2$

1) **Find funktionstilvæksten: $f(x+\Delta x) - f(x)$.**

Dette er forskellen i funktionsværdierne (y-værdierne) mellem de to punkter, som udgør basen for sekanten.

Indsæt $x+\Delta x$ i stedet for x i funktionsudtrykket og subtraher derefter med selvefunktionsudtrykket.

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = x^2 + \Delta x^2 + 2x\Delta x - x^2 = \Delta x^2 + 2x\Delta x$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\Delta y = \Delta x(\Delta x + 2x)}$$

2) **Find differenskvotienten: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.**

Dette er hældningen af en vilkårlig sekant.

Tag resultatet fra punkt 1) og divider med Δx. Hvis det er muligt, så er det en rigtig god ide at reducere udtrykket så meget som muligt.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(\Delta x + 2x)}{\Delta x}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x + 2x}$$

3) **Find differentialkvotienten: $f'(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.**

Dette er hældningen af sekanten, når afstanden mellem sekantens to punkter er så tæt på hinanden, at de ”lige så godt kunne være 0”.

Tag resultatet fra punkt 2) og erstat alle forekomster af Δx med 0.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + 2x$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{f'(x) = 2x}}$$

Q.E.D.

11 - Den rette linje

Det ønskes at vise, at hældningen på en ret linie mellem to punkter kan skrives som: $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Ydermere ønsker vi at bevise, at $b = y_1 - a \cdot x_1$.

En ret linie er almindeligvis defineret som en funktion $y = f(x) = ax + b$, for hvilken der for to vilkårlige punkter på funktionen gælder, at $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$.

a er en konstant, som beskriver funktionens hældning. Tænk på hældningen, som at gå et vandret skridt (som regel mod højre) og et lodret skridt (op eller ned). Afhængigt af, hvor store skridtene er, beskrives hældningen som mere eller mindre stejl. Tager man f.eks. et meget stort skridt til højre, og et lille bitte skridt op, så er hældningen meget lille (og positiv). Tager man et lille skridt til højre og et kæmpe skridt nedad, så er hældningen meget stor (og negativ).

Det er altså det lodrette ”skridt”, som bestemmer om hældningen er positiv eller negativ. Går man opad mod højre, er hældningen positiv. Går man nedad mod højre er hældningen negativ. I specielle tilfælde, kan det være en fordel at tænke på, at man går mod venstre, og så er det hele bare omvendt.

Så nu er det altså nødvendigt at finde ud af, hvor store skridtene er henad og opad.

Enhver linie kan indlægges i et kartesisk (et normalt retvinklet) koordinatsystem. Det vil samtidig sige, at de to punkter (som jo ligger på linien) også er i det samme koordinatsystem. Da det er retvinklet, må der altså findes en vandret afstand og en lodret afstand mellem de to punkter.

Det er nu muligt at indføre et tredje punkt, som er variabelt. Det kan i teorien ligge hvor som helst på linien. Hvor $P_1 = (x_1; y_1)$ og $P_2 = (x_2; y_2)$ er de to faste punkter, kan det variable punkt kaldes for $P = (x; y)$.

På en ret linie, må alle punkter have en indbyrdes lige stor hældning - uanset, hvor punkterne ligger på linien. Det er derfor at *a* er konstant.

Da hældningen er konstant, opstiller vi hældningen for to punktsæt.
Det ene punktsæt er ”P og P_1” og det andet er ”P_2 og P_1”.

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=a \qquad\qquad \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=a$$

Dvs. at:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{(y-y_1)\cdot\cancel{(x-x_1)}}{\cancel{x-x_1}}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)$$

$$\Updownarrow$$

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)$$

Vi husker, at $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=a.$

$$\Updownarrow$$

Udtrykket kan derfor omskrive til:

$$y-y_1=a\cdot(x-x_1)$$

(Ligningen på denne form kaldes også for "Tangentligningen".)

a ganges ind i parentesen og der lægges y_1 til på begge sider.

$$y=ax-ax_1+y_1$$

$$\Updownarrow$$

$-ax_1+y_1$ er begge konstantled, (Der er ingen ukendte variable) og kan samles under det nye navn: b.

$$\underline{\underline{y=ax+b}}$$

Q.E.D.

