

MATEMATIK

NOTAT

MATEMATISKE BEVISER



AF:

CAND. POLYT.

MICHEL MANDIX

SIDSTE REVISION: FEBRUAR 2014

Indholdsfortegnelse:

INDHOLDSFORTEGNELSE:	2
EN TREKANTS VINKELSUM.....	3
PYTHAGORAS' LÆRESÆTNING	4
SINUSRELATIONERNE	4
COSINUSRELATIONERNE.....	6
2. GRADSLIGNINGEN.....	10
2. GRADSLIGNINGEN – ALTERNATIVT BEVIS.....	12
TOPPUNKTSFORMLEN	14
RUMFANG AF PYRAMIDESTUB	16
SKALARPRODUKT OG VINKEL MELLEM VEKTORER.....	21
DEN RETTE LINIE.....	28
EKSPONENTIALFUNKTIONEN	30
AREALBEREGNING AF N-SIDET POLYGON VED BRUG AF DETERMINANT.....	34

Vinkelsummen i en trekant = 180°

Side 3 af 35

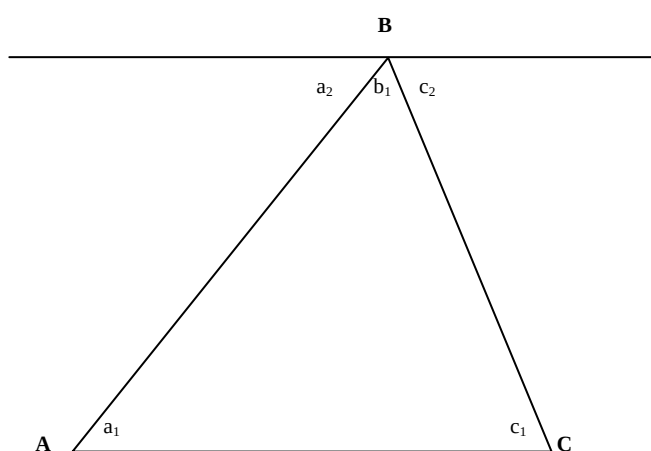
En trekants vinkelsum

Vi ønsker at bevise, at vinkelsummen i en trekant – altså værdierne af de tre vinkler lagt sammen er 180° .

Eller matematisk skrevet: $\sum_{i=1}^3 v_i = v_1 + v_2 + v_3 = 180^\circ$.

Dette kan ses af nedenstående figur. Husk at en fuld cirkel er defineret som 360° , og derfor er vinklen i en halvcirkel – f.eks. fra det yderste punkt til højre på cirklen og det yderste punkt til venstre – lig med 180° , da man i udgangspunktet står i cirkelns centrum.

Med andre ord: ”Hvis man står på en ret linie, så er der to retninger man kan følge linien. Enten den ene eller den anden vej. Og vinklen mellem de to retninger – som er modsat rettede – er 180° .”



Idet vi tegner linien gennem pkt. B, som er parallel med linien AC, ser vi, da vi ved at to modsat rettede retninger har vinklen 180° , at:

$$\angle a_2 + \angle b_1 + \angle c_2 = 180^\circ$$

Samtidig ved vi, at:

$$\angle a_1 = \angle a_2 \text{ og } \angle c_1 = \angle c_2$$

Ved simpel substitution, fås at:

$$\sum_{i=1}^3 v_i = v_1 + v_2 + v_3 = \angle a_1 + \angle b_1 + \angle c_1 = 180^\circ,$$

hvorved sætningen er bevist!

Q.E.D.

Pythagoras' Læresætning

Side 4 af 35

Vi ønsker at bevise grundformlen: $c^2 = a^2 + b^2$!

Det ses umiddelbart at arealet af det inderste kvadrat er lig med:

$$\underline{A_{\text{Lille Kvadrat}} = c^2}$$

Ligeledes har vi arealet af det store kvadrat:

$$A_{\text{Stor Kvadrat}} = (a + b)^2$$

⇓

Kvadratsætningerne

$$\underline{A_{\text{Stor Kvadrat}} = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b}$$

Der er fire trekanter. En i hvert hjørne.

Arealet af en enkelt trekant beregnes som:

$$A_{\text{Trekant}} = \frac{1}{2} \cdot \text{Højde} \cdot \text{Grundlinie}$$

⇓

$$\underline{A_{\text{Trekant}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b}$$

Men der er jo som sagt fire trekanter, og deres samlede areal er:

$$A_{\text{Alle Trekanter}} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$

⇓

$$\underline{A_{\text{Alle Trekanter}} = 2 \cdot a \cdot b}$$

Så arealet af det lille kvadrat kan vel også skrives som arealet af det store kvadrat minus arealet af de fire trekanter. Tænk blot på, at tegne det store kvadrat og klippe de fire små trekanter fra. Tilbage sidder man med det lille kvadrat.

$$A_{\text{Lille Kvadrat}} = A_{\text{Stor Kvadrat}} - A_{\text{Alle Trekanter}}$$

⇓

$$A_{\text{Lille Kvadrat}} = a^2 + b^2 + \cancel{2 \cdot a \cdot b} - \cancel{2 \cdot a \cdot b}$$

⇓

$$\underline{A_{\text{Lille Kvadrat}} = a^2 + b^2}$$

Nu har vi fundet ud af, at arealet af det lille kvadrat er lig med c^2 , men vi har også fundet ud af, at arealet af det lille kvadrat er lig med $a^2 + b^2$.

Da det er det samme kvadrat er $c^2 = a^2 + b^2$

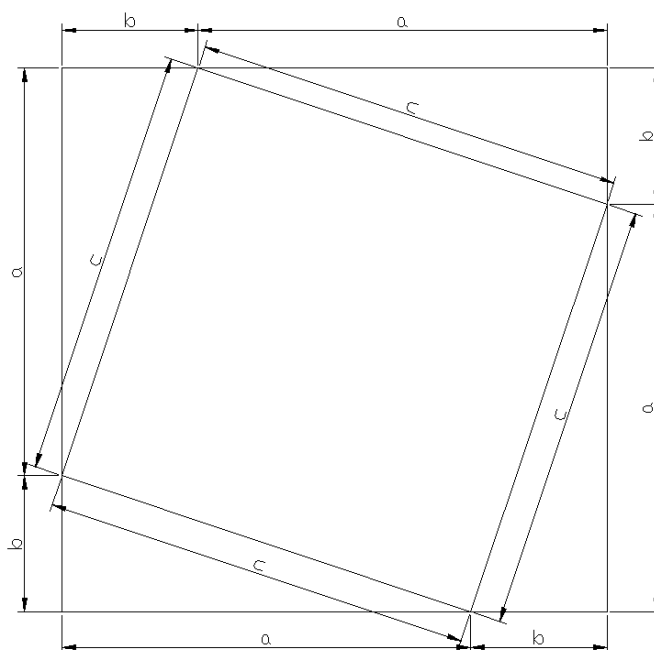
Q.E.D.

Husk, at Pythagoras' Læresætning *KUN* gælder for retvinklede trekanter!!!

Pythagoras' Læresætning er igennem tiderne blevet bevist på mindst 365 forskellige måder. Det er nemt at huske... Det er en ny bevisførelse for hver dag i året...

De forskellige beviser kan læses i denne bog, hvis man vil dedikere resten af sit liv til Pythagoras...

Loomis, Elisha Scott (1968), The Pythagorean Proposition, The National Council of Teachers of Mathematics.



Sinusrelationerne

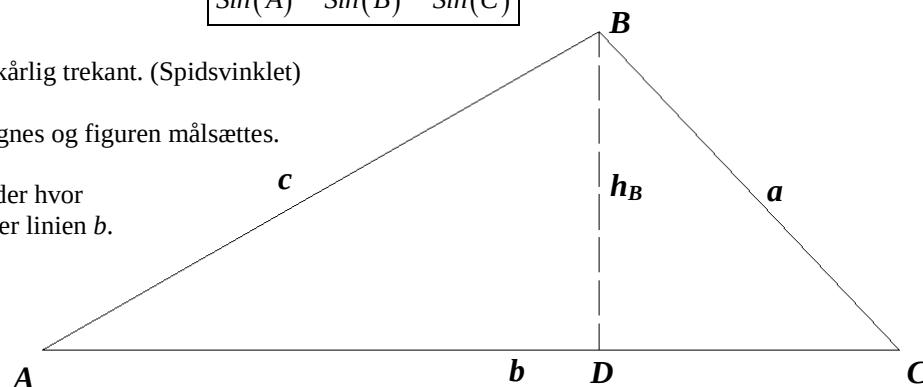
Side 5 af 35

Vi ønsker at bevise følgende sætning: $\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$ (Sinusrelationerne)

Først tegnes en vilkårlig trekant. (Spidsvinklet)

Højden fra B indtegnes og figuren målsættes.

Punkt D indføres, der hvor højden fra B rammer linien b .



Som det ses, inddeler højden fra pkt. B den vilkårlige trekant i to retvinklede trekanter.

Hvis vi betragter den ”venstre” retvinklede trekant, trekant ABD , kan vi opstille følgende ligning med de sædvanlige ”værktøjer” for den retvinklede trekant:

$$\sin(A) = \frac{\text{Modstående Katete}}{\text{Hypotenusen}} = \frac{h_B}{c}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{h_B = c \cdot \sin(A)}$$

Og ser vi tilsvarende på den ”højre” retvinklede trekant, trekant BCD , fås et lignende udtryk:

$$\sin(C) = \frac{\text{Modstående Katete}}{\text{Hypotenusen}} = \frac{h_B}{a}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{h_B = a \cdot \sin(C)}$$

Det er den samme h_B i de to ligninger. Der er jo ikke tegnet en ny trekant i mellemtiden. Derfor kan følgende skrives:

$$c \cdot \sin(A) = a \cdot \sin(C)$$

$$\Downarrow \quad \text{Almindelig division giver:}$$

$$\underline{\frac{c}{\sin(C)} = \frac{a}{\sin(A)}}$$

Det er ganske vist kun en del af sinusrelationen (den hedder jo egentlig: $\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$),

men resten kan nemt indses ved at tegne højden fra enten pkt. A eller pkt. C , og så køre beviset igen. (I princippet, kan man blot nøjes med at ændre navnene på trekantens hjørner og køre beviset igen. Da kan man undlade at ”dreje” hele figuren og tegne nye højder...)