12 - Eksponentialfunktionen

Det ønskes bevist, at forskriften for en eksponentialfunktion med ligningen: $f(x) = b \cdot a^x$, $a \neq 0$, kan findes, hvis man har to punkter: $P_1(x_1; y_1)$ og $P_2(x_2; y_2)$ som grafen går igennem.

Definition: Ved en potensfunktion forstås en funktion *f* med forskriften:

$$f(x) = b \cdot a^x, \text{ hvor } a \text{ og } b \text{ er talkonstanter.}$$

Der gælder at: $a = \sqrt[x_2 - x_1]{\dfrac{y_2}{y_1}}$ og $b = \dfrac{y_1}{a^{x_1}} = y_1 \cdot a^{-x_1} = \dfrac{y_2}{a^{x_2}} = y_2 \cdot a^{-x_2}$

Bevis:

Da (x_1, y_1) og (x_2, y_2) begge ligge på grafen for *f*, må der gælde at:

$$y_1 = b \cdot a^{x_1} \qquad \text{og} \qquad y_2 = b \cdot a^{x_2}$$

y_2 divideres med y_1:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{b \cdot a^{x_2}}{b \cdot a^{x_1}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{y_2}{y_1} = a^{x_2} \cdot a^{-x_1}$$

Husk fra tidligere:
$$\frac{1}{a^p} = a^{-p}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{y_2}{y_1} = a^{x_2 - x_1}$$

Husk fra tidligere:
$$a^n \cdot a^p = a^{n+p}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}} = \sqrt[x_2 - x_1]{a^{x_2 - x_1}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}}}$$

Der mangler stadig formlen for *b*.

Det er tidligere givet at:

$$y_1 = b \cdot a^{x_1} \qquad \text{eller} \qquad y_2 = b \cdot a^{x_2}$$

Der divideres med a^x-faktoren.

$$y_1 = b \cdot a^{x_1} \qquad\qquad y_2 = b \cdot a^{x_2}$$
$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$
$$b = \frac{y_1}{a^{x_1}} \qquad \text{eller} \qquad b = \frac{y_2}{a^{x_2}}$$
$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$
$$\underline{b = y_1 \cdot a^{-x_1}} \qquad\qquad \underline{b = y_2 \cdot a^{-x_2}}$$

Er det i forbindelse med en opgave, hvor man bliver bedt om at angive funktionsforskriften, så er det vigtigt at samle *a* og *b* i det samlede udtryk:

$$\underline{\underline{f(x) = b \cdot a^x}}$$

Q.E.D.

13 - Fordoblingskonstanten

Fordoblingstiden T_2 for en voksende eksponentialfunktion $f(x) = b \cdot a^x$ er givet ved:

$$\boxed{T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)}},$$

hvilket ønskes bevist.

Bevis:

Det må være således, at $f(0) = b \cdot a^0 = b \cdot 1 = b$

Funktionsværdien til tiden $t = 0$ (hvornår det så end er), er altså *b*.

Bemærk, at det ikke er vigtigt at kende det præcise begyndelsestidspunkt, da fordoblingskonstanten jo er den tid, som der til ethvert tidspunkt skal gå, før end at funktionsværdien er blevet fordoblet.

Dog må det være en kendsgerning, at den dobbelte funktionsværdi af *b* må være 2*b*!

Vi indsætter altså funktionsværdien 2*b* i forskriften og isolerer *x*.

$$f(x) = b \cdot a^x$$
$$\Updownarrow$$
$$2\cancel{b} = \cancel{b} \cdot a^x$$
$$\Updownarrow$$
$$2 = a^x$$
$$\Updownarrow$$
$$\log(a^x) = \log(2)$$
$$\Updownarrow$$
$$x \cdot \log(a) = \log(2)$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{x = \frac{\log(2)}{\log(a)}}}$$

Idet det huskes, at:
$\log(a^x) = x \cdot \log(a)$

Q.E.D.

14 - Halveringskonstanten

Det ønskes bevist, at halveringstiden $T_{\frac{1}{2}}$ for en aftagende eksponentialfunktion $f(x) = b \cdot a^x$ er givet ved:

$$\boxed{T_{\frac{1}{2}} = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log(a)}}$$

Bevis:

Det må være således, at $f(0) = b \cdot a^0 = b \cdot 1 = b$

Funktionsværdien til tiden $t = 0$ (hvornår det så end er), er altså *b*.

Bemærk, at det ikke er vigtigt at kende det præcise begyndelsestidspunkt, da halveringskonstanten jo er den tid, som der til ethvert tidspunkt skal gå, før end at funktionsværdien er blevet halveret.

Dog må det være en kendsgerning, at den halve funktionsværdi af *b* må være $\frac{1}{2} \cdot b$!

Vi indsætter altså funktionsværdien $\frac{1}{2} \cdot b$ i forskriften og isolerer *x*.

$$f(x) = b \cdot a^x$$
$$\Updownarrow$$
$$\tfrac{1}{2} \cancel{b} = \cancel{b} \cdot a^x$$
$$\Updownarrow$$
$$\tfrac{1}{2} = a^x$$
$$\Updownarrow$$
$$\log\left(a^x\right) = \log\left(\tfrac{1}{2}\right)$$
$$\Updownarrow$$
$$x \cdot \log(a) = \log\left(\tfrac{1}{2}\right)$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{x = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log(a)}}}$$

Idet det huskes, at:
$\log\left(a^x\right) = x \cdot \log(a)$

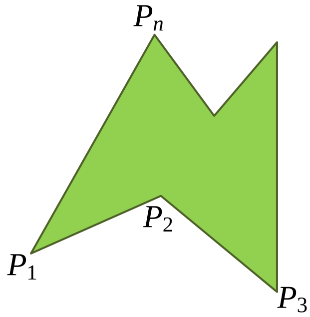
Q.E.D.

15 - Arealberegning af n-sidet polygon ved brug af determinant

$$A_{n-kant}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\\ \vdots & \vdots\\ x_n & y_n\\ x_1 & y_1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left|x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+\ldots+x_ny_1-x_1y_n\right|=\frac{1}{2}\left|x_1y_2+x_2y_3+\ldots+x_ny_1-x_2y_1-x_3y_2-\ldots-x_1y_n\right|$$

Beviset kan gennemføres som et induktionsbevis[1]. Det vides fra tidligere (og fra bogen), at formlen er sand for en trekant $(n=3)$. Det antages, at det også er sandt for ethvert *n*, og at det også gælder for $n+1$.

Givet en polygon med *n* sider, som er navngivet mod uret.



$$A_n=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\\ \vdots & \vdots\\ x_n & y_n\\ x_1 & y_1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left|x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+\ldots+x_ny_1-x_1y_n\right|$$

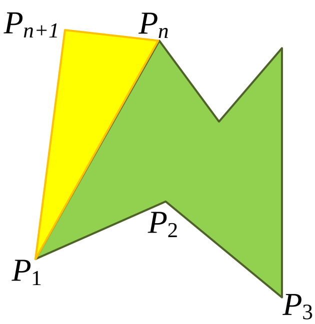
$\Updownarrow$ (Sorterer efter positive og negative led.)

$$A_n=\frac{1}{2}\left|x_1y_2+x_2y_3+\ldots+x_ny_1-x_2y_1-x_3y_2-\ldots-x_1y_n\right|$$

Dette er altså arealet af det grønne markerede område, i det omfang at punkterne er givet i rækkefølge mod uret.