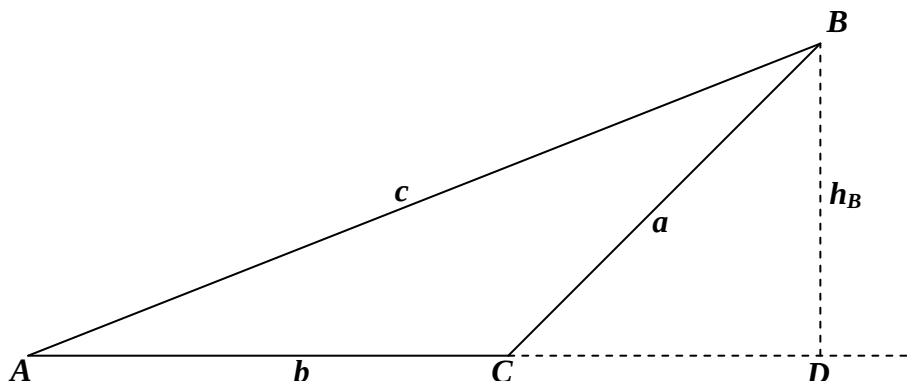
Q.E.D.

Sinusrelationerne

Side 6 af 35

Men hvad nu hvis trekanten er stumpvinklet i stedet for spidsvinklet?

Det viser sig, at beviset er fuldstændig analogt med det allerede viste bevis for den spidsvinklede trekant:



Som det ses, danner højden fra pkt. B den vilkårlige trekant to retvinklede trekanter, ABD og BCD.

Hvis vi betragter den ”venstre” retvinklede trekant, trekant ABD, kan vi opstille følgende ligning med de sædvanlige ”værktøjer” for den retvinklede trekant:

$$\sin(A) = \frac{\text{Modstående Katete}}{\text{Hypotenusen}} = \frac{h_B}{c}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{h_B = c \cdot \sin(A)}$$

Og ser vi tilsvarende på den ”højre” retvinklede trekant, trekant BCD, fås et lignende udtryk:

$$\sin(C) = \frac{\text{Modstående Katete}}{\text{Hypotenusen}} = \frac{h_B}{a}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{h_B = a \cdot \sin(C)}$$

Det er den samme h_B i de to ligninger. Der er jo ikke tegnet en ny trekant i mellemtiden. Derfor kan følgende skrives:

$$c \cdot \sin(A) = a \cdot \sin(C)$$

$$\Downarrow \quad \text{Almindelig division giver:}$$

$$\underline{\frac{c}{\sin(C)} = \frac{a}{\sin(A)}}$$

Det er ganske vist kun en del af sinusrelationen (den hedder jo egentlig: $\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$),

men resten kan nemt indses ved at tegne højden fra enten pkt. A eller pkt. C, og så køre beviset igen. (I princippet, kan man blot nøjes med at ændre navnene på trekantens hjørner og køre beviset igen. Da kan man undlade at ”dreje” hele figuren og tegne nye højder...)

Q.E.D.

Cosinusrelationerne

Side 7 af 35

Vi ønsker at bevise følgende sætninger:

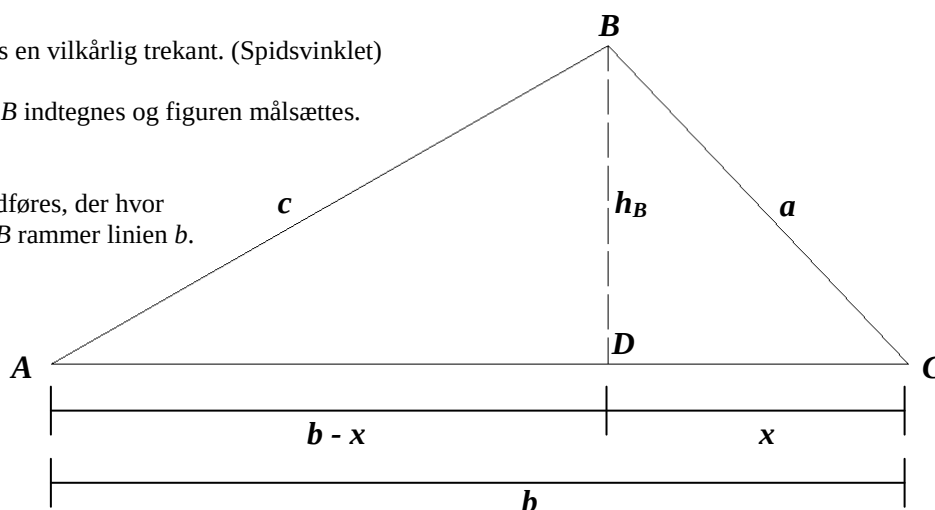
$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A) \Rightarrow \cos(A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(B) \Rightarrow \cos(B) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(C) \Rightarrow \cos(C) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} \end{aligned}$$

der jo tilsammen udgør cosinusrelationerne...

Først tegnes en vilkårlig trekant. (Spidsvinklet)

Højden fra B indtegnes og figuren målsættes.

Punkt D indføres, der hvor
højden fra B rammer linien b .



Som det ses, inddeler højden fra pkt. B den vilkårlige trekant i to retvinklede trekanter.

Hvis vi betragter den "venstre" retvinklede trekant, trekant ABD , kan vi opstille følgende ligning med de sædvanlige "værktøjer" for den retvinklede trekant – i dette tilfælde: Pythagoras' Læresætning:

$$\begin{aligned} c^2 &= h_B^2 + (x - b)^2 \\ \Downarrow & \quad \text{Ser man nøje efter, er det blot Pythagoras' Læresætning.} \\ & \quad \text{Derefter bruges kvadratsætningerne til at rydde op...} \\ c^2 &= h_B^2 + (x^2 + b^2 - 2 \cdot x \cdot b) \\ \Downarrow & \quad \text{Parentesen hæves...} \\ c^2 &= h_B^2 + x^2 + b^2 - 2 \cdot x \cdot b \end{aligned}$$

Og ser vi tilsvarende på den "højre" retvinklede trekant, trekant BCD , fås et lignende udtryk:

$$\begin{aligned} a^2 &= h_B^2 + x^2 \\ \Downarrow \\ h_B^2 &= a^2 - x^2 \end{aligned}$$

Cosinusrelationerne

Side 8 af 35

Resultatet af den seneste udregning, h_B^2 , indsættes i den første udregning:

$$\begin{aligned}
 c^2 &= h_B^2 + x^2 + b^2 - 2 \cdot x \cdot b \\
 \Downarrow & \quad \text{Udtrykket for } h_B^2 \text{ indsættes} \\
 c^2 &= a^2 - \cancel{x^2} + \cancel{x^2} + b^2 - 2 \cdot x \cdot b \\
 \Downarrow & \quad \text{Og der ryddes op...} \\
 c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot x \cdot b
 \end{aligned}$$

Det eneste problem er dog nu, at vi ikke kender 'x'! Men vha. de 'gamle' regneregler for den retvinklede trekant, kan 'x' nemt findes... Se blot på tegningen igen, og betragt specielt trekanten BCD. Her gælder:

$$\begin{aligned}
 \cos(v) &= \frac{\text{Hosliggende Katete}}{\text{Hypotenusen}} \\
 \Downarrow & \\
 \cos(C) &= \frac{x}{a} \\
 \Downarrow & \\
 x &= a \cdot \cos(C), \text{ hvilket indsættes i den forrige udregning...} \\
 c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot x \cdot b \\
 \Downarrow & \\
 c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot \cos(C) \cdot b \\
 \Downarrow & \quad \text{Og hvis der ændres lidt på faktorenes rækkefølge...} \\
 c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(C)
 \end{aligned}$$

Det ses, at resultatet er den ene af ligningerne i det, som tidligere blev præsenteret som "Cosinusrelationerne", men resten kan nemt indses – som det var tilfældet ved Sinusrelationen – ved at tegne højden fra enten pkt. A eller pkt. C, og så køre beviset igen. (I princippet, kan man blot nøjes med at ændre navnene på trekantens hjørner og køre beviset igen. Da kan man undlade at "dreje" hele figuren og tegne nye højder...)

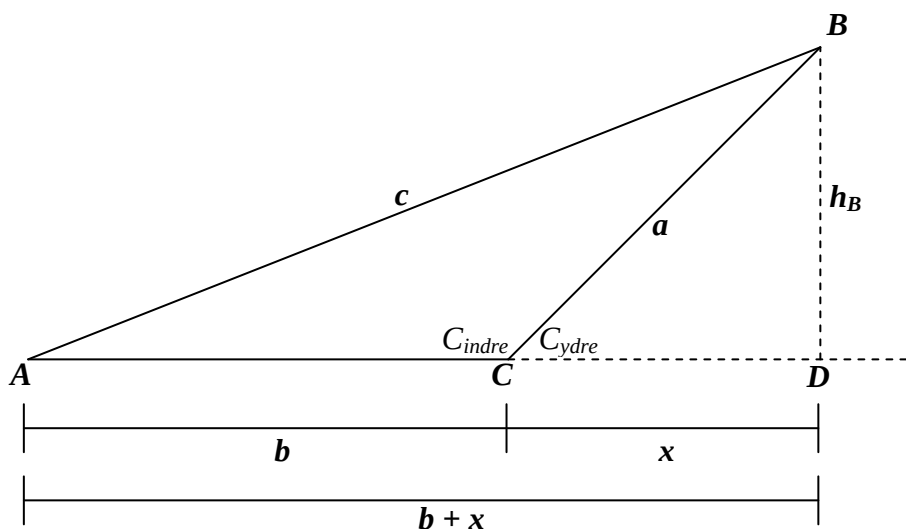
Q.E.D.

Cosinusrelationerne

Side 9 af 35

Men hvad nu hvis trekanten er stumpvinklet i stedet for spidsvinklet?