Nu tilføjes et ekstra punkt. Punkt nr. $n+1$. Det vil naturligvis ændre det samlede areal af polygonen, og ændringen (og den gule markering på næste figur), er præcis arealet af den just dannede trekant.

Den nye (gule) trekant har koordinatpunkterne:



$$P_n\left(x_n;y_n\right)$$

$$P_{n+1}\left(x_{n+1};y_{n+1}\right)$$

$$P_1\left(x_1;y_1\right)$$

Arealet af den nye gule trekant, A_t, er givet ved den samme formel:

---

1 **Induktion** er en bestemt type matematisk bevis, som er meget velegnet til at bevise at en matematisk hypotese er sand for alle naturlige tal, eller andre talmængder, som er velordnet.
Induktionsprincippet består af 2 skridt: **basisskridtet** (induktionsstarten, startbetingelsen) og **induktionsskridtet**.
1. Basisskridt: I basisskridtet beviser man at hypotesen er sand ved det mindste tal i talmængden. Dette er typisk 1, da man ofte vil bevise sætningen for de naturlige tal.
2. Induktionsskridt: I induktionsskridtet beviser man, at hvis hypotesen gælder for tallet *n* (denne antagelse kaldes induktionsantagelsen), så gælder den også for tallet *n*+1.

På denne måde kan man bevise at hypotesen gælder for alle hele tal fra basisskridtet og opefter.
Hvis tilfælde 1 er sand, så er tilfælde 2 også sand, da tilfælde 1 er sand. Så er 3 også sand, når 2 er sand, osv.
Dette princip kan sammenlignes med dominoeffekten. Hvis man har en lang række dominobrikker stående efter hinanden, kan man udlede følgende:
1. Basisskridt: Den første dominobrik vælter.
2. Induktionsskridt: Når en dominobrik vælter, vil den næste vælte.

Derfor vil alle dominobrikker vælte.
Kilde: Induktion (Matematik) http://da.wikipedia.org/wiki/Induktion_%28matematik%29, 26-02-2014 18:52

$$A_t = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_{n+1} & y_{n+1} \\ x_1 & y_1 \\ x_n & y_n \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left|x_n y_{n+1} - x_{n+1}y_n + x_{n+1}y_1 - x_1 y_{n+1} + x_1 y_n - x_n y_1\right|$$

$\Updownarrow$ (Sorterer efter positive og negative led.)

$$A_t = \frac{1}{2}\left|x_n y_{n+1} + x_{n+1}y_1 + x_1 y_n - x_{n+1}y_n - x_1 y_{n+1} - x_n y_1\right|$$

Det samlede areal af $n+1$-kanten er altså arealet af den oprindelige n-kant, A_n, adderet med det nye areal, A_t.

$$A_{n+1} = A_n + A_t$$

$\Updownarrow$

$$A_{n+1} = \frac{1}{2}\left|x_1 y_2 + x_2 y_3 + \ldots + x_n y_1 - x_2 y_1 - x_3 y_2 - \ldots - x_1 y_n\right| + \frac{1}{2}\left|x_n y_{n+1} + x_{n+1}y_1 + x_1 y_n - x_{n+1}y_n - x_1 y_{n+1} - x_n y_1\right|$$

$\Updownarrow$

$$A_{n+1} = \frac{1}{2}\left|x_1 y_2 + x_2 y_3 + \ldots \cancel{+x_n y_1} - x_2 y_1 - x_3 y_2 - \ldots \cancel{-x_1 y_n} + x_n y_{n+1} + x_{n+1}y_1 \cancel{+x_1 y_n} - x_{n+1}y_n - x_1 y_{n+1} \cancel{-x_n y_1}\right|$$

$\Updownarrow$

$$A_{n+1} = \frac{1}{2}\left|x_1 y_2 + x_2 y_3 + \ldots + x_n y_{n+1} + x_{n+1}y_1 - x_2 y_1 - x_3 y_2 - \ldots - x_{n+1}y_n - x_1 y_{n+1}\right|$$

… Hvilket beviser ved induktion, at formlen er rigtig!

Man kunne her indvende: ”Hvad nu, hvis det nye punkt var på **indersiden** af den originale polygon?”

I det tilfælde ville den nye trekant, P_n, P_{n+1}, P_1 blive navngivet i rækkefølge **med** uret, og ikke mod uret. Så ville arealet af den nye trekant, A_t, blive udregnet som negativt. Den algebraiske addition af trekantens areal til den oprindelige n-kant, A_n, resulterer således i et nyt og mindre areal af den nye $n+1$-kant, A_{n+1}.

Q.E.D.

Dette bevis er væsentligt inspireret af beviset, som findes på Internetsiden:

http://2000clicks.com/mathhelp/GeometryPolygonAreaDeterminant.aspx 26-02-2014, 19:53

Dog er der tilføjet ekstra oplysninger og udregninger samt – indlysende nok – en oversættelse.

17 - Tværvektor

Givet en vektor, $\vec{a}$, som kan noteres ved sin længde, $\ell = |\vec{a}|$, og vinkel, *v*, i forhold til *x*-aksen.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\vec{a}| \cdot \cos(v) \\ |\vec{a}| \cdot \sin(v) \end{pmatrix}$$

Tværvektoren $\hat{a}$ til vektor $\vec{a}$, er drejet $90°$ i den positive omløbsretning i forhold til vektor $\vec{a}$, og som har samme længde som vektor $\vec{a}$.

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} |\vec{a}| \cdot \cos(v + 90°) \\ |\vec{a}| \cdot \sin(v + 90°) \end{pmatrix}$$

Yderligere vides det fra den klassiske geometri at:

$\cos(v + 90°) = -\sin(v)$, og

$\sin(v + 90°) = \cos(v)$

Altså kan det konkluderes:

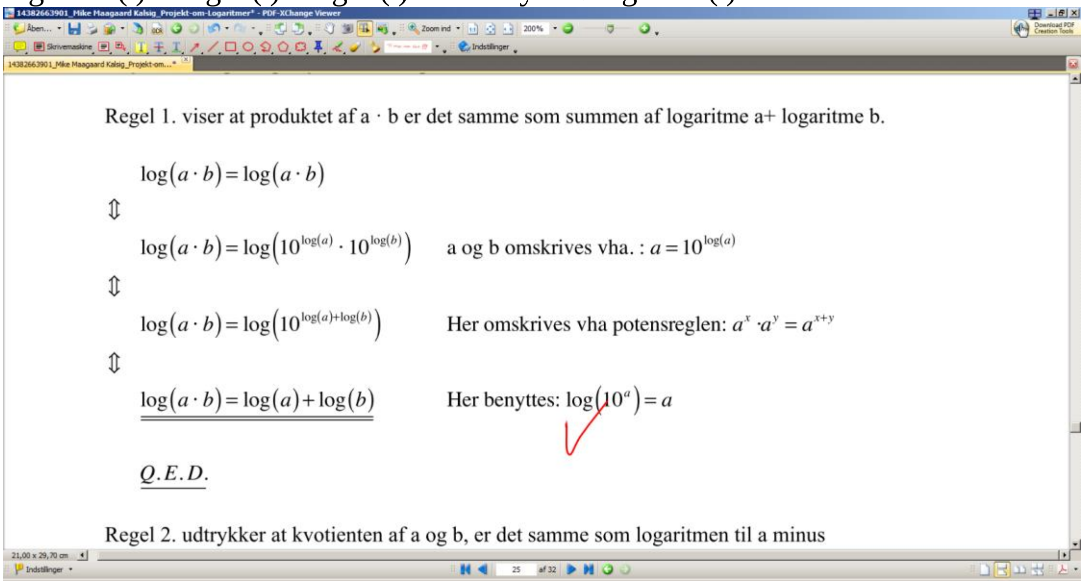
$$\hat{a} = \begin{pmatrix} |\vec{a}| \cdot \cos(v + 90°) \\ |\vec{a}| \cdot \sin(v + 90°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\vec{a}| \cdot (-\sin(v)) \\ |\vec{a}| \cdot \cos(v) \end{pmatrix}$$

hvilket sluttelig skrives som:

$$\underline{\underline{\hat{a} = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}}}$$