Det viser sig, at beviset er stort set analogt med det allerede viste bevis for den spidsvinklede trekant, men dog med en lille krølle! Den beskrives senere:



Som det ses, danner højden fra pkt. B den vilkårlige trekant to retvinklede trekanter, ABD og BCD .

Hvis vi betragter den ”store” retvinklede trekant, trekant ABD , kan vi opstille følgende ligning med de sædvanlige ”værktøjer” for den retvinklede trekant – i dette tilfælde: Pythagoras’ Læresætning:

$$\begin{aligned}
 c^2 &= h_B^2 + (x+b)^2 \\
 \Downarrow & \quad \text{Ser man nøje efter, er det blot Pythagoras' Læresætning.} \\
 & \quad \text{Derefter bruges kvadratsætningerne til at rydde op...} \\
 c^2 &= h_B^2 + (x^2 + b^2 + 2 \cdot x \cdot b) \\
 \Downarrow & \quad \text{Parentesen hæves...} \\
 c^2 &= h_B^2 + x^2 + b^2 + 2 \cdot x \cdot b
 \end{aligned}$$

Og ser vi tilsvarende på den ”lille” retvinklede trekant, trekant BCD , fås et lignende udtryk:

$$\begin{aligned}
 a^2 &= h_B^2 + x^2 \\
 \Downarrow \\
 h_B^2 &= a^2 - x^2
 \end{aligned}$$

Resultatet af den seneste udregning, h_B^2 , indsættes i den første udregning:

$$\begin{aligned}
 c^2 &= h_B^2 + x^2 + b^2 + 2 \cdot x \cdot b \\
 \Downarrow & \quad \text{Udtrykket for } h_B^2 \text{ indsættes} \\
 c^2 &= a^2 - \cancel{x^2} + \cancel{x^2} + b^2 + 2 \cdot x \cdot b \\
 \Downarrow & \quad \text{Og der ryddes op...} \\
 c^2 &= a^2 + b^2 + 2 \cdot x \cdot b
 \end{aligned}$$

Cosinusrelationerne

Side 10 af 35

Det eneste problem er dog nu, at vi ikke kender 'x'! Men vha. de 'gamle' regneregler for den retvinklede trekant, kan 'x' nemt findes... Se blot på tegningen igen, og betragt specielt trekanten BCD . Her gælder:

$$\begin{aligned}\cos(v) &= \frac{\text{Hosliggende Katete}}{\text{Hypotenusen}} \\ \Downarrow \\ \cos(C) &= \frac{x}{a} \\ \Downarrow \\ x &= a \cdot \cos(C)\end{aligned}$$

Men trekant BCD er jo kun en hjælpetrekant, som ligger helt uden for den egentlige trekant ABC . Og det bemærkes, at vi har fundet "ydresiden" af vinklen C - C_{ydre} . Vi skal jo bruge C_{indre} .

Men vinklerne C_{ydre} og C_{indre} er jo supplementvinkler. Og det betyder, at:

$$\cos(180^\circ - v) = -\cos(v)$$

Eller i vores tilfælde:

$$\cos(C_{indre}) = -\cos(C_{ydre})$$

Og nu ikke mere snak om "indre" og "ydre"... (Det indførte vi kun for bedre at kunne forstå problematikken omkring vinkel C .) Det ses, at vi rent faktisk overhovedet ikke benytter " C_{indre} ", og derfor kalder vi blot fremover " C_{ydre} " for " C ".

Altså er:

$$\begin{aligned}x &= a \cdot (-\cos(C)) \\ \Downarrow \\ x &= -a \cdot \cos(C), \text{ hvilket indsættes i den forrige udregning...}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c^2 &= a^2 + b^2 + 2 \cdot x \cdot b \\ \Downarrow \\ c^2 &= a^2 + b^2 + 2 \cdot (-a \cdot \cos(C)) \cdot b \\ \Downarrow &\quad \text{Og hvis parentesen hæves, og der ændres lidt på faktorerens rækkefølge...} \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(C)\end{aligned}$$

Det ses, at resultatet er den ene af ligningerne i det, som tidligere blev præsenteret som "Cosinusrelationerne", men resten kan nemt indsættes – som det var tilfældet ved Sinusrelationen – ved at tegne højden fra enten pkt. A eller pkt. C, og så køre beviset igen. (I princippet, kan man blot nøjes med at ændre navnene på trekantens hjørner og køre beviset igen. Da kan man undlade at "dreje" hele figuren og tegne nye højder...)

Q.E.D.

2. Gradsligningen

Side 11 af 35

Beviset for at løsningerne til $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ kan udregnes som:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2 \cdot a}, \text{ hvor } d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c :$$

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

⇕

Gang med $4a$ på begge sider

$$4 \cdot a^2 \cdot x^2 + 4 \cdot a \cdot b \cdot x + 4 \cdot a \cdot c = 0$$

⇕

Læg $b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ til på begge sider

$$4 \cdot a^2 \cdot x^2 + 2 \cdot 2 \cdot a \cdot x \cdot b + b^2 = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$

⇕

Kvadratsætning

$$(2 \cdot a \cdot x + b)^2 = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

⇕

$$d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$(2 \cdot a \cdot x + b)^2 = d$$

← Ligning 1

Her har vi indført størrelsen $d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$, som også kaldes for andengradsligningens **diskriminant**. Det viser sig, at den videre løsning af ligningen afhænger af fortegnet for d .

$d < 0$

I **ligning 1**, vil højre side da være negativ, mens venstre side altid er positiv (eller 0).

(Noget i anden potens vil altid være positivt eller 0).

Derfor findes der **ingen** værdier af x , der opfylder ligningen.

$d = 0$

Ligning 1 har i dette tilfælde udseendet:

$$(2 \cdot a \cdot x + b)^2 = d$$

⇕

$$(2 \cdot a \cdot x + b) \cdot (2 \cdot a \cdot x + b) = 0$$

⇕

$$(2 \cdot a \cdot x + b) = 0$$

⇕

$$2 \cdot a \cdot x = -b$$

⇕

$$x = \frac{-b}{2 \cdot a}$$

- Altså har ligningen netop 1 løsning.

$d > 0$

Ligning 1 kan videre omskrives således:

$$(2 \cdot a \cdot x + b)^2 = d$$

⇕

$$2 \cdot a \cdot x + b = \pm \sqrt{d}$$

⇕

$$2 \cdot a \cdot x = -b \pm \sqrt{d}$$

⇕

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2 \cdot a}$$

- Altså har ligningen 2 løsninger.

Q.E.D.

2. Gradsligningen

Side 12 af 35

En anden alternativ metode til at eftervise andengradsligningens løsninger, er en metode, som til dels også benyttes til udledning af toppunktsformlen. I modsætning til det forrige bevis, anskueliggøres de forskellige antal løsninger ikke her. Udelukkende selve formelen udledes.

Et andengradspolynomium har forskriften: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Vi ønsker at bevise nulpunktsformlen: $x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2 \cdot a}$.

Koordinaterne til toppunktet kan udledes af følgende omskrivning:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Sætter a udenfor parentesen

$$= a \left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} \right)$$

Lægger $\frac{b^2}{4a^2}$ til og trækker $\frac{b^2}{4a^2}$ fra

$$= a \left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} \right)$$

$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = x^2 + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{bx}{a}$ (Kvadratsætning)

$$= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right)$$

De to sidste led sættes på fælles brøkstreg

$$= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right)$$

Der skiftes fortegn i det andet led

$$= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{-4ac + b^2}{4a^2} \right)$$

Bytter om på leddene i tælleren i det andet led

$$= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)$$

$d = b^2 - 4ac$

$$= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{d}{4a^2} \right)$$

Det andet led sættes udenfor parentesen

$$= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{d}{4a}$$

2. Grads ligningen

Side 13 af 35

Eventuelle nulpunkter vil forekomme for $y = f(x) = 0$, hvilket ifølge ovenstående omskrivning er det samme som:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{d}{4a} = 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{d}{4a} = 0$$

⇕

Flytter det andet led over på den anden side

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{d}{4a}$$

⇕

Dividerer med a

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{d}{4a^2}$$

⇕

Tager kvadratroden på begge sider

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{d}{4a^2}}$$

⇕

Isolerer x ved at flytte $\frac{b}{2a}$ over på den anden side og reducerer

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{d}}{2a}$$

⇕

Sætter på fælles brøkstreg

$$\underline{\underline{x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}}}$$

Q.E.D.

Toppunktsformlen

Side 14 af 35

Et andengradspolynomium har forskriften: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Vi ønsker at bevise toppunktsformlen: $TP = (x; y) = \left(\frac{-b}{2a}; \frac{-d}{4a}\right)$.

Koordinaterne til toppunktet kan udledes af følgende omskrivning:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Sætter a udenfor parentesen

$$= a \left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} \right)$$

Lægger $\frac{b^2}{4a^2}$ til og trækker $\frac{b^2}{4a^2}$ fra

$$= a \left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} \right)$$

$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = x^2 + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{bx}{a}$ (Kvadratsætning)

$$= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right)$$

De to sidste led sættes på fælles brøkstreg

$$= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right)$$

Der skiftes fortegn i det andet led

$$= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{-4ac + b^2}{4a^2} \right)$$

Bytter om på leddene i tælleren i det andet led

$$= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)$$

$d = b^2 - 4ac$

$$= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{d}{4a^2} \right)$$

Det andet led sættes udenfor parentesen

$$= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{d}{4a}$$

Toppunktsformlen

Side 15 af 35

Den inderste parentes i det andet led er opløftet i 2. potens, så derfor vil den altid være positiv eller mindst lig med nul.

Da hele udtrykket er en funktion, hvor x er den uafhængige variabel, og da det sidste led ikke indeholder x er det dermed det første led, som primært dikterer funktionsværdien.

Men parentesen er jo positiv eller nul, og dermed er det a , som er den styrende faktor.

Så hvis a er positiv, vil $f(x)$ antage sin **mindste** værdi når parentesen er lig med 0.

Dvs. når $\left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0$, hvilket kun er muligt når $x = \underline{\underline{\frac{-b}{2a}}}$.