Q.E.D.

log a · b ( ) = log a · b ( )
!
log a · b ( ) = log 10
log a ( )
· 10
log b ( ) ( ) a og b omskrives vha. : a = 10
log a ( )
!
log a · b ( ) = log 10
log a ( )+log b ( ) ( ) Her omskrives vha potensreglen: a x ·a y = a x+y
!
log a · b ( ) = log a ( )+ log b ( ) Her benyttes: log 10 a ( ) = a



Regel 1. viser at produktet af a · b er det samme som summen af logaritme a+ logaritme b.

$$\log(a\cdot b)=\log(a\cdot b)$$

$\Updownarrow$

$$\log(a\cdot b)=\log\left(10^{\log(a)}\cdot 10^{\log(b)}\right) \qquad \text{a og b omskrives vha. : } a=10^{\log(a)}$$

$\Updownarrow$

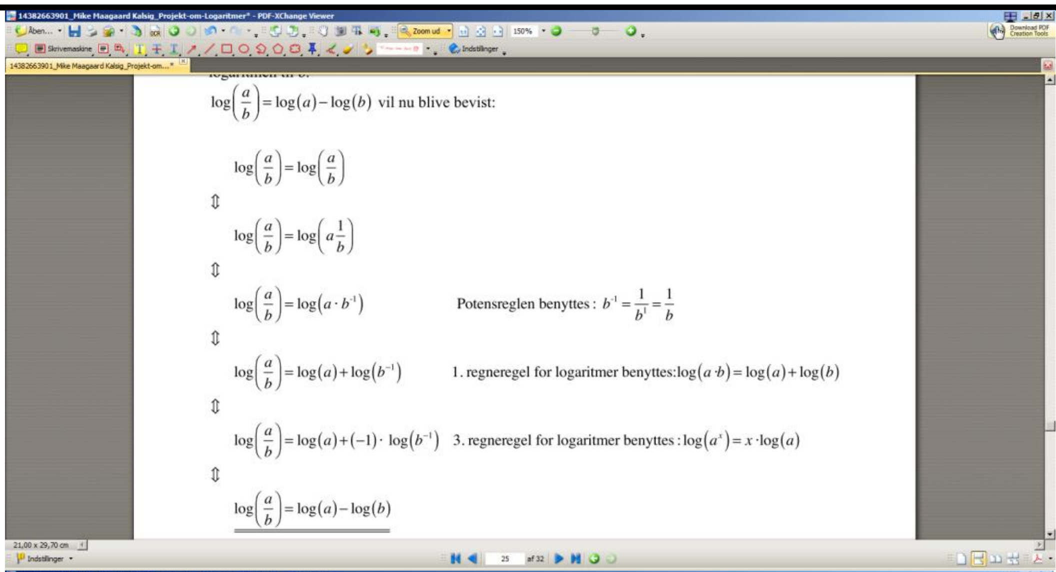
$$\log(a\cdot b)=\log\left(10^{\log(a)+\log(b)}\right) \qquad \text{Her omskrives vha potensreglen: } a^x\cdot a^y=a^{x+y}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{\log(a\cdot b)=\log(a)+\log(b)}} \qquad \text{Her benyttes: } \log\left(10^a\right)=a$$

$\underline{Q.E.D.}$

Regel 2. udtrykker at kvotienten af a og b, er det samme som logaritmen til a minus