På samme måde – hvis a er negativ – vil $f(x)$ antage sin **største** værdi når parentesen er lig med 0, og dermed når $x = \underline{\underline{\frac{-b}{2a}}}$, hvilket ses at være det samme, som for når a er positiv.

I begge tilfælde, vil det første led være lig med 0, og funktionsværdien bliver derfor:

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-d}{4a},$$

hvilket vil sige, at toppunktet, TP, forekommer for $x = \underline{\underline{\frac{-b}{2a}}}$ og $y = \underline{\underline{\frac{-d}{4a}}}$.

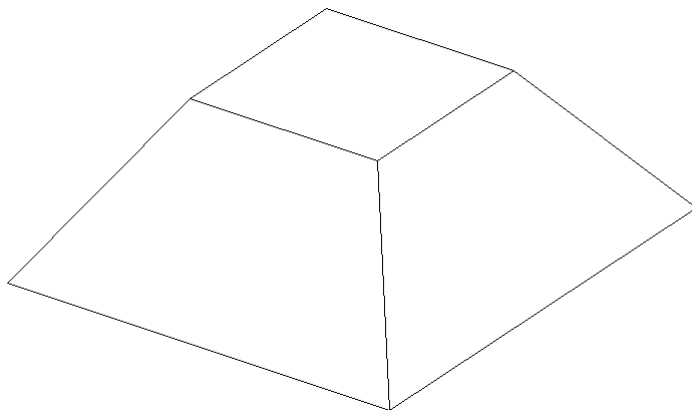
$$\underline{\underline{TP = (x; y) = \left(\frac{-b}{2a}; \frac{-d}{4a}\right)}}$$

Q.E.D.

Rumfang af pyramidestub

Side 16 af 35

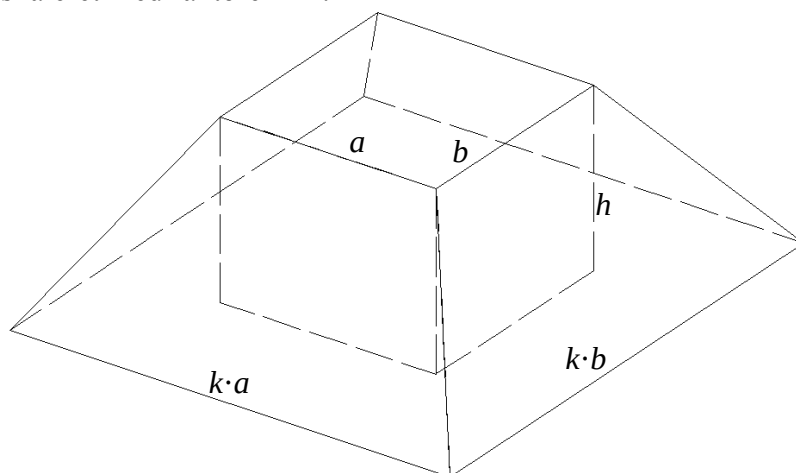
Vi ønsker at bevise at formlen: $V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (G + g + \sqrt{G \cdot g})$ er sand.



En pyramidestub...

Ikke nødvendigvis kvadratisk,
men rektangulær, dvs. alle
vandrette vinkler er 90°!

Vi sætter mål på, idet vi går ud fra at bunden og toppen har samme form, men blot er skaleret med faktoren 'k'.



Den lodrette afstand
mellem de to vandrette
planer – 'Top' og
'Bund' sættes til 'h'

Heraf kan det ses, at:

$$\text{Grundflade}_{\text{ lille}} = a \cdot b = g$$

$$\text{Grundflade}_{\text{ stor}} = k \cdot a \cdot k \cdot b = k^2 \cdot a \cdot b = G$$

$$G \cdot g = k^2 \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b = k^2 \cdot a^2 \cdot b^2$$

⇓

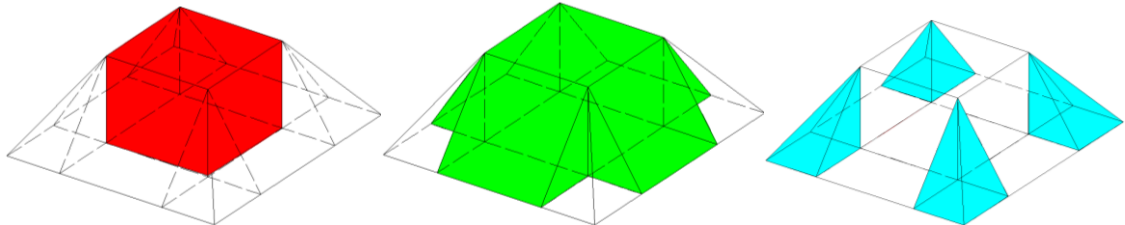
$$kab = \sqrt{G \cdot g}$$

Rumfang af pyramidestub

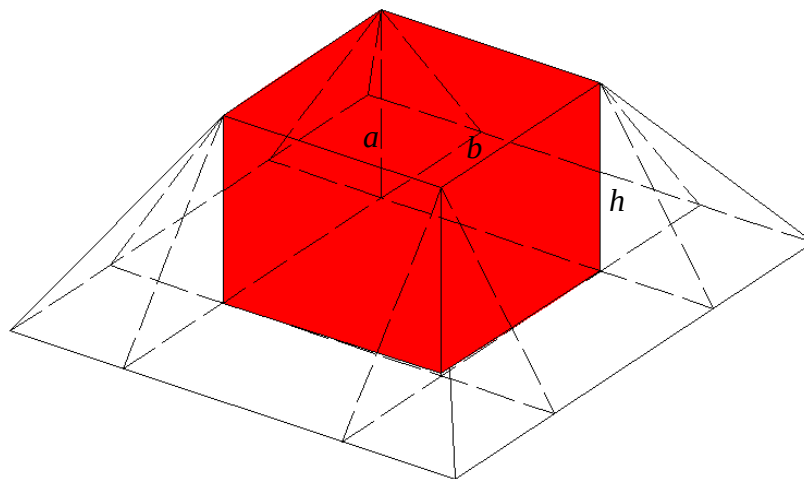
Side 17 af 35

Pyramidestubben inddeles i 3 dele:

1. Den store kasse i midten (Rød)
2. De fire prismer i siderne (Grøn)
3. De fire pyramider i hjørnerne (Cyan)



Vi begynder med den inderste kasse. Som bekendt er rumfanget af en kasse lig med grundflade gange med højden.



Da grundfladen er den samme som topfladen, må rumfanget være lig med:

$$V_{\text{kasse}} = a \cdot b \cdot h$$

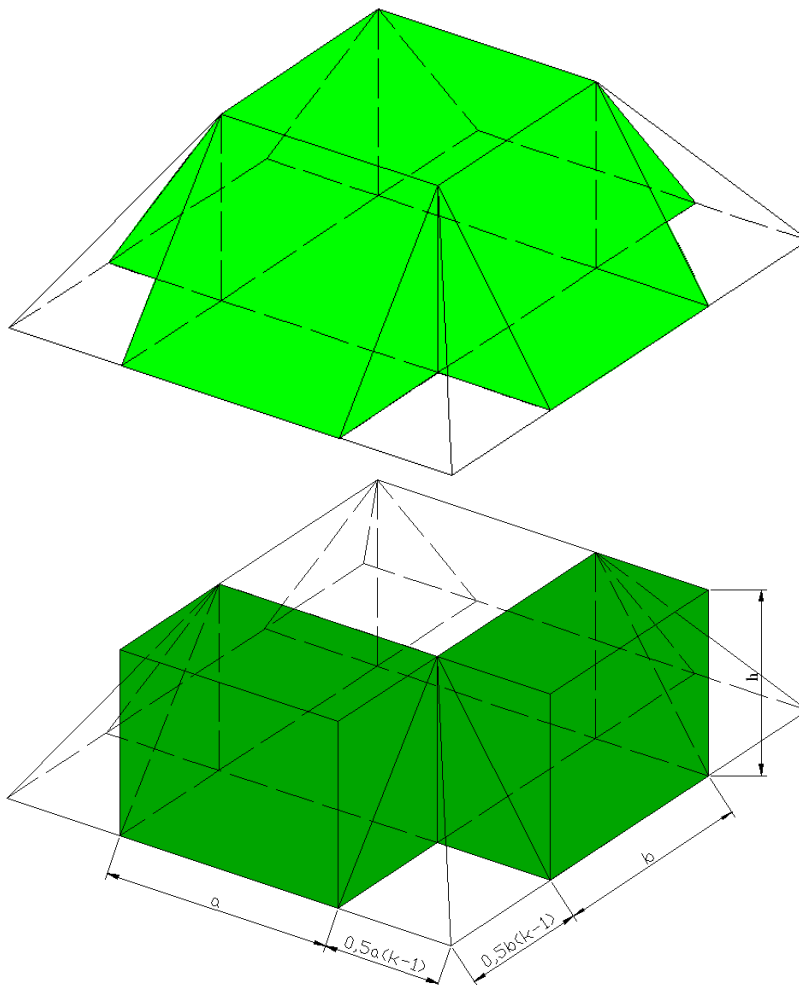
Dernæst kommer de fire prismer, som sidder på hver side af pyramidestubben. De sidder, som de ses på næste figur og vises med lys grøn farve.

Men man kan indse, at hvis man tager de prismer, som sidder på "bagsiderne" af pyramidestubben, og drejer dem 180° i forhold til lodret, så kan de "lægges sammen" med de prismer, som sidder på de modsatte sider.

Ved denne manøvre, skal der derved blot regnes på to "kasser", som ses med mørkegrøn på næste figur.

Rumfang af pyramidestub

Side 18 af 35



Da sidelængden i bunden er lig med $k \cdot a$, må ”kassernes” ”dybde” være lig med halvdelen af forskellen mellem sidelængden i top og sidelængden i bund, da forskellen fordeles jævnt i begge sider.

$$\frac{1}{2} \cdot (k \cdot a - a) = \frac{1}{2} \cdot a(k-1) \quad (\text{Og ligeledes for den anden side: } \frac{1}{2} \cdot b(k-1)).$$

Altså er rumfanget af de to kasser:

$$V_{\text{sider}} = a \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot (k-1) \cdot h + b \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot (k-1) \cdot h$$

⇓

$$V_{\text{sider}} = a \cdot b \cdot (k-1) \cdot h$$

⇓

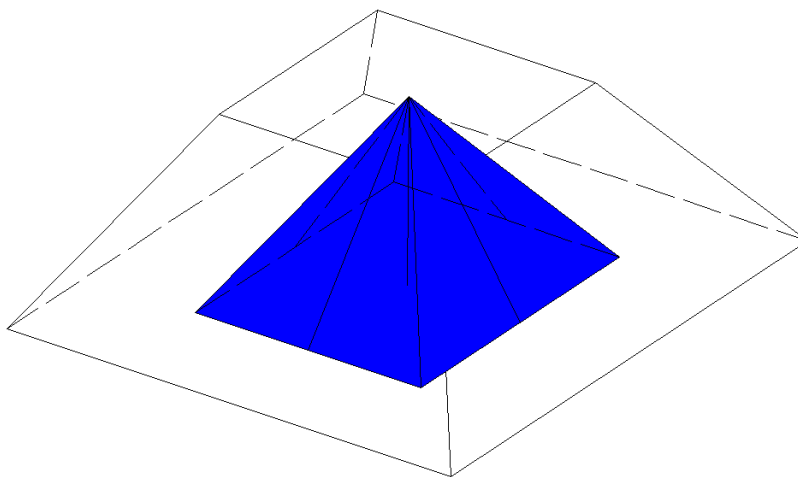
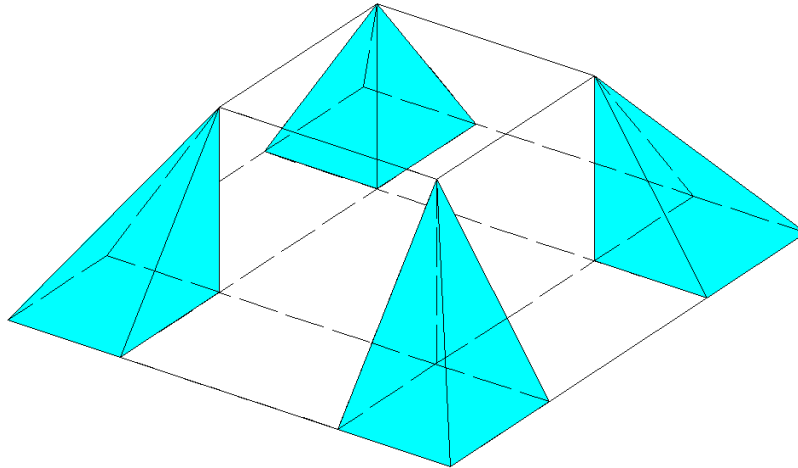
$$\underline{V_{\text{sider}} = a \cdot b \cdot h \cdot (k-1)}$$

Rumfang af pyramidestub

Side 19 af 35

Til sidst har vi de fire pyramidehjørner.

Her forestiller vi os – for nemheds skyld – at kassen i midten og de fire sider ”fjernes”, og de fire hjørner (tegnet op med cyan farve) stødes sammen. Herved fremkommer en pyramide. (tegnet op med mørk blå på efterfølgende figur.)



Da bredden på hver enkelt af de fire hjørner er hhv. $\frac{1}{2} \cdot a \cdot (k-1)$ eller $\frac{1}{2} \cdot b \cdot (k-1)$ må grundfladen af de fire pyramider tilsammen være:

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot (k-1) \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot (k-1) = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot a \cdot b \cdot (k-1)^2 = a \cdot b \cdot (k-1)^2.$$

Højden er naturligvis stadig h ! Og derfor er rumfanget af pyramiden (iflg. formlen for en pyramides rumfang):

$$V_{\text{pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot G = \frac{1}{3} \cdot h \cdot a \cdot b \cdot (k-1)^2$$

⇓

$$\underline{V_{\text{pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot h \cdot (k-1)^2}$$

Rumfang af pyramidestub

Side 20 af 35

Lad os lige opsummere, inden det løber løbsk... Vi har nu rumfangene for alle delfigurer i pyramidestubben:

$$V_{\text{kasse}} = a \cdot b \cdot h$$

$$V_{\text{sider}} = a \cdot b \cdot h \cdot (k-1)$$

$$V_{\text{pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot h \cdot (k-1)^2$$

Derfor må det totale areal være lig med summen af de tre volumener.

$$V_{\text{pyramidestub}} = V_{\text{kasse}} + V_{\text{sider}} + V_{\text{pyramide}}$$

⇕

$$V_{\text{pyramidestub}} = a \cdot b \cdot h + a \cdot b \cdot h \cdot (k-1) + \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot h \cdot (k-1)^2$$

⇕

Kvadratsætning: $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$

$$V_{\text{pyramidestub}} = a \cdot b \cdot h + a \cdot b \cdot h \cdot (k-1) + \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot h \cdot (k^2 + 1 - 2 \cdot k)$$

⇕

Ganger 'a · b' ind i parenteserne

$$V_{\text{pyramidestub}} = a \cdot b \cdot h + h \cdot (k \cdot a \cdot b - a \cdot b) + \frac{1}{3} \cdot h \cdot (k^2 \cdot a \cdot b + a \cdot b - 2 \cdot k \cdot a \cdot b)$$

⇕

Ganger 'h' ind i den ene parentes

$$V_{\text{pyramidestub}} = \cancel{a \cdot b \cdot h} + h \cdot k \cdot a \cdot b - \cancel{h \cdot a \cdot b} + \frac{1}{3} \cdot h \cdot (k^2 \cdot a \cdot b + a \cdot b - 2 \cdot k \cdot a \cdot b)$$

⇕

Ganger og dividerer med '3' for at sætte på fælles brøkstreg

$$V_{\text{pyramidestub}} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot 3 \cdot k \cdot a \cdot b + \frac{1}{3} \cdot h \cdot (k^2 \cdot a \cdot b + a \cdot b - 2 \cdot k \cdot a \cdot b)$$

⇕

Faktoriserer og sætter $\frac{1}{3} \cdot h$ uden for parentesen

$$V_{\text{pyramidestub}} = \frac{1}{3} \cdot h (k^2 \cdot a \cdot b + a \cdot b - 2 \cdot k \cdot a \cdot b + 3 \cdot k \cdot a \cdot b)$$

⇕

Rydder lidt op

$$V_{\text{pyramidestub}} = \frac{1}{3} \cdot h (k^2 \cdot a \cdot b + a \cdot b + k \cdot a \cdot b)$$

⇕

Vi husker fra begyndelsen: $k^2 \cdot a \cdot b = G$, $a \cdot b = g$ og $k \cdot a \cdot b = \sqrt{G \cdot g}$

$$\underline{\underline{V_{\text{pyramidestub}} = \frac{1}{3} \cdot h (G + g + \sqrt{G \cdot g})}}$$

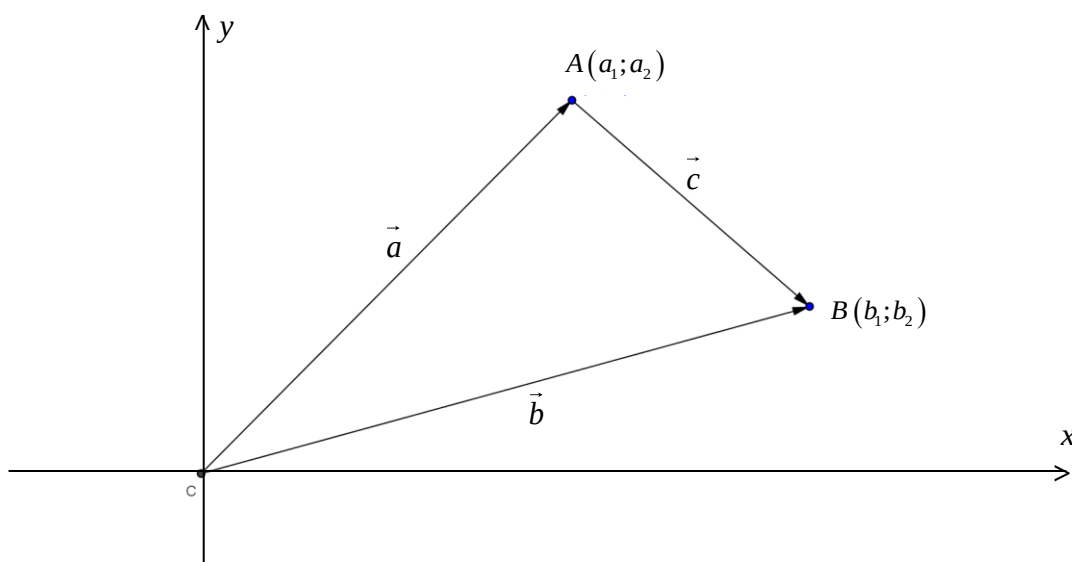
Q.E.D.

Skalarprodukt og vinkel mellem vektorer

Side 21 af 35

Vi ønsker at bevise sammenhængen mellem skalarproduktet og vinklen mellem to givne vektorer, $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Desuden findes $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$

Vi husker, at selve skalarproduktet er **defineret** som: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$.



Af figuren ses det, at:

$$|\vec{a}| = |CA| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$|\vec{b}| = |CB| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

$$|\vec{c}| = |AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

Cosinusrelationen (se tidligere bevis), giver f.eks.:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(C)$$

Ved at indsætte de fundne udtryk for længderne af vektorerne $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$, som jo netop svarer til siderne a , b og c i trekanten, fås følgende:

Skalarprodukt og vinkel mellem vektorer

Side 22 af 35

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(C)$$

⇕ Indsætter værdierne fra tegningen

$$\left(\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} \right)^2 = \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \right)^2 + \left(\sqrt{b_1^2 + b_2^2} \right)^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(C)$$

⇕ Kvadratrodd i anden potens ophæver sig selv

$$(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(C)$$

⇕ Kvadratsætninger

$$\cancel{b_1^2} + \cancel{a_1^2} - 2 \cdot a_1 \cdot b_1 + \cancel{b_2^2} + \cancel{a_2^2} - 2 \cdot a_2 \cdot b_2 = \cancel{a_1^2} + \cancel{a_2^2} + \cancel{b_1^2} + \cancel{b_2^2} - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(C)$$

⇕ Reducerer

$$-2 \cdot a_1 \cdot b_1 - 2 \cdot a_2 \cdot b_2 = -2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(C)$$

⇕ Dividerer igennem med -2

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(C)$$

⇕ Vi husker, at skalarproduktet er defineret som: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$

$$\underline{\underline{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(C)}}$$

Q.E.D.

Tre-trins-reglen for differentialkvotienter

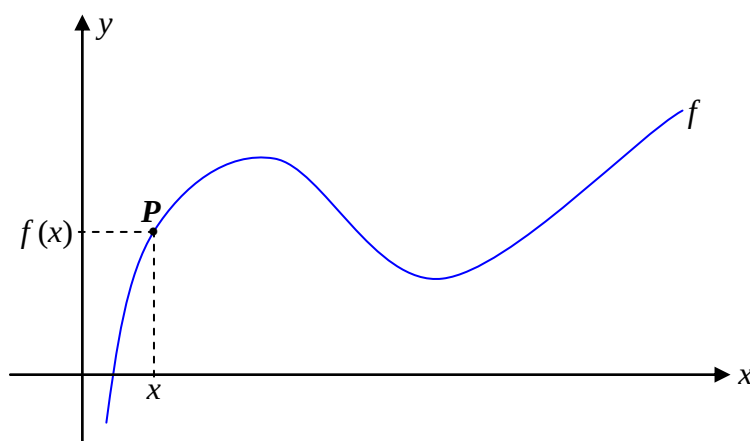
Side 23 af 35

Vi ønsker at vise, at hældningen på en funktion i et givet punkt, kan defineres som differentialkvotienten

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Det er noget af en påstand! Lad os begynde fra begyndelsen.

Vi forestiller os en funktion, f , hvis kurve er beliggende i et almindeligt koordinatsystem. Se figur 1. Funktionen f er afbildet som den blå kurve.



Figur 1:
Grafen for funktionen f med
punktet P

Vi ønsker at bestemme funktionens hældning i punktet ' P '. Lad os se lidt på det punkt. Ser man nærmere efter, opdager man at punktet ' P ' projiceres ned på x -aksen i værdien ' x '. Således kan dette punkt være hvor som helst på funktionen. Den eneste betingelse er dog, at funktionen skal være differentiabel og dermed også kontinuert i dette punkt samt i det område, som undersøges.

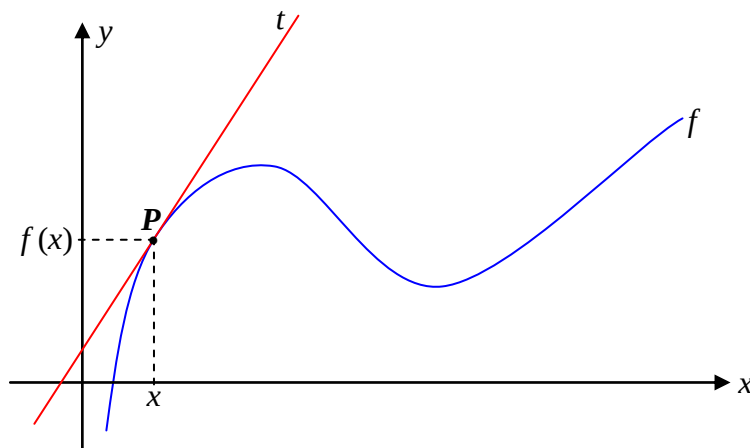
Der er naturligvis også en funktionsværdi. Den er – som normalt – lig med $y = f(x)$. Dette indses ved at projicere punktet ' P ' ind på y -aksen.

Hældningen i dette punkt, kan bestemmes ved en kendt geometrisk figur.

Det er **tangenten**, t , som berører funktionen i ét og kun et punkt – nemlig i punktet ' P '. Se figur 2. Tangenten er den røde linie.

Tangenten kendetegnes ved at have samme hældning, som funktionen i netop røringspunktet.

Hold godt fast på denne tangent! Den kommer vi tilbage til om et øjeblik...



Figur 2:
Tilføjet tangenten i punktet P
(Den røde linie)

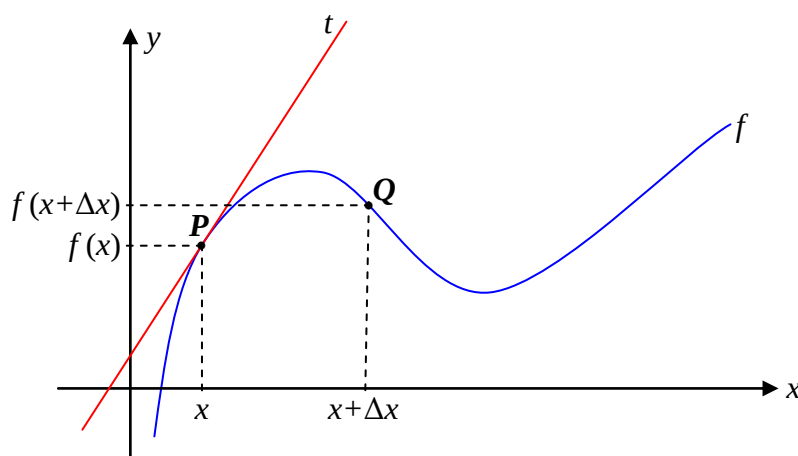
Tre-trins-reglen for differentialkvotienter

Side 24 af 35

Vi indfører nu et andet punkt, ' Q ', som også er beliggende på funktionen. For nemheds skyld ligger ' Q ' til højre for ' P ' på kurven i dette tilfælde.

Den vandrette afstand mellem ' P ' og ' Q ' sættes til Δx . Symbolet Δ (Det græske bogstav, store delta) er kendt fra bl.a. fysikken og bruges i forbindelse med tilvækst, forandring, ændring eller udvidelse.

I dette tilfælde er det forskellen på hhv. punkterne ' P ' og ' Q 's x -værdier. Da punktet ' P 's x -værdi blot kendes som x , og dermed ikke kan beskrives anderledes, må punktet ' Q 's x -værdi være lig med: $x + \Delta x$.



Figur 3:
Tilføjet punktet Q

På samme måde, som for punktet ' P ', findes funktionsværdien til punktet ' Q '.

Da $x + \Delta x$ er punktet ' Q 's x -værdi, må den tilhørende funktionsværdi nødvendigvis være lig med: $f(x + \Delta x)$ Se figur 3.

Således har vi nu to veldefinerede punkter, beliggende på kurven for $f(x)$, nemlig $P(x; f(x))$ og $Q(x + \Delta x; f(x + \Delta x))$.

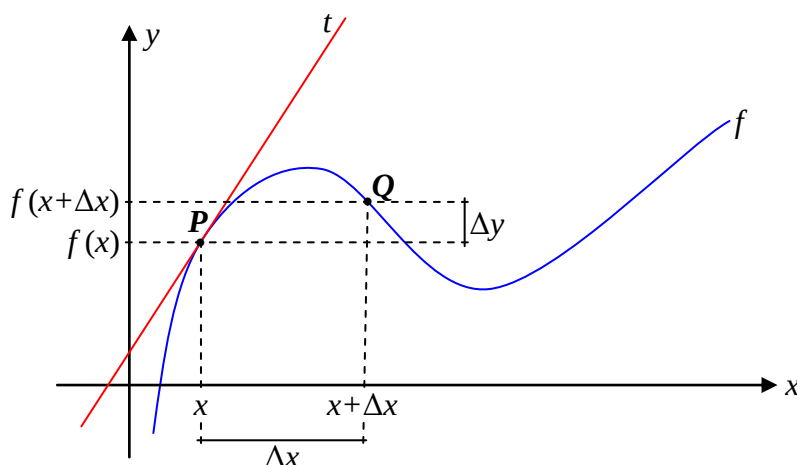
Den vandrette afstand mellem ' P ' og ' Q ' er jo allerede givet som Δx – altså ændringen i x -værdien. Se figur 4.

Men hvad med den lodrette afstand? Af figuren ses, at den kan findes som $f(x + \Delta x) - f(x)$ altså funktionsværdien i pkt. ' Q ' minus funktionsværdien i pkt. ' P '.

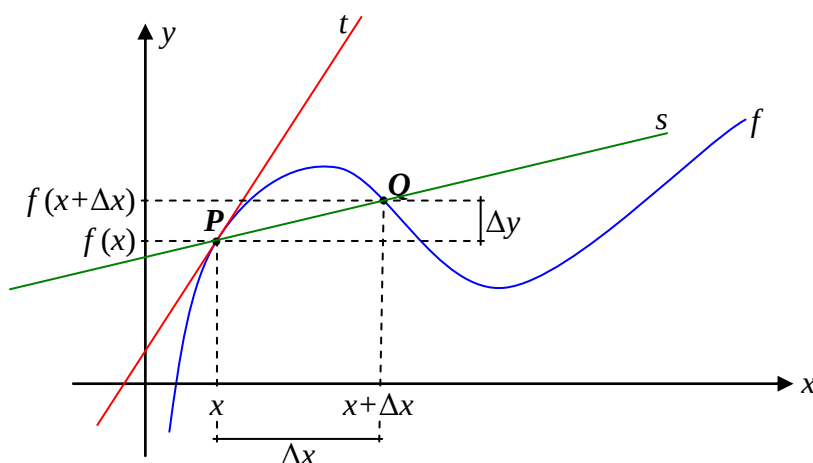
Lad os for nemheds skyld kalde denne lodrette afstand for Δy – altså den lodrette tilvækst (afstand) mellem ' P ' og ' Q '. Se figur 4.

Tre-trins-reglen for differentialkvotienter

Side 25 af 35

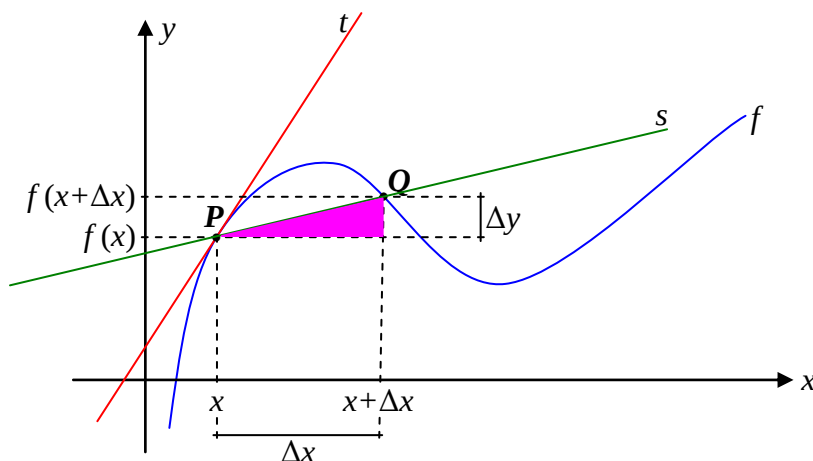
**Figur 4:**Bestemmer Δx og Δy

Vi tegner nu en streg, som går igennem de to punkter ' P ' og ' Q '. Denne linie kaldes for en **sekant**. (**Sekant**, (af latin *secans*, 'skære'), i matematik en linje gennem to punkter på en kurve.)

**Figur 5:**Indfører sekanten, s
(Grøn linie)

Betragter vi sekanten mellem ' P ' og ' Q ' som hypotenusen i den retvinklede trekant der dannes, som vist på tegningen, den lille trekant på figur 6, kan vi udregne hældningen af hypotenusen.

Det er denne størrelse, som vi fremover vil referere til som **differenskvotienten** – altså forholdet mellem ændringen i y -retningen og i x -retningen for en sekant.

**Figur 6:**

Den retvinklede trekant

Tre-trins-reglen for differentialkvotienter

Side 26 af 35

Vi husker fra trigonometrien:

$$\text{Hældningen: } \alpha = a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hosliggende katete}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$$

Hvis vi tager $\alpha = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hosliggende katete}}$, kan vi i figuren aflæse, at hypotenusens – det vil i dette her tilfælde sige sekantens – hældning (eller differenskvotient) må være det samme som: $\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Dette er et meget vigtigt punkt i beviset, så derfor opsummerer vi lige, hvad vi har nået indtil nu...

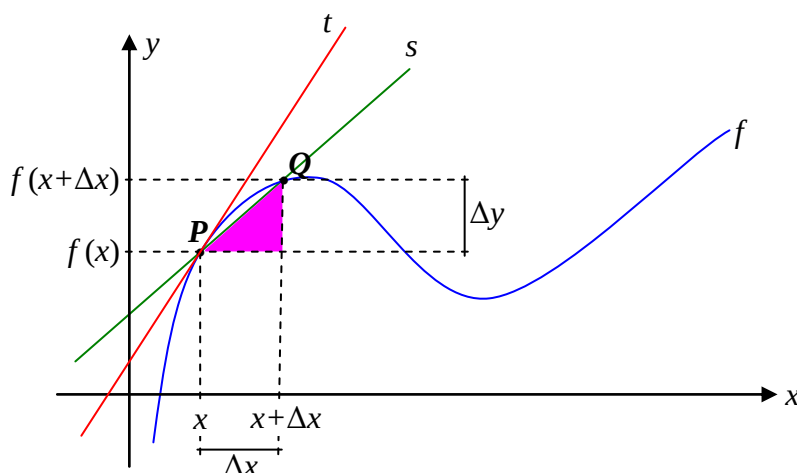
Vi har en funktion med et punkt ' P '. Vi ønsker at finde hældningen i dette punkt, så derfor forestiller vi os funktionens tangent i punktet ' P '.

Dernæst sætter vi endnu et punkt ' Q ' på funktionen. Mellem punkterne ' P ' og ' Q ', tegnes en **sekant**. Ved hjælp af en simpel trigonometrisk betragtning, findes sekantens

hældning (differenskvotient) at være lig med: $\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

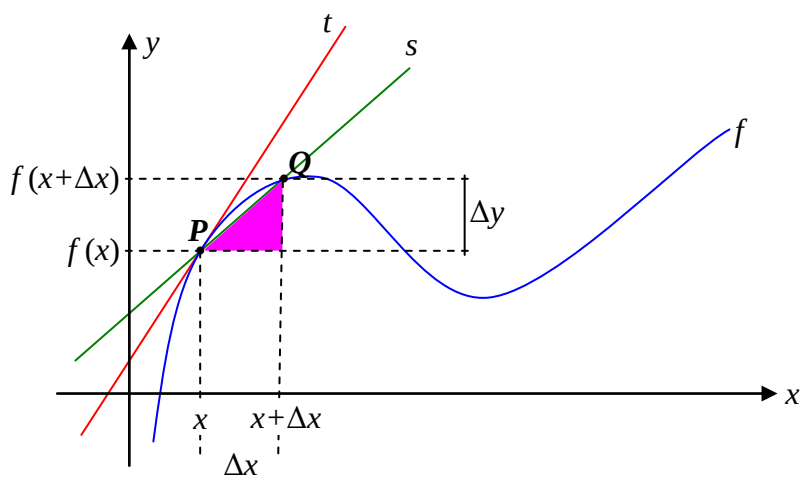
Nu er det **tangentens** hældning vi søger, og ikke **sekantens**.

Derfor ser vi på hvad der sker, hvis Δx bliver mindre – f.eks. halveret.



Tre-trins-reglen for differentialkvotienter

Side 27 af 35



Ved at indsætte de fundne:

Q.E.D.

Den rette linie

Side 28 af 35

Vi ønsker at vise, at hældningen på en ret linie mellem to punkter kan skrives som:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \text{ Ydermere ønsker vi at bevise, at } b = y_1 - a \cdot x_1.$$

En ret linie er almindeligvis defineret som en funktion $y = f(x) = ax + b$, for hvilken

der for to vilkårlige punkter på funktionen gælder, at $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$.

a er en konstant, som beskriver funktionens hældning. Tænk på hældningen, som at gå et vandret skridt (som regel mod højre) og et lodret skridt (op eller ned). Afhængigt af, hvor store skridtene er, beskrives hældningen som mere eller mindre stejl. Tager man f.eks. et meget stort skridt til højre, og et lille bitte skridt op, så er hældningen meget lille (og positiv). Tager man et lille skridt til højre og et kæmpe skridt nedad, så er hældningen meget stor (og negativ).

Det er altså det lodrette ”skridt”, som bestemmer om hældningen er positiv eller negativ. Går man opad mod højre, er hældningen positiv. Går man nedad mod højre er hældningen negativ. I specielle tilfælde, kan det være en fordel at tænke på, at man går mod venstre, og så er det hele bare omvendt.

Så nu er det altså nødvendigt at finde ud af, hvor store skridtene er henad og opad.

Enhver linie kan indlægges i et kartesisk (et normalt retvinklet) koordinatsystem. Det vil samtidig sige, at de to punkter (som jo ligger på linien) også er i det samme koordinatsystem. Da det er retvinklet, må der altså findes en vandret afstand og en lodret afstand mellem de to punkter.

Vi kan indføre et tredje punkt, som er variabelt. Det kan i teorien ligge hvor som helst på linien. Hvor $P_1 = (x_1; y_1)$ og $P_2 = (x_2; y_2)$ er de to faste punkter, kan vi kalde det variable punkt for $P = (x; y)$.

På en ret linie, må alle punkter have en indbyrdes lige stor hældning - uanset, hvor punkterne ligger på linien. Det er derfor at a er konstant.

Da hældningen er konstant, opstiller vi hældningen for to punktsæt. Det ene punktsæt er ” P og P_1 ” og det andet er ” P_2 og P_1 ”.

Den rette linie

Side 29 af 35

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = a$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$$

Dvs. at:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

⇓

$$\frac{(y - y_1) \cdot \cancel{(x - x_1)}}{\cancel{x - x_1}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

⇓

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

Vi husker, at $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$.

⇓

$$y - y_1 = a \cdot (x - x_1)$$

Vi kan derfor omskrive udtrykket til:

(Ligningen på denne form kaldes også for "Tangentligningen".)

Vi ganger a ind i parentesen og lægger y_1 til på begge sider.

$$y = ax - ax_1 + y_1$$

⇓

$-ax_1 + y_1$ er begge konstantled, (Der er ingen ukendte variable) og kan samles under det nye navn: b .

$$\underline{\underline{y = ax + b}}$$

Q.E.D.

Ekspontentialfunktionen

Side 30 af 35

Vi ønsker at vise, at forskriften for en eksponentialfunktion med ligningen:

$f(x) = b \cdot a^x$, $a \neq 0$, kan findes hvis man har to punkter: $P_1(x_1; y_1)$ og $P_2(x_2; y_2)$, som grafen går igennem.

Definition: Ved en potensfunktion forstås en funktion f med forskriften:

$$f(x) = b \cdot a^x, \text{ hvor } a \text{ og } b \text{ er talkonstanter.}$$

Der gælder at: $a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}}$ og $b = \frac{y_1}{a^{x_1}} = y_1 \cdot a^{-x_1} = \frac{y_2}{a^{x_2}} = y_2 \cdot a^{-x_2}$

Bevis:

Da (x_1, y_1) og (x_2, y_2) begge ligge på grafen for f , må der gælde at:

$$y_1 = b \cdot a^{x_1} \quad \text{og} \quad y_2 = b \cdot a^{x_2}$$

y_2 divideres med y_1 :

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{b \cdot a^{x_2}}{b \cdot a^{x_1}}$$

⇓

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}}$$

⇓

$$\frac{y_2}{y_1} = a^{x_2} \cdot a^{-x_1}$$

⇓

$$\frac{y_2}{y_1} = a^{x_2 - x_1}$$

⇓

$$\sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}} = \sqrt[x_2 - x_1]{a^{x_2 - x_1}}$$

⇓

$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}}$$

Vi husker fra tidligere:

$$\frac{1}{a^p} = a^{-p}$$

Vi husker fra tidligere:

$$a^n \cdot a^p = a^{n+p}$$

Ekspponentialfunktioner

Side 31 af 35

Der mangler stadig formen for b .

Det er tidligere givet at:

$$y_1 = b \cdot a^{x_1} \quad \text{eller} \quad y_2 = b \cdot a^{x_2}$$

Der divideres med a^x -faktoren.

$$\begin{array}{ccc} y_1 = b \cdot a^{x_1} & & y_2 = b \cdot a^{x_2} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ b = \frac{y_1}{a^{x_1}} & \text{eller} & b = \frac{y_2}{a^{x_2}} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \underline{b = y_1 \cdot a^{-x_1}} & & \underline{b = y_2 \cdot a^{-x_2}} \end{array}$$

Er det i forbindelse med en opgave, hvor man bliver bedt om at angive funktionsforskriften, så er det vigtigt at samle a og b i det samlede udtryk:

$$\underline{\underline{f(x) = b \cdot a^x}}$$

Fordoblings- og halveringskonstanter

Side 32 af 35

Vi ønsker at vise, at fordoblingstiden T_2 for en voksende eksponentialfunktion $f(x) = b \cdot a^x$ er givet ved:

$$T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)}$$

Bevis:

Det må være således, at $f(0) = b \cdot a^0 = b \cdot 1 = b$

Funktionsværdien til tiden $t = 0$ (hvornår det så end er), er altså b .

Bemærk, at det ikke er vigtigt at kende det præcise begyndelsestidspunkt, da fordoblingskonstanten jo er den tid, som der til **ethvert tidspunkt** skal gå, før end at funktionsværdien er blevet fordoblet.

Dog må det være en kendsgerning, at den dobbelte funktionsværdi af b må være $2b$!

Vi indsætter altså funktionsværdien $2b$ i forskriften og isolerer x .

$$\begin{aligned} f(x) &= b \cdot a^x \\ \Downarrow \\ 2b &= b \cdot a^x \\ \Downarrow \\ 2 &= a^x \\ \Downarrow \\ \log(a^x) &= \log(2) \\ \Downarrow \\ x \cdot \log(a) &= \log(2) \\ \Downarrow \\ x &= \frac{\log(2)}{\log(a)} \end{aligned}$$

Idet vi husker, at:
 $\log(a^x) = x \cdot \log(a)$

Q.E.D.

Fordoblings- og halveringskonstanter

Side 33 af 35

Vi ønsker at vise, at halveringstiden $T_{\frac{1}{2}}$ for en aftagende eksponentialfunktion

$f(x) = b \cdot a^x$ er givet ved:

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log(a)}$$

Bevis:

Det må være således, at $f(0) = b \cdot a^0 = b \cdot 1 = b$

Funktionsværdien til tiden $t = 0$ (hvornår det så end er), er altså b .

Bemærk, at det ikke er vigtigt at kende det præcise begyndelsestidspunkt, da halveringskonstanten jo er den tid, som der til **ethvert tidspunkt** skal gå, før end at funktionsværdien er blevet halveret.

Dog må det være en kendsgerning, at den halve funktionsværdi af b må være $\frac{1}{2} \cdot b$!

Vi indsætter altså funktionsværdien $\frac{1}{2} \cdot b$ i forskriften og isolerer x .

$$f(x) = b \cdot a^x$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2} b = b \cdot a^x$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2} = a^x$$

$$\Downarrow$$

$$\log(a^x) = \log\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$x \cdot \log(a) = \log\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log(a)}$$

Idet vi husker, at:

$$\log(a^x) = x \cdot \log(a)$$

Q.E.D.

Arealberegning af n -sidet polygon ved brug af determinant

Side 34 af 35

$$A_{n\text{-kant}} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + \dots + x_n y_1 - x_1 y_n| = \frac{1}{2} |x_1 y_2 + x_2 y_3 + \dots + x_n y_1 - x_2 y_1 - x_3 y_2 - \dots - x_1 y_n|$$

Beviset kan gennemføres som et induktionsbevis¹. Vi ved fra tidligere (og fra bogen), at formlen er sand for en trekant ($n = 3$). Vi antager, at det også er sandt for ethvert n , og at det også gælder for $n + 1$.

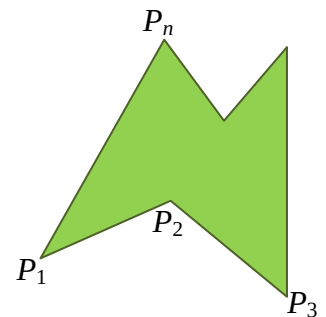
Givet en polygon med n sider, som er navngivet mod uret.

$$A_n = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + \dots + x_n y_1 - x_1 y_n|$$

 $\Updownarrow$

(Sorterer efter positive og negative led.)

$$A_n = \frac{1}{2} |x_1 y_2 + x_2 y_3 + \dots + x_n y_1 - x_2 y_1 - x_3 y_2 - \dots - x_1 y_n|$$



Dette er altså arealet af det grønne markerede område, i det omfang at punkterne er givet i rækkefølge mod uret.

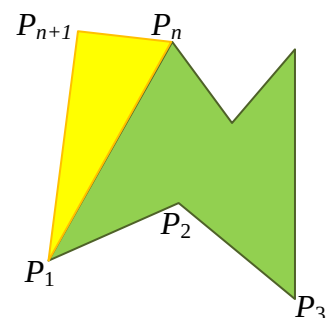
Nu tilføjes et ekstra punkt. Punkt nr. $n + 1$. Det vil naturligvis ændre det samlede areal af polygonen, og ændringen (og den gule markering på næste figur), er præcis arealet af den just dannede trekant.

Den nye (gule) trekant har koordinatpunkterne:

$$P_n(x_n; y_n)$$

$$P_{n+1}(x_{n+1}; y_{n+1})$$

$$P_1(x_1; y_1)$$



Arealet af den nye gule trekant, A_1 , er givet ved den samme formel:

¹

Induktion er en bestemt type matematisk bevis, som er meget velegnet til at bevise at en matematisk hypotese er sand for alle naturlige tal, eller andre talmængder, som er velordnet. Induktionsprincippet består af 2 skridt: **basisskridtet** (induktionsstarten, startbetingelsen) og **induktionsskridtet**.

1. Basisskridt: I basisskridtet beviser man at hypotesen er sand ved det mindste tal i talmængden. Dette er typisk 1, da man ofte vil bevise sætningen for de naturlige tal.
2. Induktionsskridt: I induktionsskridtet beviser man, at hvis hypotesen gælder for tallet n (denne antagelse kaldes induktionsantagelsen), så gælder den også for tallet $n + 1$.

På denne måde kan man bevise at hypotesen gælder for alle hele tal fra basisskridtet og opæfter.

Hvis tilfælde 1 er sand, så er tilfælde 2 også sand, da tilfælde 1 er sand. Så er 3 også sand, når 2 er sand, osv.

Dette princip kan sammenlignes med dominoeffekten. Hvis du har en lang række dominobrikker stående efter hinanden, kan du udlede følgende:

1. Basisskridt: Den første dominobrik vælter.
2. Induktionsskridt: Når en dominobrik vælter, vil den næste vælte.

Derfor vil alle dominobrikker vælte.

Kilde: Induktion (Matematik) http://da.wikipedia.org/wiki/Induktion_%28matematik%29, 26-02-2014 18:52

Arealberegning af n -sidet polygon ved brug af determinant

Side 35 af 35

$$A_t = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_{n+1} & y_{n+1} \\ x_1 & y_1 \\ x_n & y_n \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |x_n y_{n+1} - x_{n+1} y_n + x_{n+1} y_1 - x_1 y_{n+1} + x_1 y_n - x_n y_1|$$

⇕ (Sorterer efter positive og negative led.)

$$A_t = \frac{1}{2} |x_n y_{n+1} + x_{n+1} y_1 + x_1 y_n - x_{n+1} y_n - x_1 y_{n+1} - x_n y_1|$$

Det samlede areal af $n+1$ -kanten er altså arealet af den oprindelige n -kant, A_n , adderet med det nye areal, A_t .

$$A_{n+1} = A_n + A_t$$

⇕

$$A_{n+1} = \frac{1}{2} |x_1 y_2 + x_2 y_3 + \dots + x_n y_1 - x_2 y_1 - x_3 y_2 - \dots - x_1 y_n| + \frac{1}{2} |x_n y_{n+1} + x_{n+1} y_1 + x_1 y_n - x_{n+1} y_n - x_1 y_{n+1} - x_n y_1|$$

⇕

$$A_{n+1} = \frac{1}{2} |x_1 y_2 + x_2 y_3 + \dots + \cancel{x_n y_1} - x_2 y_1 - x_3 y_2 - \dots - \cancel{x_1 y_n} + x_n y_{n+1} + x_{n+1} y_1 + \cancel{x_1 y_n} - x_{n+1} y_n - x_1 y_{n+1} - \cancel{x_n y_1}|$$

⇕

$$A_{n+1} = \frac{1}{2} |x_1 y_2 + x_2 y_3 + \dots + x_n y_{n+1} + x_{n+1} y_1 - x_2 y_1 - x_3 y_2 - \dots - x_{n+1} y_n - x_1 y_{n+1}|$$

...Hvilket beviser ved induktion, at formelen er rigtig!

Man kunne her indvende: "Hvad nu, hvis det nye punkt var på **indersiden** af den originale polygon?"

I det tilfælde ville den nye trekant, P_n, P_{n+1}, P_1 blive navngivet i rækkefølge **med** uret, og ikke mod uret. Så ville arealet af den nye trekant, A_t , blive udregnet som negativt. Den algebraiske addition af trekantens areal til den oprindelige n -kant, A_n , resulterer således i et nyt og mindre areal af den nye $n+1$ -kant, A_{n+1} .

Q.E.D.

Dette bevis er væsentligt inspireret af beviset, som findes på Internetsiden:

<http://2000clicks.com/mathhelp/GeometryPolygonAreaDeterminant.aspx> 26-02-2014, 19:53

Dog er der tilføjet ekstra oplysninger og udregninger samt – indlysende nok – en oversættelse.