$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$ vil nu blive bevist:

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log\left(\frac{a}{b}\right)$$

$\Updownarrow$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log\left(a\frac{1}{b}\right)$$

$\Updownarrow$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log\left(a \cdot b^{-1}\right) \qquad \text{Potensreglen benyttes: } b^{-1} = \frac{1}{b^1} = \frac{1}{b}$$

$\Updownarrow$

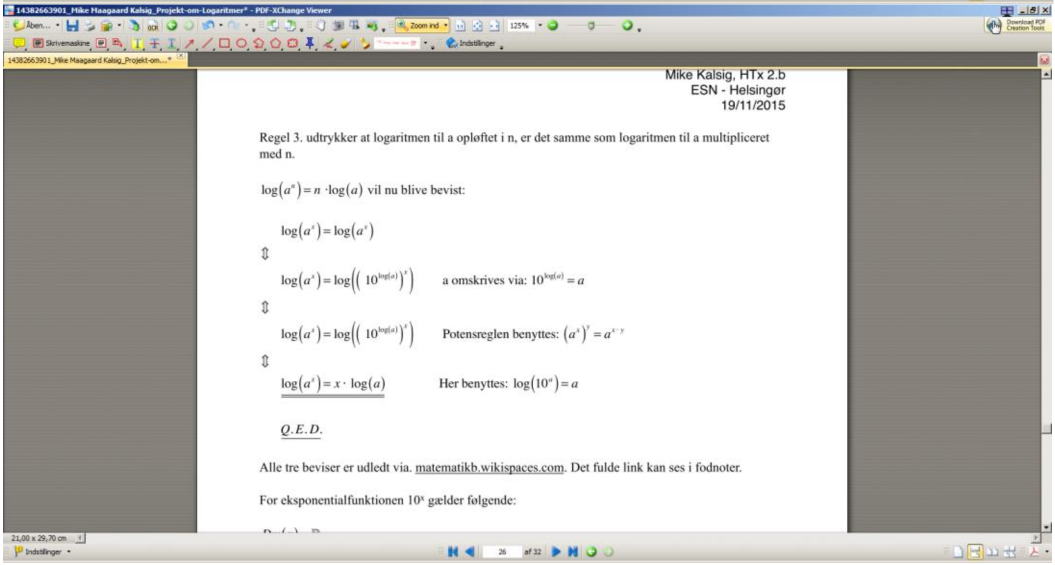
$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) + \log\left(b^{-1}\right) \qquad \text{1. regneregel for logaritmer benyttes:} \log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$$

$\Updownarrow$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) + (-1) \cdot \log\left(b^{-1}\right) \qquad \text{3. regneregel for logaritmer benyttes:} \log\left(a^x\right) = x \cdot \log(a)$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)}}$$



Mike Kalsig, HTx 2.b
ESN - Helsingør
19/11/2015

Regel 3. udtrykker at logaritmen til a opløftet i n, er det samme som logaritmen til a multipliceret med n.

$\log\left(a^n\right) = n \cdot \log(a)$ vil nu blive bevist:

$$\log\left(a^x\right) = \log\left(a^x\right)$$

$\Updownarrow$

$$\log\left(a^x\right) = \log\left(\left(10^{\log(a)}\right)^x\right) \qquad \text{a omskrives via: } 10^{\log(a)} = a$$

$\Updownarrow$

$$\log\left(a^x\right) = \log\left(\left(10^{\log(a)}\right)^x\right) \qquad \text{Potensreglen benyttes: } \left(a^x\right)^y = a^{x \cdot y}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{\log\left(a^x\right) = x \cdot \log(a)}} \qquad \text{Her benyttes: } \log\left(10^a\right) = a$$

$\underline{Q.E.D.}$

Alle tre beviser er udledt via. matematikb.wikispaces.com. Det fulde link kan ses i fodnoter.

For eksponentialfunktionen 10^x gælder følgende: