MATEMATIK

NOTAT 24

VEKTORER I RUMMET

AF:

CAND. POLYT.

MICHEL MANDIX

SIDSTE REVISION: MAJ 2026

Oversigt over græske bogstaver:

Kapitaler	Minuskler	Navn
Α	α	Alfa
Γ	γ	Gamma
Ε	ε	Epsilon
Η	η	Eta
Ι	ι	Jota
Λ	λ	Lambda
Ν	ν	Ny
Ο	o	Omikron
Ρ	ρ	Rho
Τ	τ	Tau
Φ	φ	Phi
Ψ	ψ	Psi

Kapitaler	Minuskler	Navn
Β	β	Beta
Δ	δ	Delta
Ζ	ζ	Zeta
Θ	θ	Theta
Κ	κ	Kappa
Μ	μ	My
Ξ	ξ	Xi
Π	π	Pi
Σ	σ	Sigma
ϒ	υ	Ypsilon
Χ	χ	Chi
Ω	ω	Omega

Indholdsfortegnelse

Introduktion

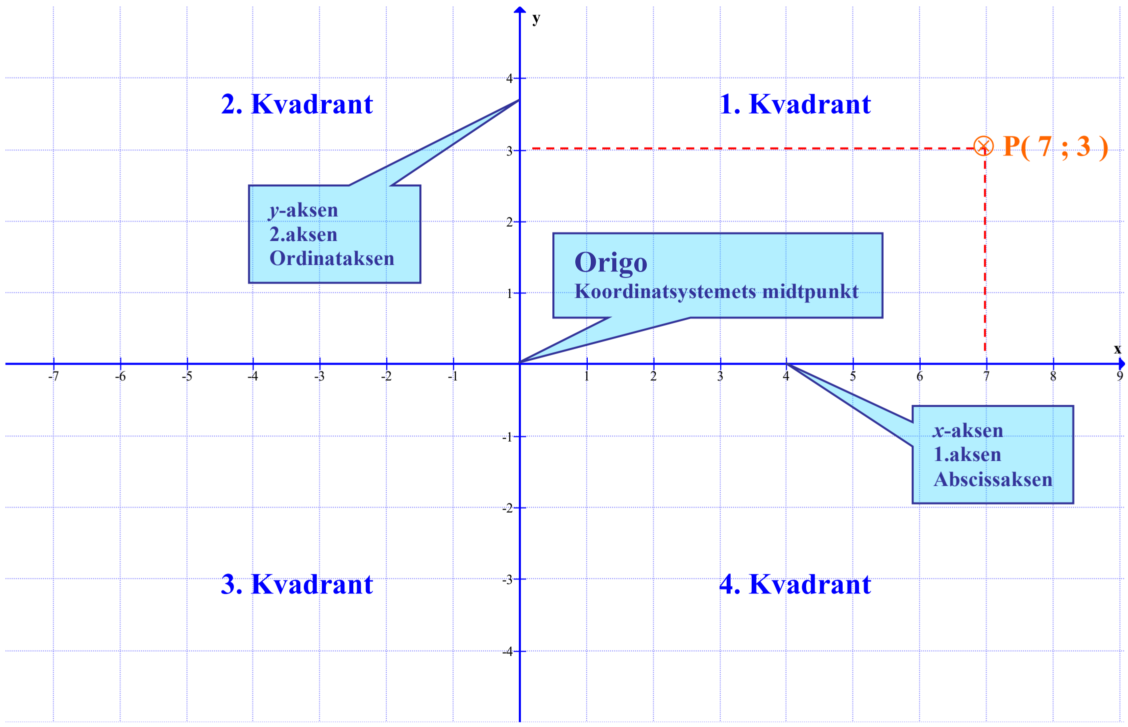
Vektorer i rummet – eller 3D vektorer – er som udgangspunkt ikke væsentligt forskelligt fra vektorer i planet. Der er selvfølgelig emner, som specifikt omhandler det, at være i rummet, men rigtig mange af de kendte funktioner fra det kendte 2D-stof, som mere eller mindre kan genbruges.

Det 2-dimensionelle koordinatsystem

Det er efterhånden rutine, når grafer, linjer, trekanter og andre elementer, skal indlægges i et plant koordinatsystem.

Koordinatsystemets opbygning / nyt eller repetition?

Et kartesisk koordinatsystem er et retvinklet koordinatsystem. Det betyder at de to (eventuelt tre) akser er ortogonale (vinkelrette) på hinanden. Dermed forstås, at alle punkter i koordinatsystemet opfattes som en skæring mellem linjer parallelle med akserne, hvorved der opstår en ret vinkel for alle punkter.

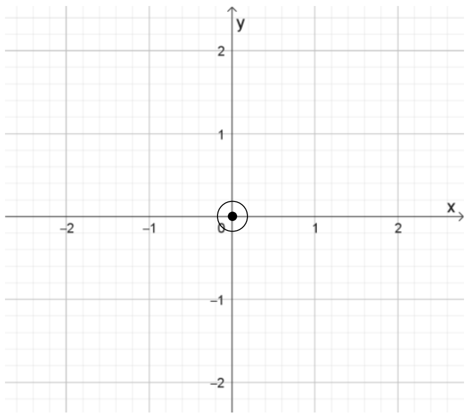


Mindstekravene til et koordinatsystem er – akserne (naturligvis), benævnelser på begge akser (typisk – men ikke altid *x*- og *y*-aksen), pile på begge akserne som angiver i hvilken retning værdierne tiltager og gerne mindst én skalainddeling på hver akse.

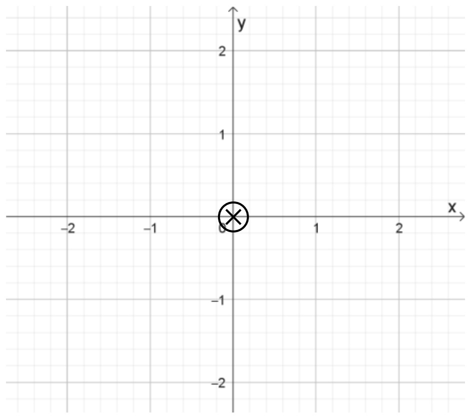
Det 3-dimensionelle koordinatsystem

Det tredimensionelle koordinatsystem har mange fællestræk med det todimensionelle. Det kan nemt opfattes som et todimensionelt koordinatsystem, hvorpå der er "klistret" en z-akse på, som står vinkelret på både x- og y-aksen.

I folkeskolen, blev dette emne nævnt – netop som et 2D-koordinatsystem, hvor z-aksen "kom ud i hovedet" fra tavlen. Dette blev symboliseret som en cirkel med en prik i midten – altså som når spidsen af en pil kommer imod en. (⊙) Havde man i stedet behov for at symbolisere at noget forsvandt "ind i tavlen" brugte man en cirkel med et kryds inden i – altså når man ser en pil bagfra med styrefjerene. (⊗)
Pudsigt nok, fik man en forklaring på begge muligheder, men skal man overholde de mest anvendte metode, så er den eneste mulighed den, hvor z-aksen peger ud mod læseren.
Se nedenstående eksempler:



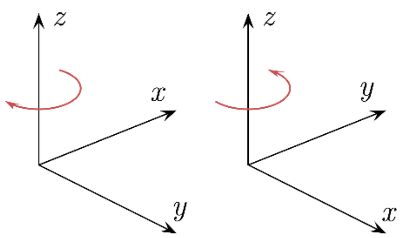
3D-koordinatsystem, hvor z-aksen peger ud mod læseren. (Korrekt)



3D-koordinatsystem, hvor z-aksen peger ind i papiret/skærmen. (Forkert)

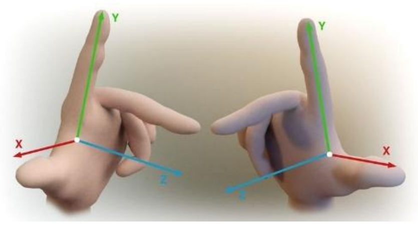
Det indses imidlertid hurtigt, at dette ikke er nogen praktisk afbildning af et tredimensionelt koordinatsystem.

Skal man tegne et tredimensionelt koordinatsystem, kan man vælge to metoder. Tages der udgangspunkt i et helt normalt todimensionelt koordinatsystem, kan z-aksen jo vende hhv. opad eller nedad fra origo. Disse kaldes for hhv. venstrehånds-system og højrehåndssystem.
Selvom begge systemer kan anvendes, er det mest normalt at anvende højrehåndssystemet, og det er altid i dette notat givet, at der arbejdes med et højrehåndssystem.



Venstrehåndssystem ses til venstre, og højrehåndssystem ses til højre.

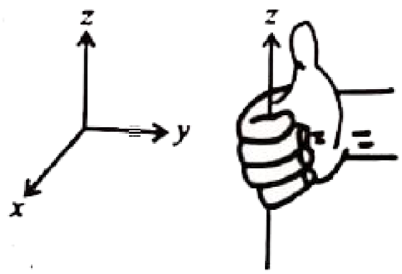
Når forskellen på de to systemer benævnes hhv. "venstrehåndssystemet" og "højrehåndssystemet", er det fordi man nemt kan huske forskellen ved at se på sine hænder:

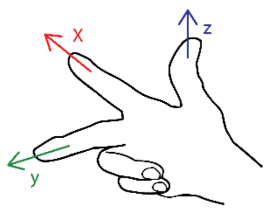


Husk igen, at der ALTID benyttes højrehåndssystemet i dette notat. Det vil også svare til opgaver til eksamen og de fleste opgaver i det "virkelige liv".

Man kan også huske "højrehåndsreglen" fra fysik. Hvis man der holder højre hånd med fingerspidserne i strømmens retning, så vil tommelfingeren angive magnetfeltets nordpol.

Den samme bevægelse kan bruges til at kontrollere et tredimensionelt koordinatsystem:
Hvis man placerer hånden således, at fingerspidserne peger i x-aksens retning og drejer fingerspidserne således at de drejer hen mod y-aksen, så vil tommelfingeren angive z-aksens positive retning.





Naturligvis er mindstekravene for et tredimensionelt koordinatsystem mage til de mindstekrav, som allerede er beskrevet for et todimensionelt koordinatsystem.

Afbildninger:

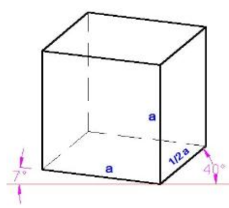
Der er typisk fire måder at tegne/vise noget tredimensionelt:

Perspektivisk: Dette er en flot, men upraktisk måde at fremstille noget i 3D. Da perspektiv ikke kan bruges til at målsætte længder og afstande bruges den aldrig i tekniske tegninger.

Isometrisk: (Mercedes-afbildningen). I denne fremstilling vises de tre akser med 120°'s drejning. Enhederne er ens på de tre akser. Den er nem at bruge, men figurer kan af og til være svære at se, da de kan blive forvanskede pga. aksernes beskaffenhed.

Oblique: Her er objektet der skal vises tegnet korrekt, set forfra, mens dybden gengives med en skrå vinkel – typisk mellem 30° og 45°.

Dimetri: Ved dimetri afsættes længden på x-aksen i halv længde, hvilket giver et mindre mærkværdigt udseende end isometrien. Bruges sjældent til hurtige skitser, da den er svær at konstruere.

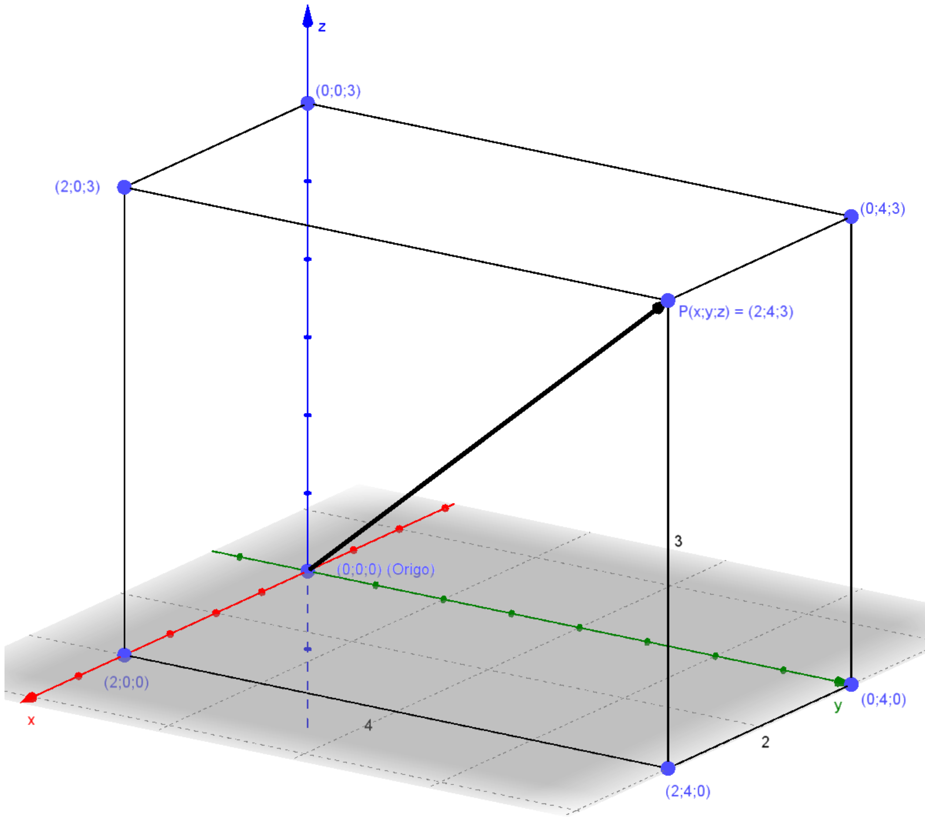


Punkter i rummet

Det er efterhånden indlysende, at alle matematiske legemer i et koordinatsystem består af en række punkter, er det naturligt at begynde med at definere et punkt i rummet.

En position eller et punkt, kan fastlægges vha. tre værdier – en for hver dimension.
Som udgangspunkt, vælges blot tre tal, der hhv. angiver: *x*-, *y*- og *z*-værdierne.

Et punkt skrives som $P(x;y;z)$.



Kassen på ovenstående figur er tegnet, så det fjerneste hjørne er placeret i origo. Desuden har kassen dimensionerne 2 (i *x*-aksens retning), 4 (i *y*-aksens retning) og 3 (i *z*-aksens retning).

Tegner man en stedvektor, $\overrightarrow{OP}$, fra origo (åbenlyst) og til punkt *P*, kan denne skrives som:

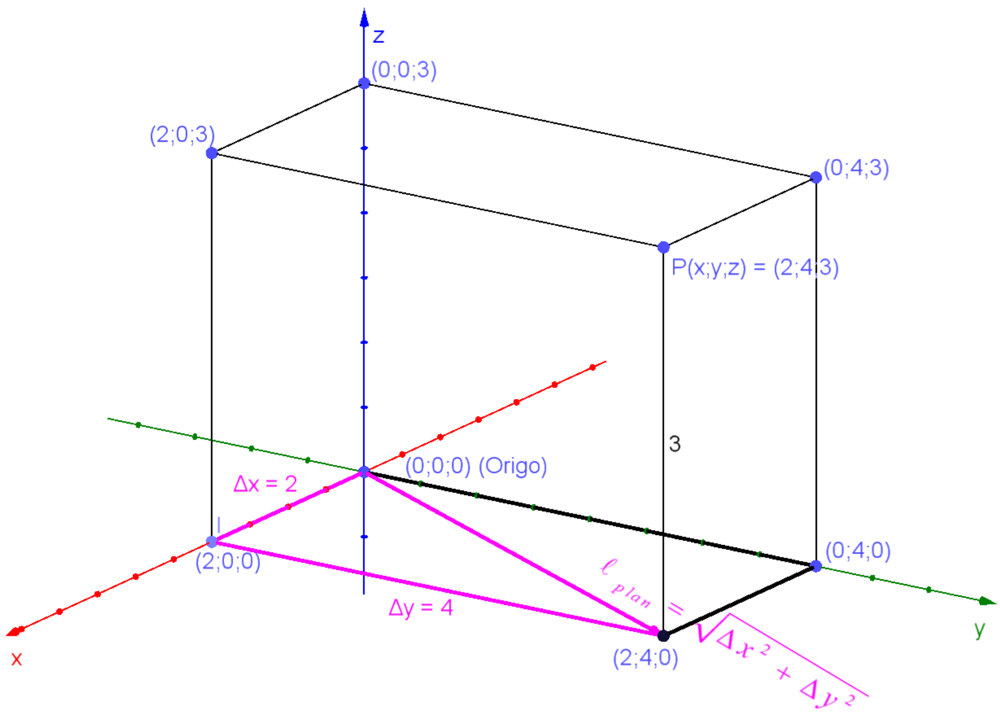
$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Hust, at der er tale om et vektorkoordinat. Det er derfor koordinaterne skrives i en parentes over hinanden uden brøkstreger!

Vektorens pilpunkt som et punktkoordinat, skrives: $P = (x;y;x) = (2;4;3)$.

Afstandsbestemmelse

Skal man beregne afstanden mellem to punkter (i rummet), kan man ofte gøre det nemmest vha, vektorer. Det er nemlig relativt simpelt at beregne længden på en vektor, og derved er også afstanden mellem vektorens begyndelsespunkt og pilpunkt fundet.

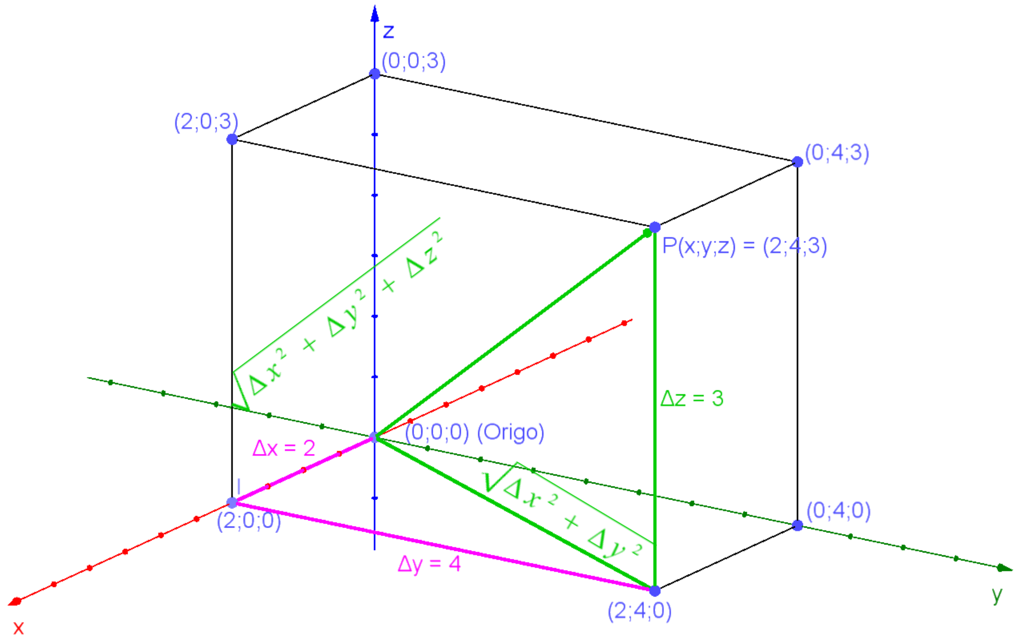


Se på ovenstående figur.

Målet er at finde længden af vektoren $|\overrightarrow{OP}|$, som blev vist i forrige kapitel.

Først findes afstanden af vektoren, men kun i *xy*-planet. Altså, præcis som det blev vist i afsnittet om vektorer i planet.

Fra tidligere, vides det, at længden af vektoren i planet er: $\ell_{plan} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Denne beregning er vist med magenta farve i ovenstående figur.



Danner man nu en ny trekant (den grønne trekant), hvor den netop fundne afstand er en af katete-terne og højden af kassen er den anden katete, må hypotenusen være lig med vektor $\overrightarrow{OP}$, og længden af den fremkommer umiddelbart af følgende udregning.

Længden bliver da:

$$\left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{\Delta_{plan}{}^2 + \Delta z^2}$$
$$\Updownarrow$$
$$\left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)^2 + \Delta z^2}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{\left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}}$$

Idet det erindres, at kvadratroden af ”noget” i anden potens bare er lig med ”noget”. (Kvadratroden af ”noget” i anden er markeret med orange skrift i ovenstående udregning).

Indsættes de aktuelle værdier for kassens ydre mål i dette eksempel fås:

$$\left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$
$$\Updownarrow$$
$$\left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 16 + 9}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{\left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{29}}}$$

Opgaver til "Punkter i rummet og vektorlængder"

Opgave 01 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

(Opg. 467 Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

Givet to punkter: $A(-1;3;4)$ og $B(4;-2;1)$

a) Bestem koordinaterne til vektoren $\overrightarrow{AB}$.

b) Bestem længden af vektoren $\overrightarrow{AB}$.

Opgave 02 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

(Opg. 468 Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

Givet en trekant : $A(1;3;1)$, $B(2;5;0)$ og $C(4;1;3)$

a) Bestem længderne af trekantens sider.

b) Bestem størrelsen af vinkel *A*.

(Tip: Husk cosinusrelationen fra trigonometri: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A) \Leftrightarrow A = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}\right)$)

c) Bestem arealet af trekant *ABC*.

(Tip: Husk arealformlen fra trigonometri: $Areal = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(C)$)

d) Bestem koordinaterne til midtpunktet på siden *BC*.

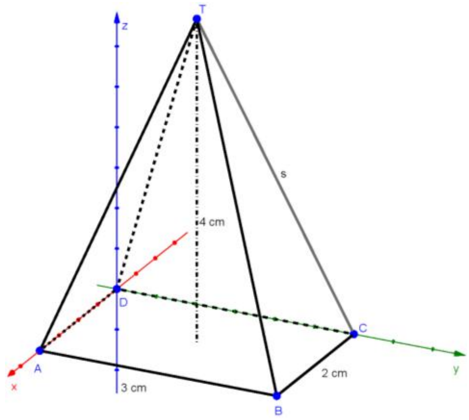
(Tip: Husk midtpunktsformlen fra analytisk plangeometri: $M(x;y;z) = \left(\frac{x_2 - x_1}{2}; \frac{y_2 - y_1}{2}; \frac{z_2 - z_1}{2}\right)$)

e) Bestem længden af medianen m_{BC}.

Opgave 03 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

(Opg. 469 Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

En pyramide med rektangulær grundflade og højde $h = 4\ cm$ er indlagt i et rumligt koordinatsystem som vist på figuren:



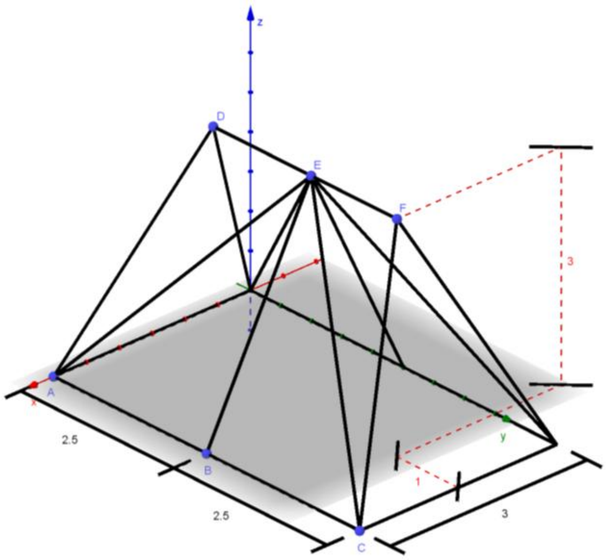
a) **Bestem koordinaterne til toppunktet *T* og grundfladens hjørnepunkter *A*, *B*, *C*, og *D*.**

b) **Bestem længden af en af pyramidens sidekanter, *s*.**

Opgave 04 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

(Opg. 470 Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

En del af en rumlig gitterkonstruktion er indlagt i et rumligt koordinatsystem som vist på nedenstående figur. Alle mål er i meter og konstruktionen antages symmetrisk over husets længde.



a) **Bestem koordinaterne til punkterne *A*, *B*, *C*, *D*, *E* og *F*.**

b) **Bestem længderne af stængerne *AD*, *AE*, *BE*, *CE* og *CF*.**

Vektoraddition og -subtraktion og skalering i rummet:

Hele teorien om vektoraddition og -subtraktion og skalering (multiplikation med en skalar) i planet kan direkte overføres til det rumlige tilfælde.

Se blot på følgende eksempel:

Givet tre vektorer:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}4\\-5\\6\end{pmatrix}\text{ og }\ \vec{c}=\begin{pmatrix}8\\3\\7\end{pmatrix}$$

Bestem længden: $\left|\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}\right|$.

Først bestemmes koordinatsættet til vektoren $\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$.

$$\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}4\\-5\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8\\3\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\cdot 4\\2\cdot(-5)\\2\cdot 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8\\3\\7\end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\-10\\12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8\\3\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+8-8\\2-10-3\\-1+12-7\end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}=\begin{pmatrix}3\\-11\\4\end{pmatrix}}$$

Dernæst findes længden af vektoren $\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$.

$$\left|\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}\right|=\sqrt{3^2+(-11)^2+4^2}=\sqrt{9+121+16}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{\left|\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}\right|=\sqrt{146}\approx 12{,}08}}$$

Opgaver til ”Addition, subtraktion og skalering”

Opgave 05 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

(Opg. 473 Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

Givet to vektorer:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

a) Bestem koordinaterne til vektor $\vec{a} + \vec{b}$ og længden $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|$.

Vektoren $\vec{a} + \vec{b}$ har begyndelsespunkt i $(1;3;2)$.

b) Bestem koordinaterne til vektorens pilpunkt.

Opgave 06 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

(Opg. 474 Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

Givet tre vektorer:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{q} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

a) Bestem koordinaterne til vektor $\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}$ og længden $\left|\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}\right|$.

b) Bestem koordinaterne til vektor $\vec{p} - \vec{q} - \vec{r}$ og længden $\left|\vec{p} - \vec{q} - \vec{r}\right|$.

c) Bestem koordinaterne til vektor $2\vec{p} + 4\vec{q} - 3\vec{r}$ og længden $\left|2\vec{p} + 4\vec{q} - 3\vec{r}\right|$.

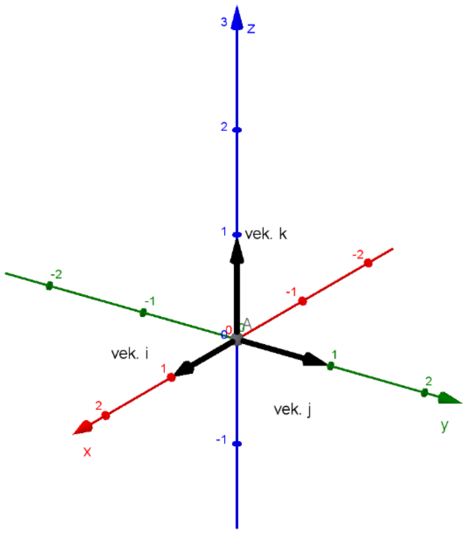
Enhedsvektorer

Enhedsvektorer i koordinatsystemet (Basisvektorer)

Som i afsnittet om enhedsvektorer i planet er en enhedsvektor defineret som en vektor, der har længden 1.

En enhedsvektor i tredimensionelle koordinatsystem er en vektor med længden 1, der er parallel med enten *x*-aksen, *y*-aksen eller *z*-aksen. De benævnes ofte som $\vec{i}$, $\vec{j}$ og $\vec{k}$, og skrives som:

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og.} \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Når enhedsvektorer i tredimensionelle koordinatsystem nævnes kort allerede her, så er det fordi det er nemt at forestille sig, at alle vektorer kan dannes ved at tage ”*x*” antal $\vec{i}$ −vektorer og ”*y*” antal $\vec{j}$ −vektorer og ”*z*” antal $\vec{k}$ −vektorer og derved danne enhver vektor i rummet.

Lidt begreber

En enhedsvektor er en vektor, der har længden 1.

En enhedsvektor benævnes som regel: $\vec{e}$.

Hvis det er en enhedsvektor, der er baseret på en anden vilkårlig vektor – altså en vektor, som har samme retning som en ”oprindelig” vektor, men med længden 1, kalder man den som regel for f.eks.: $\overrightarrow{e_a}$, hvis den oprindelige vektor blev kaldt for $\vec{a}$.

Hvad bruges enhedsvektorer til?

Man kan forestille sig, at man ved at et emne bliver påvirket af en kraft med en vis størrelse. Dog er man ikke helt sikker på, hvilken retning emnet bliver påvirket i.

Kan man regne retningen ud (som en vektor, der peger i den rigtige retning), så er det vel indlysende, at den retningsløse kraft (der jo blot er en skalar), bare skal have associeret en retning til sig.

Det kan gøres ved at multiplicere denne skalar (som jo er en retningsløs vektor) med en enhedsvektor (som jo er en vektor). Lige som det er tilfældet med multiplikation af skalarer, så vil størrelsen af produktet være uforandret, såfremt en af (eller begge) faktorerne er lig med 1. Så den egentlige konklusion af denne operation er, at ”man multiplicerer med en retning”, hvilket jo kan være ganske snedigt …

I kapitlet om vektorprojektion, beskrives et særdeles håndgribeligt eksempel på, hvad enhedsvektorer kan bruges til.

Bevis: Formlen for enhedsvektorers koordinater.

Igen – som så mange gange før og som så mange gange herefter – er det ”Reglen om ens-vinklede trekanter”, som er den drivende kraft i dette bevis.

Det ønskes bevist, at:

$$\boxed{x_e = \frac{v_x}{|\vec{v}|} \quad \text{og} \quad y_e = \frac{v_y}{|\vec{v}|} \quad \text{og} \quad z_e = \frac{v_z}{|\vec{v}|}}$$

Givet en vektor $\vec{v}$ med koordinaterne v_x, v_y og v_z, som vist på nedenstående figur.

Skal man bestemme koordinaterne til $\vec{v}$ ’s enhedsvektor, $\overrightarrow{e_v}$, opstilles to ensvinklede trekanter, som kan beskrives (ifølge ”Reglen om ensvinklede trekanter”) med følgende forhold:

$$\frac{x_e}{v_x} = \frac{1}{|\vec{v}|}, \; \frac{y_e}{v_y} = \frac{1}{|\vec{v}|} \quad \text{og} \quad \frac{z_e}{v_z} = \frac{1}{|\vec{v}|}$$

$\Updownarrow$ $\quad$ $\left(\text{Disse tre udtryk isoleres mht. hhv. } x_e \text{ og } y_e\right)$

$$\underline{x_e = \frac{v_x}{|\vec{v}|}}, \; \underline{y_e = \frac{v_y}{|\vec{v}|}} \quad \text{og} \quad \underline{z_e = \frac{v_z}{|\vec{v}|}}$$

Da enhedsvektoren jo er en vektor, kan disse tre udtryk samles i følgende:

$$\overrightarrow{e_{(v)}} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot v_x \\ \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot v_y \\ \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot v_z \end{pmatrix}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{\overrightarrow{e_{(v)}} = \begin{pmatrix} \frac{v_x}{|\vec{v}|} \\ \frac{v_y}{|\vec{v}|} \\ \frac{v_z}{|\vec{v}|} \end{pmatrix}}}$$

Opgaver til ”Enhedsvektorer”

Opgave 07 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

(Opg. 475 Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

Givet en vektor, $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

a) Bestem koordinaterne til vektor $\vec{a}$'s enhedsvektor $\overrightarrow{e_a}$.

Skalarproduktet

Man skriver skalarproduktet mellem vektor $\vec{a}$ og vektor $\vec{b}$ som:

DEFINITION: $\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v)$,

hvor v er vinklen mellem vektor $\vec{a}$ og vektor $\vec{b}$.

I nogle bøger, og i daglig tale i visse kredse, omtales skalarproduktet også som prik-produktet. Dette skyldes naturligvis notationsformen med den store prik. Det anbefales dog, at man holder sig til at benytte udtrykket: ”Skalarproduktet”. Både i tale og på skrift.

Handlingen beskrives som: ”At tage skalarproduktet af vektor $\vec{a}$ og vektor $\vec{b}$”.

Til gengæld accepteres det også at anvende verbummet: ”At prikke” – igen for at kunne skelne mellem en ordinær multiplikation og et skalarprodukt som et synonym for ”skalarproduktet.

Syntaks: ”At prikke vektor $\vec{a}$ og vektor $\vec{b}$”.

Der er en klar og entydig sammenhæng mellem skalarproduktet og vinklen mellem de to vektorer, som man tager skalarproduktet af. (Beviset kommer senere).

Bemærk (og lær!) følgende skema:

Vinkel:	Mindre end 90° (Spids vinkel)	Lig med 90° (Ret vinkel)	Større end 90° (Stump vinkel)
Skalarprodukt:	Positivt	0	Negativt

Især er det vigtigt at bemærke, at hvis vinklen mellem de to vektorer er lig med 90°, så er skalarproduktet lig med 0. En naturlig følge af, at $\cos(90°)$ er lig med 0.

Fortegnsvariansen af skalarproduktet er dog også meget væsentlig – ikke mindst som en
”on-the-fly” kontrol af beregninger af skalarprodukter.

Som allerede nævnt er skalarproduktet givet ved en DEFINITION.

Der findes imidlertid også en anden definition på skalarproduktet, som især er anvendelig, hvis vektoren er givet på koordinatform.

Givet to vektorer: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$

DEFINITION: Da kan skalarproduktet beregnes som: $\vec{a} \bullet \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$

Når det kommer til at beregne vinklen mellem to vektorer, er det genialt at der er to forskellige definitioner op skalarproduktet. Det betyder nemlig, at man på baggrund af de rektangulære koordinater, kan beregne vinklen mellem to vektorer.
Husk, at i rummet vil der altid kunne udspændes et plan, som er defineret af to vektorer. (Et plan defineres af tre punkter. To vektorer kan defineres at tre punkter, hvis f.eks. deres begyndelsespunkt er fælles, så derfor kan et plan defineres af to vektorer).

Opsummering:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(v)$$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

$$\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(v) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

$$\Updownarrow$$

$$\cos(v) = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2} \cdot \sqrt{b_x{}^2 + b_y{}^2 + a_z{}^2}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{v = \arccos\left(\frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2} \cdot \sqrt{b_x{}^2 + b_y{}^2 + a_z{}^2}}\right)}}$$

Opgaver til "Skalarprodukt"

Opgave 08 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

(Opg. 476 Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

Givet to vektorer:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestem vinklen mellem vektor $\vec{a}$ og vektor $\vec{b}$.

Opgave 09 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

(Opg. 477 Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

Givet to vektorer:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Bestem *t* således at $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Opgave 10 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

(Opg. 478 Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

Givet trekant ABC med

$$A(3;2;4),\ B(6;0;5) \text{ og } C(4;8;1)$$

Bestem *t* således at $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Opgave 11 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

(Opg. 479 Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

Givet vektorerne:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Undersøg om de to vektorer er parallelle.

Opgave 12 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

(Opg. 480 Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

Givet vektorerne:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ -4 \\ 20 \end{pmatrix}$$

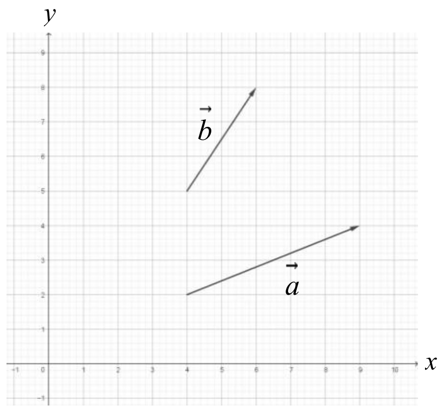
Bestem *t* således, at de to vektorer bliver parallelle.

Vektorprojektion i rummet

Vektorprojektion er allerede forklaret i notatet om vektorer i planet. Heldigvis, kan man relativt nemt forestille sig, at der i rummet eksisterer et vilkårligt plan, som indeholder to vektorer.
(To vektorer alene vil jo altid udspænde et plan, så det er jo ikke nogen vild påstand).
Det kan indses, at teorien bag vektorprojektion i rummet er præcis magen til den teori, som lå bag vektorprojektion i planet – netop på grund af den påstand, at to vektorer udgør et vilkårligt plan i rummet.

En vektor kan projiceres ind på en anden vektor. I praksis vil det sige, at man finder en vektors "skyggebillede" ind på en anden vektor.

Eksempel 13.1:



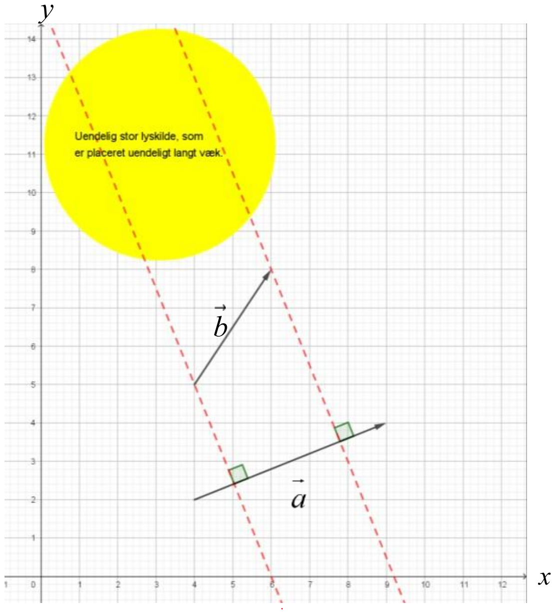
Figur 21: To vektorer. Vektor $\vec{b}$'s skyggebillede skal projiceres ned på vektor $\vec{a}$.

På ovenstående figur ses to vektorer: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

For den første del af teorien, er det ikke nødvendigt at overveje den tredje dimension. Forståelsen er den samme.
Men vær klar over, at i opgaverne om rumgeometri indeholder vektorkoordinaterne også repræsentanten for den tredje dimension, nemlig *z*-værdien.

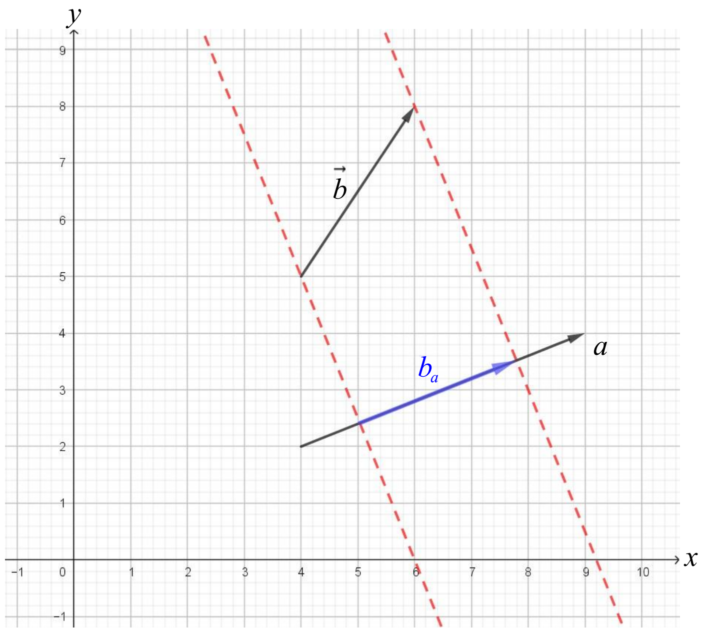
Skal man bestemme projektionen af vektor $\vec{b}$ ned på vektor $\vec{a}$, skal man forestille sig en lyskilde, som er uendelig stor og uendeligt langt væk og som er placeret "et eller andet sted" oppe til venstre for de to vektorer.

Forestiller man sig yderligere, at denne lyskilde får vektor $\vec{b}$ til at kaste en "skygge" ned på vektor $\vec{a}$, så må denne skygge aftegne sig på en del af vektor $\vec{a}$.
Da lyskilden tænkes at være uendelig stor og uendeligt langt væk, må skyggebilledet tegne sig vinkelret ned på vektor $\vec{a}$.



Figur 22: Da lyskilden er uendelig stor og uendeligt langt væk, er skyggen vinkelret ned på vektor $\vec{a}$.

Resultatet er den "skygge", som aftegnes på vektor $\vec{a}$. Den er indtegnet med blåt på næste figur.

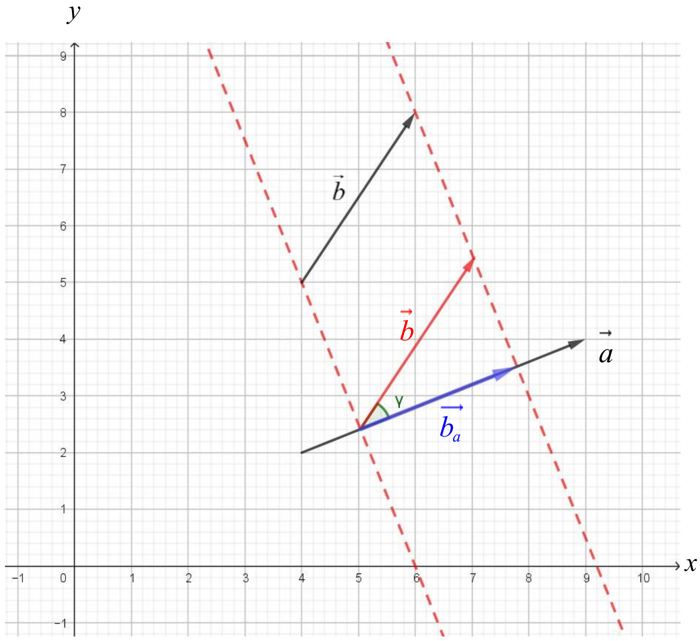


Figur 23: Skyggebilledet svarer til den indtegnede blå vektor $\overrightarrow{b_a}$.

Denne nye blå vektor er projektionen af vektor $\vec{b}$ ned på vektor $\vec{a}$. Den skrives som: $\overrightarrow{b_a}$.

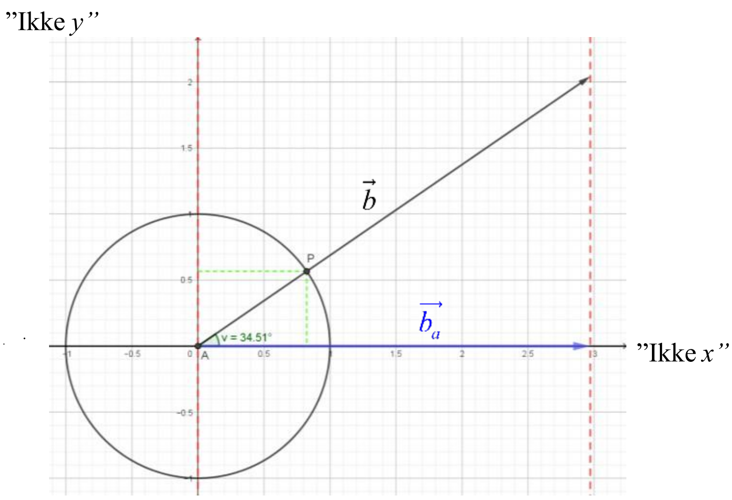
Det er imidlertid ikke nok at tegne den. Det er naturligvis vigtigt, at man kan beregne projektionen.

For forståelsens skyld flyttes vektor $\vec{b}$ således at vektor $\vec{b}$ har sit begyndelsespunkt et sted på vektor $\vec{a}$.



Figur 24: Vektor $\vec{b}$ parallelforskydes af nemheds hensyn, så den netop rører ved vektor $\vec{a}$.

Tænker man – bare for et øjeblik – at man drejer vektor $\vec{a}$ og vektor $\vec{b}$, således at vektor $\vec{a}$ bliver vandret, så kan vektor $\vec{b}$ og vektor $\overrightarrow{b_a}$ placeres med deres pilpunkt i origo i et lokalt koordinatsystem.



Figur 25: Hele figuren drejes af pædagogiske hensyn, så vektor $\overrightarrow{b_a}$ bliver vandret.

Af denne figur ses det, at længden af vektor $\overrightarrow{b_a}$ kan findes ved at multiplicere længden af vektor $\vec{b}$ med cosinus til vinklen mellem vektor $\vec{a}$ og vektor $\vec{b}$. Resten kommer af den gode gamle regel om ensvinklede trekanter. (Se evt. notatet om trigonometri).

$\left|\vec{b}_a\right| = \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(v)$ "Længden af projektionen, hvis vektor $\vec{b}$ er givet i polære koordinater:"

I dette eksempel er vektor $\vec{b}$ kun givet ved et sæt koordinater, så dette er altså ikke godt nok …

Denne længde kan også bestemmes på en anden måde. Definitionen (en af dem) af skalarproduktet erindres som:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(v) \Leftrightarrow \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\left|\vec{a}\right|} = \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(v)$$

Højresiden af denne ligning er netop blevet bestemt, hvilket giver:

$\left|\vec{b}_a\right| = \dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\left|\vec{a}\right|}$ "Længden af projektionen, hvis vektor $\vec{b}$ er givet i rektangulære koordinater:"

$$\left|\vec{b}_a\right| = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}}} = \frac{5 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2}{\sqrt{5^2 + 2^2 + 4^2}} = \frac{10 + 6 + 8}{\sqrt{25 + 4 + 16}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left|\vec{b}_a\right| = \frac{24}{\sqrt{45}} = \frac{24}{3\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}} \approx 3{,}58$$

Så uanset om vektor $\vec{b}$ er givet ved polære eller rektangulære koordinater, er længden af vektor $\vec{b}$ nu kendt ved beregning.

Selve projektionsvektoren er dog ikke bestemt endnu – kun længden af den …

Så hvad er det, der mangler? Det er selvfølgelig retningen. Det er tidligere i dette notat gennemgået, hvorledes man kan "multiplicere med en retning". Det er ved at multiplicere med en enhedsvektor, som har samme retning, som den vektor, der projiceres ned på – og det er jo i dette tilfælde: vektor $\vec{a}$.

Her er den eneste forskel mellem at finde en vektorprojektion i planet og en vektorprojektion i rummet. Det skyldes, at når man skal udregne enhedsvektoren, så er det nu nødvendigt at inkludere den tredje dimension, nemlig z-aksen og den dertil hørende z-værdi.

Beregning af vektor $\vec{a}$'s enhedsvektor:

$$\vec{e_a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{e_a} = \begin{pmatrix} \frac{a_x}{|\vec{a}|} \\ \frac{a_y}{|\vec{a}|} \\ \frac{a_z}{|\vec{a}|} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{e_a} = \begin{pmatrix} \frac{a_x}{\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}} \\ \frac{a_y}{\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}} \\ \frac{a_z}{\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}} \end{pmatrix}$$

$\Updownarrow$

$$\vec{e_a} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{5^2+2^2+4^2}} \\ \frac{2}{\sqrt{5^2+2^2+4^2}} \\ \frac{4}{\sqrt{5^2+2^2+4^2}} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{e_a} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{25+4+16}} \\ \frac{2}{\sqrt{25+4+16}} \\ \frac{4}{\sqrt{25+4+16}} \end{pmatrix}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\vec{e_a} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{45}} \\ \frac{2}{\sqrt{45}} \\ \frac{4}{\sqrt{45}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{4}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}}$$

Dette er altså den ønskede retning. Nu er der kun tilbage at multiplicere projektionens længde med projektionens retning.

$$\vec{b_a} = |\vec{b_a}|\cdot\vec{e_a}$$

$\Updownarrow$

$$\vec{b_a} = \frac{8}{\sqrt{5}}\cdot\begin{pmatrix} \frac{5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{4}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{\sqrt{5}}\cdot\frac{5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{8}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{8}{\sqrt{5}}\cdot\frac{4}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{40}{3\cdot 5} \\ \frac{16}{3\cdot 5} \\ \frac{32}{3\cdot 5} \end{pmatrix}$$

$\Updownarrow$

$$\underline{\underline{\vec{b_a} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{16}{15} \\ \frac{32}{15} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2{,}6667 \\ 1{,}0667 \\ 2{,}1333 \end{pmatrix}}}$$

Opgaver til "Vektorprojektion"

Opgave 13 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

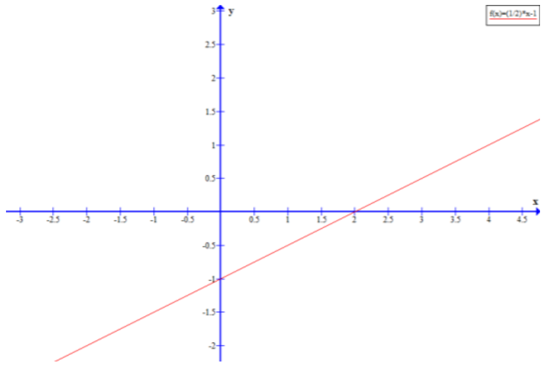
(Opg. 481 Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

Givet vektorerne:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \;\&\; \vec{b} = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

a) Bestem længden af vektor $\vec{b}$'s projektion på vektor $\vec{a}$.
b) Bestem vektorprojektionen af vektor $\vec{b}$'s projektion på vektor $\vec{a}$.
c) Bestem længden af vektor $\vec{a}$'s projektion på vektor $\vec{b}$.
d) Bestem vektorprojektionen af vektor $\vec{a}$'s projektion på vektor $\vec{b}$.

Parameterfremstilling af en linje



Allerede på grundforløbet, var rette linjer på menuen. Det er kendt viden, at linjens ligning kan skrives som: $y = ax + b$.
Her er a lig med linjens hældning og b er linjens skæring med y-aksen.

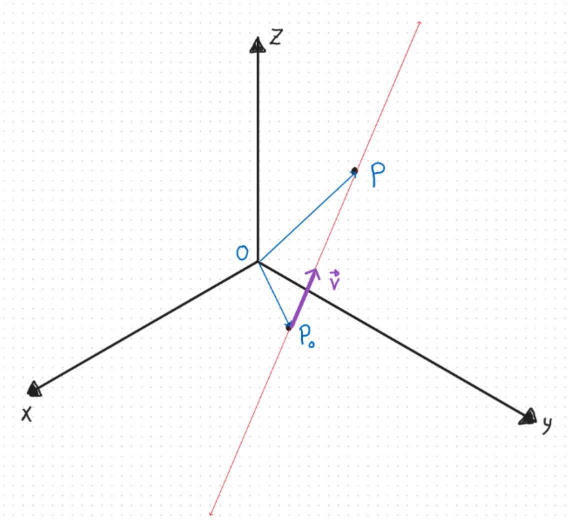
Skal man tegne linjen ud fra forskriften, vil man typisk begynde med at markere det punkt på y-aksen, hvor linjen skærer. Derfra kan man så gå 1 enhed til højre på x-aksen og markere a lodret op eller ned (afhængig af a's fortegn) og der afsætte det næste punkt. Man kan gentage det sidste trin, hvis man ønsker flere punkter – altså gå yderligere 1 enhed til højre for det senest tegnede punkt og igen afsætte a lodret derfra …

Det er noget mere kompliceret, hvis man ønsker at gøre dette i rummet. Vel kan man afsætte et punkt på y-aksen, men hvilken retning skal man så gå derfra for at afsætte de næste punkter.

Der er brug for noget mere konkret, når man arbejder i rummet.

Forskellen mellem at arbejde med linjer i planet og i rummet er nu ikke så stor, når man får set nærmere på det. I stedet for en hældning og skæring med y-aksen, skal man nu kende eller udregne et fast punkt (ankerpunkt) på linjen (ligesom med linjen i planet) og så en retningsvektor i stedet for en hældning.

Se på nedenstående figur.



Figuren viser en (rød) linje, som i princippet strækker sig i begge retninger i al uendelighed. Det ses, at linjen går igennem punktet $P_0\left(x_0; y_0; z_0\right)$. (Det er den rumlige stedfortræder for b, som i planet var skæringen med y-aksen – altså et kendt punkt).
Det ses også, at der langs linjen er en (lilla) retningsvektor, $\vec{v}$. Det er stedfortræderen for det plane stigningstal/hældningskoefficient.

Hele formålet med denne øvelse er, at kunne beskrive et hvilket som helst punkt $P(x;y;z)$ på linjen. Det kan gøres ved hjælp af stedvektoren $\overrightarrow{OP}$, da den kan opfattes som resultanten af summen af de to vektorer: $\overrightarrow{OP_0}$ og $\overrightarrow{P_0P}$.

Ligningen for dette bliver da:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P}$$

Det gode gamle trick med at beskrive punkter i koordinatsystemet som stedvektorer benyttes igen.

Det bemærkes, at distancen $\overrightarrow{P_0P}$ også kan noteres som: $t \cdot \vec{r}$. Her er *t* en parameter.

Slår man ordet ”parameter” op i Den Danske Ordbog ses det, at det er en størrelse, som hele tiden varierer, men som er konstant i enhver enkelt konkret beregning.

Den engelske udgave af ”Wikipedia” har en lignende definition: Her beskrives en parameter som en mængde (værdi), som ændrer karakteristika for en funktion.

Det er altså en værdi, som kan ændre sig for at beskrive et system, som gennemgår flere stadier.

En linje kan betragtes som en serie af punkter (en sammenhæng mellem en *x*-værdi og en *y*-værdi) som er beliggende langs en ret linje. Da der i princippet er uendeligt mange punkter, opfattes en linje ikke som en mængde af punkter, men blot som en ret linje.
En parameter kaldes ofte for *t*, da en måde at forklare det på, kunne være, at et system ændrer sig efterhånden som tiden går. *t* er da et udtryk for tid.

Her i matematikken, skal det nu mere tænkes på som at tiden går uendelig hurtigt. På den måde kan *t* antage alle værdier, og grafen eksisterer naturligvis ”over det hele” uanset tidspunktet.

Med dette tankesæt for *t* og dermed også for $t \cdot \vec{r}$ kan ovenstående ligning omskrives til:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t \cdot \vec{r}$$
$$\Updownarrow$$
$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \cdot r_x \\ t \cdot r_y \\ t \cdot r_z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + t \cdot r_x \\ y_0 + t \cdot r_y \\ z_0 + t \cdot r_z \end{pmatrix}}$$

Målet er nået. Det er nu muligt at bestemme et punkt P på linjen ved at kende et fast punkt $P_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ og linjens retning givet ved en retningsvektor $\vec{r}$.

Det skal lige bemærkes, at det faste punkt på linjen i parameterfremstillingen kan være et hvilket som helst punkt, som er beliggende på linjen. Det kan f.eks. være et af de to givne punkter eller et helt tredje punkt – bare det er beliggende på linjen.
Ligeledes kan enhver retningsvektor, som har den samme retning bruges. F.eks. er der i denne forbindelse ingen forskel på disse tre retningsvektorer:

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\vec{r}=\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}\quad \text{og}\quad \vec{r}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix},$$

da de alle er parallelle med linjen.

Der er derfor uendeligt mange forskellige, men korrekte løsninger, når man får opgaven at bestemme en parameterfremstilling for en linje.

Eksempel:

Bestem en parameterfremstilling for den linje, som går igennem punkterne:

$$A\left(-2;3;4\right)\ \text{og}\ B\left(6;-1;5\right).$$

Først bestemmes retningsvektoren, ved at udregne vektorkoordinatet mellem de to punkter.
Bemærk, at der ikke opstår problemer ved at "blande" punktkoordinater og vektorkoordinater, da punkterne undervejs bliver "oversat" til stedvektorer.

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}b_x-A_x\\b_y-A_y\\b_z-A_z\end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}6-(-2)\\-1-3\\5-4\end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{\vec{r}=\begin{pmatrix}8\\-4\\1\end{pmatrix}}}$$

Som allerede nævnt, kan ethvert punkt på linjen bruges som fast punkt. Her vises de to løsninger (ud af uendeligt mange), som er baseret på de to punkter, som er givet i opgaven.

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}}} \quad \text{eller} \quad \underline{\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

Dette kan også skrives (lige så korrekt) på formen:

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+8t \\ 3-4t \\ 4+t \end{pmatrix}}} \quad \text{eller} \quad \underline{\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+8t \\ -1-4t \\ 5+t \end{pmatrix}}}$$

Opgaver til "Den rette linje"

Opgave 14 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

(Opg. 482 Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

Opstil en parameterfremstilling for hhv. *x*-, *y*- og *x*-aksen.

Opgave 15 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

(Opg. 483 Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

Givet en trekant *ABC* med:

$$A=(3;2;4),\ B=(6;0;5)\ \text{og}\ \ C=(4;8;1)$$

Bestem vinklerne *A*, *B* og *C*.

Opgave 16 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

(Opg. 484 Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

Givet tre punkter:

$$A=(-3;1;5),\ B=(2;-4;-2)\ \text{og}\ \ C=(12;-14;-16)$$

Undersøg om de tre punkter ligger på en ret linje.

Skæring mellem to linjer i rummet:

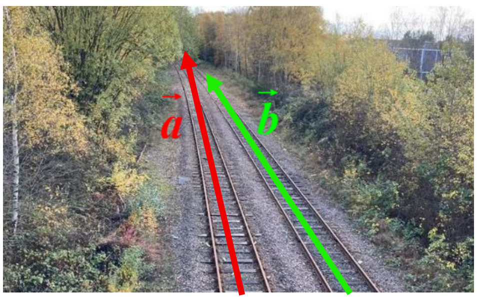
I notatet om ”Analytisk plangeometri”, blev det behandlet, hvordan to linjer i planet kan interagere med hinanden. For at opfriske emnet, så er der tre måder, hvorpå to linjer kan ligge i forhold til hinanden på i planet.

1) De kan være parallelle, men ikke sammenfaldende.
   Hvis det er tilfældet, er der ingen fælles punkter mellem de to linjer.
2) De kan være parallelle og sammenfaldende.
   Her er der uendeligt mange løsninger, da linjerne ligger lige oven i hinanden.
3) De kan have forskellige hældninger, og er dermed ikke parallelle.
   I dette tilfælde må der være ét og netop ét skæringspunkt mellem de to linjer, under den forudsætning af definitionsmængden er alle reelle tal for begge linjer.

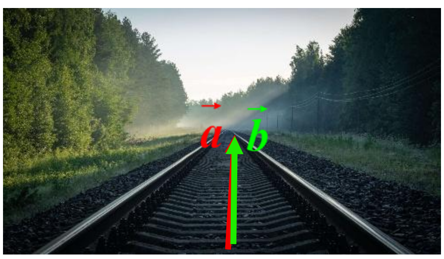
De første to af disse tilfælde, kan overføres direkte til det rumlige koordinatsystem.
Men det er ikke helt nok, at se på de tre ovenstående punkter, for der er jo en ekstra dimension, så der er lidt flere muligheder.

Så i rummet er der følgende fire muligheder:

1) De kan være parallelle, men ikke sammenfaldende.
   Hvis det er tilfældet, er der ingen fælles punkter mellem de to linjer.
2) De kan være parallelle og sammenfaldende.
   Her er der uendeligt mange løsninger, da linjerne ligger lige oven i hinanden.
3) De kan have forskellige retninger, og er dermed ikke parallelle, men i samme plan.
   I dette tilfælde må der være ét og netop ét skæringspunkt mellem de to linjer, under den forudsætning af definitionsmængden er alle reelle tal for begge linjer.
4) De kan have forskellige retninger, og er dermed ikke parallelle, men i forskellige planer.
   I denne situation siger man, at linjerne er vindskæve, og der er ingen fælles punkter mellem de to linjer.



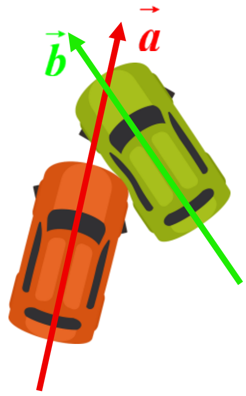
Tilfælde 1)
Hvis de to linjer er parallelle, men ikke sammenfaldende, kan det sammenlignes med en togstrækning med to spor. To tog, som kører på hver sit spor, vil aldrig kunne støde sammen. Der er ingen fællespunkter mellem de to togspor.



Tilfælde 2)
Hvis de to linjer derimod er sammenfaldende (og dermed nødvendigvis parallelle), kan det sammenlignes med en enkeltsporet togstrækning. Der er masser (uendeligt mange) af steder, hvor to tog kan støde sammen – uanset om de kører i modsat retning imod hinanden eller om et tog bliver indhentet og ramt af et andet tog.

Tilfælde 3)

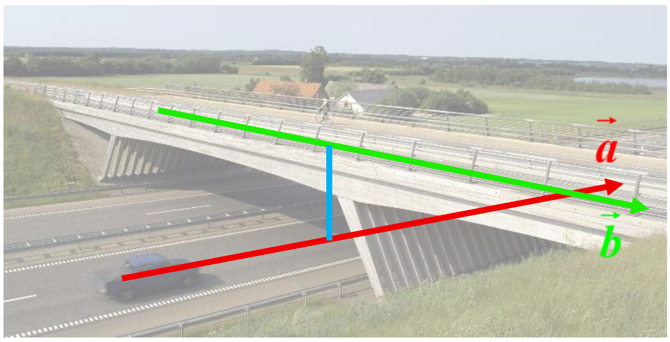
Som det er tilfældet i planet, så vil to linjer skære hinanden, hvis de har forskellige hældninger. Overført til det rumlige koordinatsystem, vil det stadig gælde. Bemærk, at der i et "billede af dagligdagen" er masser af forskellige planer i et system. F.eks. er der omkring et vejkryds i en storby planer repræsenteret af vejbaner, lodrette vægge, etageadskillelser. Når biler støder sammen, befinder de sig nødvendigvis på det samme plan.



Tilfælde 4)

Når fly flyver, vil man kunne se, hvis man følger med på en radar, at de af og til støder sammen. I virkeligheden er det meget, meget sjældent at fly støder sammen i luften. Og hvis man ser ordentligt efter på radaren, kan man se, at der for hver flyvemaskine er noteret flyvehøjden. Flyvelederne ser dette, som det mest naturlige og forestiller sig himlen som et rumligt koordinatsystem, og kan adskille flyenes ruter i forskellige højder. Så hvis man ser situationen lige ovenfra, så ser det ud som om at flyene støder sammen, men de flyver ikke i samme højde.

Et andet eksempel, som er mere jordnært ;-) er en motorvej, som krydses af en motorvejsbro. Her kan to biler sagtens befinde sig på den samme lokation, set ovenfra, men da den ene bil kører på vejen under broen og den anden bil kører oppe på broen, vil mødet mellem dem være harmløst, da de ikke kan ramme hinanden.



Bemærk den blå højdeforskel på tegningen.

Der er som nævnt tre tilfælde. Faktisk er der fire, men to af dem giver det samme resultat.

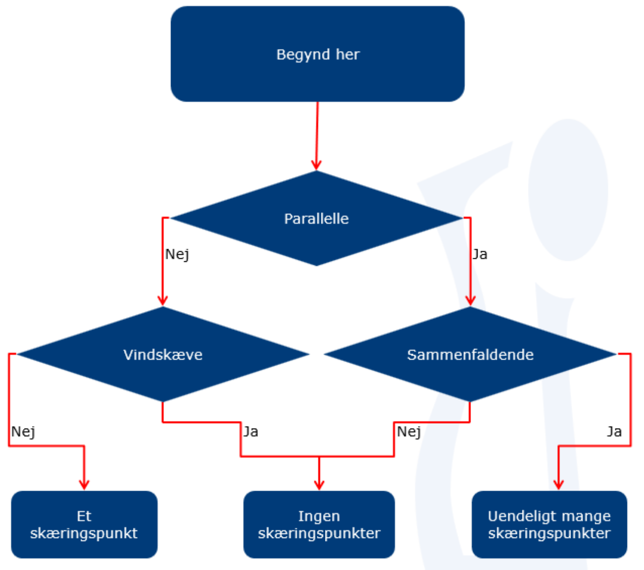
Først kan det betale sig at afgøre, hvorvidt de to linjer er parallelle. Det gøres nemmest ved at betragte de to retningsvektorer og afgøre, om de er skalerbart ens. Ofte kan det nemt afgøres ved at betragte fortegnene på de to retningsvektorer. Hvis de er ens eller direkte modsat, er der mulighed for, at man kan multiplicere den ene retningsvektor med et tal og få den anden retningsvektor. Hvis det på trods af fortegnene ikke kan lade sig gøre at skalere den ene retningsvektor til den anden, så er de to linjer ikke parallelle.

Hvis det viser sig, at vektorerne har den samme retning (skaleret eller ej), så er der to muligheder. Enten er de sammenfaldende eller også er de beliggende to forskellige steder.

Hvis de to linjer er sammenfaldende, så er der uendeligt mange fællespunkter – og dermed også uendeligt mange løsninger på, hvor de to linjer "skærer" hinanden.

Hvis de to linjer ikke er sammenfaldende, vil de aldrig kunne komme til at røre hinanden, og der er dermed ingen fællespunkter. $(L = \varnothing)$.

Herefter er der så igen to muligheder. Enten så kommer linjerne til at skære hinanden i netop ét punkt, eller også er de vindskævt beliggende og har ingen røringspunkter.



Skal man bestemme matematisk, om to linjer i rummet skærer hinanden i et punkt, all e punkter eller ingen punkt, kan man betragte det som i eksemplet med flyvelederne. Problemet betragtes ”fra oven”. Det vil sige, at man kan (i første omgang) ”nøjes” med at undersøge om x- og y-koordinaterne er sammenfaldende.

Det er barnelærdom, at man skal bruge én ligning for at finde én ubekendt, to ligninger for at finde to ubekendte etc.
Hvis man her betragter de to linjers parameterfremstillinger, så er der netop to ubekendte: nemlig s og t. (Ganske som det var tilfældet i afsnittet om ”Komposanter” i notatet om vektorer i planet.

Sagen er bare, at der er tre ligninger. Der er nemlig <u>tre</u> regnskaber at holde styr på: x-regnskabet, y-regnskabet og z-regnskabet. Det giver tre ligninger.
Det er ikke nødvendigvis en god ting at have tre ligninger til to ubekendte. Man kunne forestille sig, at det var ren luksus at have en ligning i overskud, men det betyder jo bare, at den tredje ligning også skal passe ind i systemet, og det er ikke altid så lige til.

Om overbestemmelser, kan man finde følgende på Internettet:

En overbestemt ligning er et system af flere ligninger med færre ubekendte, end der er ligninger, hvilket typisk betyder, at der ikke findes en præcis løsning. Ofte opstår der inkonsistenser eller modstridende informationer i et overbestemt system, som gør det umuligt at finde et sæt værdier for de ubekendte, der tilfredsstiller alle ligningerne samtidigt.

Hvad det betyder for løsningen

- **Mangel på en entydig løsning:** I et system med et ubekendtantal af ligninger for et antal af ubekendte, vil et overbestemt system typisk ikke have en løsning, der opfylder alle betingelserne.
- **Konflikt mellem ligninger:** De forskellige ligninger kan indeholde modstridende oplysninger, hvilket betyder, at der ikke findes en fælles løsning for alle.

Eksempel

Forestil dig, at du har to ligninger med kun én ubekendt, for eksempel x:

1. x = 3
2. x = 5

Dette er et overbestemt system, fordi du har to forskellige krav til, hvad x skal være, hvilket er umuligt at opfylde samtidigt. Her er der ingen værdi af x, der kan tilfredsstille begge ligninger på samme tid.

I dette tilfælde er det dog intet mindre end genialt at have tre ligninger til to ubekendte. Det betyder, at man kan undersøge problemet for x og y – altså to ligninger (ud af vektorens indbyggede tre ligninger) for at finde ud af, om de to ligninger kan befinde sig på samme xy-koordinat på samme tid. Det passer jo lige til s og t.

Viser det sig, at der er en mulighed for at de to linjer befinder sig på samme sted, så kan man bruge den tredje ligning som en kontrol om, hvorvidt de to linjer så også kommer til at ramme hinanden i z-koordinatet.

Så det, man i praksis gør, er at undersøge om der er en ”apparent intersection” – en tilsyneladende skæring. Dette gøres som allerede forklaret ved at betragte hele systemet ovenfra – ligesom flyvelederne – for at se, om de to linjer på et tidspunkt kan befinde sig på det samme punkt i planen. Hvis det er tilfældet, benytter man så de to fundne variable s og t til at sætte ind i den tredje ligning for at se om der er tale om en rumlig kollision mellem de to linjer.

Dette vises ved et eksempel:

Givet to linjer: *a* og *b*.

$$a:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+s\\-2-4s\\3+3s\end{pmatrix}\qquad b:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\4\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5+2t\\4+3t\\2-4t\end{pmatrix}$$

Først betragtes de to retningsvektorer for at fastslå om de er parallelle.

$$\overrightarrow{r_a}=\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}\text{ og }\overrightarrow{r_b}=\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}.$$

Det indses nemt, at de to linjer ikke er parallelle. Nemmest ses det på vektorkoordinaternes fortegn. De er hverken ens eller direkte modsatte:

$$\overrightarrow{r_a}=\begin{pmatrix}+\\-\\+\end{pmatrix}\text{ og }\overrightarrow{r_b}=\begin{pmatrix}+\\+\\-\end{pmatrix}.$$

Så det vil aldrig være muligt at gange den ene med en faktor og få den anden som resultat.

Altså kan det konkluderes, at de to linjer ikke er parallelle.

De to vektorer sættes lig med hinanden. Men først "eksploderes" de to vektorer for at se de tre ligninger hver for sig:

$$\begin{aligned}x:&\quad 2+s &=&\ -5+2t\\ y:&\quad -2-4s &=&\ 4+3t\\ z:&\quad 3+3s &=&\ 2-4t\end{aligned}$$

Hvis der eksisterer et skæringspunkt, betyder det, at der eksisterer værdier for *s* og *t*, som kan opfylde alle tre ligninger.

Først arbejdes med de to første ligninger (*x* og *y*). Det behøver ikke at være netop disse to ligninger. Vælg dem, som ser ud til at være de nemmeste at arbejde med.

Fra den første ligning fås:

$$2+s=-5+2t$$
$$\Updownarrow$$
$$s=-5+2t-2$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{s=2t-7}$$

Dette udtryk for s indsættes i ligningen for y:

$$-2-4s=4+3t$$
$$\Updownarrow$$
$$-2-4\cdot(2t-7)=4+3t$$
$$\Updownarrow$$
$$-2-8t+28=4+3t$$
$$\Updownarrow$$
$$-8t-3t=4+2-28$$
$$\Updownarrow$$
$$-11t=-22$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{t=2}$$

Dette resultat sættes igen ind i den første ligning (x-ligningen).

$$s=2t-7$$
$$\Updownarrow$$
$$s=2\cdot 2-7$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{s=-3}$$

Nu kendes s og t.

Det er her, at man for en gangs skyld kan drage nytte af at der er en overbestemmelse. Her viser det sig nemlig, at hvis man indsætter s og t i den tredje ligning (husk, at det er x-ligningen), så vil det stemme, hvis der er et skæringspunkt i rummet, og hvis det ikke stemmer, så er linjerne vindskævt beliggende.

$$3+3s\overset{?}{=}2-4t$$
$$\Updownarrow$$
$$3+3\cdot(-3)\overset{?}{=}2-4\cdot 2$$
$$\Updownarrow$$
$$3-9\overset{?}{=}2-8$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{-6\overset{?}{=}-6}$$

Det ses, at det stemmer. Konklusionen er derfor, at der eksisterer et skæringspunkt mellem de to linjer.

Nu skal det blot bestemmes:

Nu indsættes en af parametrene, s eller t i en af de respektive linjers parameterfremstilling.

Det er faktisk fuldstændig ligegyldigt, om man indsætter parameteren s i parameterfremstillingen for linje a eller om man indsætter parameteren t i parameterfremstillingen for linje b.

Her vises begge muligheder for pædagogikkens skyld. Det forventes IKKE i opgaverne, at man laver begge udregninger.

$$a:\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+(-3) \\ -2-4\cdot(-3) \\ 3+3\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2+12 \\ 3-9 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix}}} \qquad b:\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+2\cdot 2 \\ 4+3\cdot 2 \\ 2-4\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+4 \\ 4+6 \\ 2-8 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix}}}$$

Resultatet er det samme!

Konklusionen er, at skæringspunktet mellem de to linjer ligger i: $\underline{\underline{(x;y;z)=(-1;10;6)}}$.

Det er ok at skrive det som et punktkoordinat. Det hele kan jo, som det er forklaret mange gange, oversættes frem og tilbage til stedvektorer.

Opgaver til "Skæring mellem to linjer"

Opgave 17 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

(Opg. 485 Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

To rette linjer: a og b er givet ved deres parameterfremstillinger:

$$a: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-5t_1 \\ -1-t_1 \\ 6-3t_1 \end{pmatrix} \quad \& \quad b: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21-4t_2 \\ 10-3t_2 \\ -1+4t_2 \end{pmatrix}$$

a) Undersøg om de to linjer har et skæringspunkt.
b) Bestem i bekræftende fald dette skæringspunkt.

Opgave 18 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

(Opg. 486 Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

En ret linje, k, går gennem punktet $(x;y;z)=(12;10;-5)$ og har en retningsvektor $\vec{r_k} = \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}$.

En anden ret linje, m, går gennem punktet $(x;y;z)=(6;-2;-4)$ og har retningsvektoren $\vec{r_m} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3{,}5 \\ 4 \end{pmatrix}$

a) Undersøg om de to linjer, *k* og *m*, har et skæringspunkt.
b) Bestem i bekræftende fald dette skæringspunkt.

Opgave 19 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

(Opg. 487 Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

To rette linier p og q går igennem følgende punkter:

$$p: \quad (12;10;-5) \quad \text{og} \quad (20;-4;3)$$
$$q: \quad (5;-8;3) \quad \text{og} \quad (10;6;7)$$

Undersøg om de to linjer skærer hinanden, og bestem i bekræftende fald skæringspunktet.

Vektorprodukt

Lad der være givet to vektorer, $\vec{a}$ & $\vec{b}$.

Disse to vektorer er ikke parallelle, og vinklen mellem dem ligger i intervallet $]0°;180°[$.
Det sidste krav kan virke overflødigt, men det er jo strengt taget muligt, at en vinkel, målt i den positive omløbsretning kan ligge i intervallet $]0°;360°[$. Hvis dette er tilfældet, kan det være nødvendigt at bytte om på vektorernes "rækkefølge" – altså sådan at i stedet for at arbejde med vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$, så må man arbejde med vinklen mellem.

Notationen for vektorproduktet er: $\vec{a} \times \vec{b}$, og dette kaldes for vektorproduktet.
Nogle kilder vil kalde det for krydsproduktet.

Ligesom ved skalarproduktet, er der to definitioner på, hvordan det udregnes, men der er en meget væsentlig forskel:

Hvor resultatet af skalarproduktet gav et tal (en skalar), så giver vektorproduktet en vektor.
(Her er det også muligt at beregne længden af denne vektor).

Længden af vektoren defineres som:

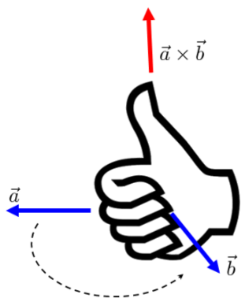
DEFINITION: $$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin(v),$$

hvor *v* er vinklen mellem vektor $\vec{a}$ og vektor $\vec{b}$.

Bemærk, at det er LÆNGDEN af den vektor, som udgøres af vektorproduktet, der er givet her.

Bemærk også rækkefølgen på vektorerne. Det er vektorproduktet af vektor $\vec{a}$ MOD vektor $\vec{a}$.

Igen kan bruges højrehåndsreglen på præcis samme måde, som da *z*-aksens retning skulle præciseres ud fra *x*- og *y*-akserne.

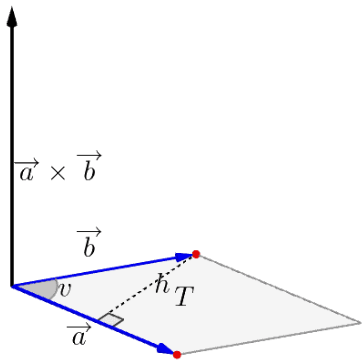


De to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ udspænder et parallelogram i det plan, hvor de begge befinder sig.
Det viser sig, at længden af vektorproduktet, numerisk set er det samme som arealet af parallelogrammet.

Det vises i det følgende:

$$A = højde \cdot grundlængde$$

Som det kendes fra trigonometrien:



$$\sin(v) = \frac{modstående\ katete}{hosliggende\ katete} = \frac{h}{|\vec{b}|}$$

$\Updownarrow$

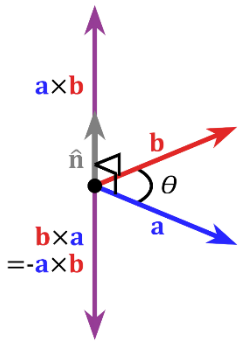
$$h = |\vec{b}| \cdot \sin(v)$$

Grundlinjen kan også udtrykkes som længden af vektor $\vec{a}$, hvilket giver:

$$Areal = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(v)$$

Hermed er det vist, at den numeriske værdi af vektorproduktet $\vec{a} \times \vec{b}$ er det samme som arealet af det parallelogram, som udspændes af de to vektorer.

Endvidere skal det bemærkes, at den vektor, som opstår som resultat af vektorproduktet er vinkelret på begge vektorerne.
Ændres fortegn på vektorproduktet, fås den modsat rettede vektor.



Konklusion:

Vektorproduktet er en vektor, som står vinkelret på de to vektorer, som bruges i udregningen af vektorproduktet. Retningen af denne vektor bestemmes af højrehåndsreglen. Denne vektor udregnes som:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_x = \begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} = a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_y = \begin{vmatrix} a_z & b_z \\ a_x & b_x \end{vmatrix} = a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_z = \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$$

Længden af denne vektor er en numerisk størrelse, som også er lig med arealet af det parallelogram, som udspændes af de to vektorer. Denne kan udregnes som:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(v),$$

Hvor v er vinklen mellem de to vektorer. (Denne kan ofte udregnes vha. skalarproduktet).

Opgaver til "Vektorprodukt"

Opgave 20 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

(Opg. ??? Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

Givet to vektorer:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestem vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

b) Bestem $\vec{a} \times \vec{b}$.

Opgave 21 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

(Opg. ??? Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

Givet to vektorer:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

a) Bestem arealet af det parallelogram, der udspændes af de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Opgave 22 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

(Opg. ??? Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

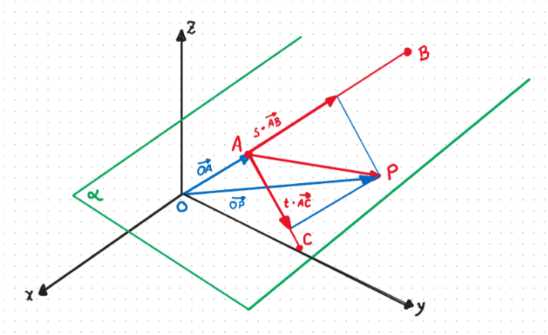
Givet to vektorer:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 11 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -7 \end{pmatrix}$$

a) Bestem koordinaterne til $\vec{a} \times \vec{b}$.

b) Bestem det areal, der udspændes af to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Parameterfremstilling af plan



Lad der være givet et rumligt koordinatsystem, hvori der er tre punkter:
$A(x_0;y_0;z_0)$, $B(B_x;B_y;B_z)$ og $C(C_x;C_y;C_z)$.

De tre punkter, der ikke kan ligge på en ret linje, udspænder et plan, α.

Tænker man tilbage på afsnittet om ”komposanter” i ”Notat om vektorer”, kan man erindre, at hvis to vektorer (som ikke er parallelle) er skalerbare, så kan de – idet de hver især kan skaleres, hvis de bliver adderet, give ethvert punkt i planet. Som sædvanlig bliver hele alle punkter ”oversat” til stedvektorer for at de kan udregnes som vektorer.

Som det var tilfældet i planet, kan dette sagtens overføres til det rumlige tilfælde, og enhver vektor, som ligger i planet α, kan opløses i hhv. vektorerne $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$’s retninger.

Igen – som det var tilfældet i afsnittet om ”Komposanter” i ”Notat om vektorer”, gælder:

$$\overrightarrow{AP} = s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC}$$

Antages det, at origo er udgangspunktet i det rumlige koordinatsystem, kan punktet P angives på følgende form:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC}$$

Vektorkoordinaterne til hhv. $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ udregnes:

Hvilket giver:

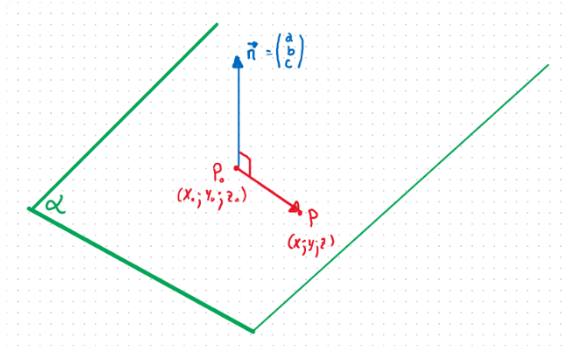
$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} B_x - x_0 \\ B_y - y_0 \\ B_z - z_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} C_x - x_0 \\ C_y - y_0 \\ C_z - z_0 \end{pmatrix}}}$$

Den hurtige forklaring (til eksamen) er, at et plan kan udspændes af to vektorer. To vektorer, kan dannes vha. tre punkter, hvis de deler et fællespunkt. Dette fællespunkt er punktet: $(x_0;y_0;z_0)$, og det fungerer som et ”ankerpunkt”, hvorfra alle punkter i planet udregnes ved at gange hver af vektorerne med en faktor, og derefter lægge dem sammen.

Planets ligning på normalform

Et plan kan skrives på flere måder. Det er allerede vist, hvordan man kan beskrive et plan ved hjælp af en parameterfremstilling.

En anden måde er at beskrive et plan ved hjælp af **planets ligning på normalform**.



Lad der i planet være givet en vektor, $\overrightarrow{P_0P}$.

$P_0 = (x_0; y_0; z_0)$ er udgangspunktet, eller ankerpunktet, som er beliggende i planet og $P = (x; y; z)$ som er et vilkårligt punkt – også beliggende i planet.

Dvs. at vektoren $\overrightarrow{P_0P}$ er beliggende i planet. Vektorens koordinater udregnes som:

$$\overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$$

Planets normalvektor, $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ er vinkelret på planet. Og det vil igen sige, at vektorerne $\overrightarrow{P_0P}$ og $\vec{n}$ er vinkelrette på hinanden – uanset hvor punktet P ligger i planet i forhold til P_0.

Da de to vektorer er vinkelrette på hinanden, må deres indbyrdes skalarprodukt være lig med 0.

$$\vec{n} \bullet \overrightarrow{P_0P} = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) + c \cdot (z - z_0) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$$
$$\Updownarrow \qquad \text{(Da } -ax_0, -by_0 \text{ og } -cz_0 \text{ alle er konstanter, samles de i én konstant: } d.\text{)}$$
$$\underline{\underline{ax + by + cz + d = 0}}$$

Der skal kun bruges èn vektor ($\overrightarrow{P_0P}$) for at udregne selve planets ligning (på normalform), men der skal jo bruges to vektorer (eller tre punkter) for at udregne vektorproduktet, som skal udregnes for at bestemme normalvektoren, $\vec{n}$.

Opgaver til "Planets parameterfremstilling og ligning"

Opgave 23 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

(Opg. ??? Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

$$A=(2;1;4),\ B=(-3;6;-1) \text{ og } C=(5;7;8)$$

a) Opstil en parameterfremstilling for planet.
b) Opstil en ligning for planet.

Opgave 24 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

(Opg. ??? Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

Givet et plan med ligningen:

$$3x-4y-7z+25=0$$

a) Undersøg om punktet (5;3;4) ligger i planet.
b) Bestem to punkter i planet med $x=8$.
c) Bestem to punkter i planet med $y=5$.
d) Bestem to punkter i planet med $z=2$.

Opgave 25 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

(Opg. ??? Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

Et plan har parameterfremstillingen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Bestem en ligning for planet.

Opgave 26 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

(Opg. ??? Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

Et plan har ligningen:

$$-2x+3y-5z+24=0$$

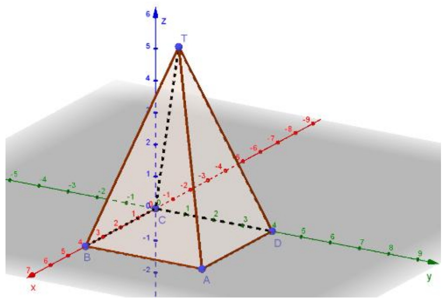
Bestem en parameterfremstilling for planet.

Opgave 27 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

(Opg. ??? Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

En pyramide med kvadratisk grundflade med grundfladekant = 4 *cm* og en højde = 6 *cm* er indlagt i et rumligt koordinatsystem som vist på figuren.

Opstil ligninger for pyramidens fire skrå sideflader.

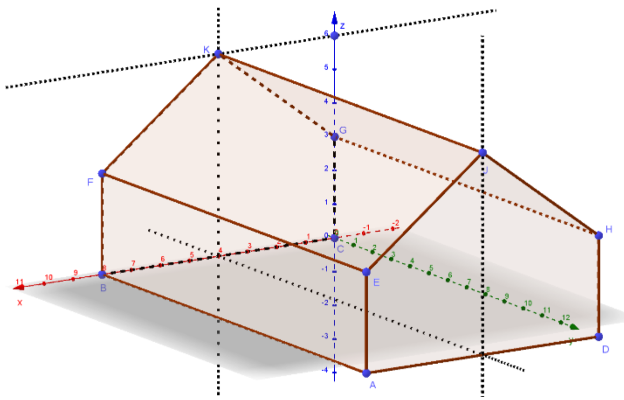


Opgave 28 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

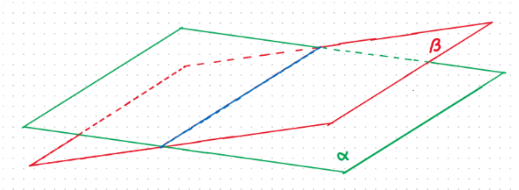
(Opg. ??? Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

Et hus med rektangulær grundflade er indlagt i et rumligt koordinatsystem som vist på figuren. Alle mål er i meter.

Opstil ligninger for husets 7 flader:

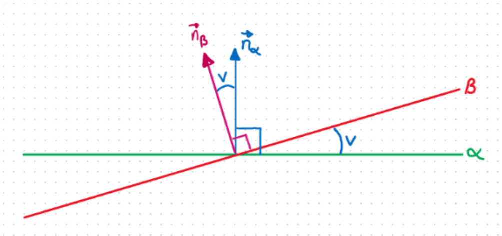


Skæring mellem to planer



I den øverste figur på denne side ses to planer, som skærer hinanden.

Som det ses, vil skæringen mellem to planer danne en ret linje (den blå linje).



På den nederste figur, ses et tværsnit af de to planer. De skærer hinanden i en vinkel, *v*. Bemærk, at det ALTID er den spidse vinkel, som er resultatet. (Med mindre andet er anført).

Det ses også, at vinklen mellem planerne nødvendigvis også må være vinklen mellem planernes respektive normalvektorer. Denne egenskab benyttes, når vinklen mellem to planer skal bestemmes.

Givet to planer:

$\alpha: \quad a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 \cdot z + d_1 = 0$ $\qquad \beta: \quad a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 \cdot z + d_2 = 0$

Udtrykket for linjen bestemmes som en parameterfremstilling, som vil være løsningen til ligningssystemet af de to planer α og β.

En af variablene, *x*, *y* eller *z* (typisk *x*), erstattes af parameteren, *t*. Derved kan *t* opfattes som værende bekendt, mens *y* og *z* opfattes som ubekendte.

Så nu haves to ligninger med to ubekendte (*y* og *z*) i et lineært ligningssystem. Løses dette ligningssystem, vil resultatet være, at variablene *y* og *z* er udtrykt ved parameteren *t*.

Derved er alle tre variable, *x*, *y* og *z* udtrykt ved parameteren *t*. (Husk, at *x* til at begynde med blev erstattet af parameteren *t*. Det betyder at der kan opstilles en parameterfremstilling for skæringslinjen

Dette vises for det generelle tilfælde:

$$x = t$$

$\alpha: \quad a_1 \cdot t + b_1 \cdot y + c_1 \cdot z + d_1 = 0$ $\qquad \beta: \quad a_2 \cdot t + b_2 \cdot y + c_2 \cdot z + d_2 = 0$

Ligningerne isoleres mht. *z*.

$\alpha: \quad c_1 \cdot z = -a_1 \cdot t - b_1 \cdot y - d_1$ $\qquad \beta: \quad c_2 \cdot z = -a_2 \cdot t - b_2 \cdot y - d_2$

$\alpha: \quad z = \frac{-a_1 \cdot t}{c_1} - \frac{b_1 \cdot y}{c_1} - \frac{d_1}{c_1}$ $\qquad \beta: \quad z = \frac{-a_2 \cdot t}{c_2} - \frac{b_2 \cdot y}{c_2} - \frac{d_2}{c_2}$

$\alpha: \quad z = \frac{-a_1 \cdot t - b_1 \cdot y - d_1}{c_1}$ $\qquad \beta: \quad z = \frac{-a_2 \cdot t - b_2 \cdot y - d_2}{c_2}$

De to udtryk samles nu, da begge udtryk er lig med *z*.

$$\frac{\left(-a_1 \cdot t - b_1 \cdot y - d_1\right)}{c_1} = \frac{\left(-a_2 \cdot t - b_2 \cdot y - d_2\right)}{c_2}$$
$$\Updownarrow$$
$$c_2 \cdot \left(-a_1 \cdot t - b_1 \cdot y - d_1\right) = c_1 \cdot \left(-a_2 \cdot t - b_2 \cdot y - d_2\right)$$
$$\Updownarrow$$
$$c_2 \cdot a_1 \cdot t + c_2 \cdot b_1 \cdot y + c_2 \cdot d_1 = c_1 \cdot a_2 \cdot t + c_1 \cdot b_2 \cdot y + c_1 \cdot d_2$$
$$\Updownarrow$$
$$c_2 \cdot b_1 \cdot y - c_1 \cdot b_2 \cdot y = c_1 \cdot a_2 \cdot t + c_1 \cdot d_2 - c_2 \cdot a_1 \cdot t - c_2 \cdot d_1$$
$$\Updownarrow$$
$$y\left(c_2 \cdot b_1 - c_1 \cdot b_2\right) = t \cdot \left(c_1 \cdot a_2 - c_2 \cdot a_1\right) + c_1 \cdot d_2 - c_2 \cdot d_1$$
$$\Updownarrow$$
$$y = \frac{t \cdot \left(c_1 \cdot a_2 - c_2 \cdot a_1\right) + c_1 \cdot d_2 - c_2 \cdot d_1}{c_2 \cdot b_1 - c_1 \cdot b_2}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{y = \frac{c_1 \cdot a_2 - c_2 \cdot a_1}{c_2 \cdot b_1 - c_1 \cdot b_2} \cdot t + \frac{c_1 \cdot d_2 - c_2 \cdot d_1}{c_2 \cdot b_1 - c_1 \cdot b_2}}}$$

Nu haves et udtryk for y alene udtrykt ved t. Dette indsættes i udtrykket for z.

$$z = \frac{-a_1 \cdot t}{c_1} - \frac{b_1 \cdot y}{c_1} - \frac{d_1}{c_1} = \frac{-a_1 \cdot t}{c_1} - \frac{b_1 \cdot \left(\frac{c_1 \cdot a_2 - c_2 \cdot a_1}{c_2 \cdot b_1 - c_1 \cdot b_2} \cdot t + \frac{c_1 \cdot d_2 - c_2 \cdot d_1}{c_2 \cdot b_1 - c_1 \cdot b_2}\right)}{c_1} - \frac{d_1}{c_1}$$
$$\Updownarrow$$
$$z = \frac{-a_1}{c_1} \cdot t - \frac{b_1 \cdot \frac{c_1 \cdot a_2 - c_2 \cdot a_1}{c_2 \cdot b_1 - c_1 \cdot b_2} \cdot t + b_1 \cdot \left(\frac{c_1 \cdot d_2 - c_2 \cdot d_1}{c_2 \cdot b_1 - c_1 \cdot b_2}\right)}{c_1} - \frac{d_1}{c_1}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{z = \frac{-a_1}{c_1} \cdot t - \frac{b_1 \cdot \frac{c_1 \cdot a_2 - c_2 \cdot a_1}{c_2 \cdot b_1 - c_1 \cdot b_2}}{c_1} \cdot t - \frac{b_1 \cdot \left(\frac{c_1 \cdot d_2 - c_2 \cdot d_1}{c_2 \cdot b_1 - c_1 \cdot b_2}\right)}{c_1} - \frac{d_1}{c_1}}}$$

Dette udtryk ser fuldstændig sindssygt ud! Det er også kun med – dels for at bevise, at det er sandt, men også nok den nemmeste måde, hvis man er fristet til at lave et Excel-ark, som kan give løsningerne.

Det er nemmere at se på et konkret eksempel:

Eksempel:

$\alpha: \quad -x+5y-3z+1=0$ $\quad\quad\beta: \quad 3x-y+2z+4=0$

$x = t$

$\alpha: \quad -t+5y-3z+1=0$ $\quad\quad\beta: \quad 3t-y+2z+4=0$

Ligningerne isoleres mht. z.

$\alpha: \quad -3z = t-5y-1$ $\quad\quad\beta: \quad 2z=-3t+y-4$

Ligningerne ganges igennem med hhv -2 og 3 for at opnå $6z$ på begge venstresiderne.

$\alpha: \quad 6z=-2t+10y+2$ $\quad\quad\beta: \quad 6z=-9t+3y-12$

Da begge ligninger er lig med $6z$, sættes højresiderne lig med hinanden.

$$-2t+10y+2=-9t+3y-12$$
$$\Updownarrow$$
$$10y-3y=-9t+2t-12-2$$
$$\Updownarrow$$
$$7y=-7t-14$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{y=-t-2}}$$

Hvilket sættes ind i udtrykket for z:

$$2z=-3t+(-t-2)-4$$
$$\Updownarrow$$
$$2z=-3t-t-2-4=-4t-6$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{z=-2t-3}}$$

x blev til at begynde med sat til t, hvilket betyder, at alle tre koordinater nu kendes som et udtryk af t.

$$\underline{\underline{\ell_{skæring}: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t-2 \\ -2t-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} t \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}}}$$

Opgave 29 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)
(Opg. ??? Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

Givet to planer:

$$I: \quad 5x-3y+z+12=0$$
$$II: \quad -x+8y-3z-4=0$$

a) Bestem en parameterfremstilling for skæringslinjen mellem de to planer.
b) Bestem vinklen mellem planerne.

Opgave 30 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)
(Opg. ??? Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

Givet to planer:

$$3x-2y+5z-3=0 \qquad \text{og} \qquad x+5y-z+2=0$$

a) Bestem vinklen mellem de to planer.

Skæring mellem linje og plan

Lad der være givet et plan $\alpha:\ ax+by+cz+d=0$.

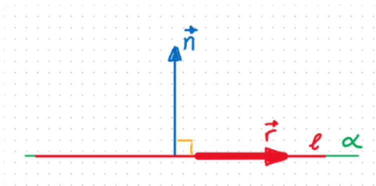
Som altid har planet α normalvektoren: $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Lad der også være givet en ret linje, ℓ, med parameterfremstillingen: $\ell:\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0+t\cdot r_x\\y_0+t\cdot r_y\\z_0+t\cdot r_z\end{pmatrix}$.

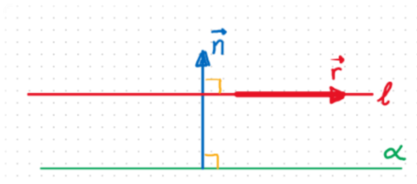
Denne linje har retningsvektoren: $\vec{r}=\begin{pmatrix}r_x\\r_y\\r_z\end{pmatrix}$.

En linje og et plan kan interagere med hinanden på tre måder:

1) Linjen kan være parallel med planet og ligge i planet. Hvis det er tilfældet er der uendeligt mange fællespunkter mellem linjen og planet. Det kan også indses, at eftersom planets normalvektor er vinkelret på planet, så må linjen igen være vinkelret på normalvektoren. Da er $\vec{n}\bullet\vec{r}=0$.



2) Linjen kan være parallel med planet, men ikke beliggende i planet. I dette tilfælde er der ingen fællespunkter, men selvom linjen ikke er beliggende i planet, så er $\vec{n}\bullet\vec{r}=0$ stadigvæk. (Husk, at man bare kan bruge en anden repræsentant for den samme vektor eller med andre ord – man kan parallelforskyde en vektor efter forgodtbefindende).



3) Hvis linjen ikke er parallel med planet (og der arbejdes med en tilpas stor definitionsmængde), så vil linjen skære planet i et enkelt punkt.

Ad1)
Linjens retningsvektor er vinkelret på planets normalvektor: $\vec{n}\bullet\vec{r}=0$.
Det kan undersøges om linjen er beliggende i planet ved at indsætte linjens ankerpunkt i planets ligning og se, om det stemmer.

Ad2)
Faktisk samme situation som i Ad1), bortset fra, at planets ligning ikke vil stemme, når linjens ankerpunkt indsættes.

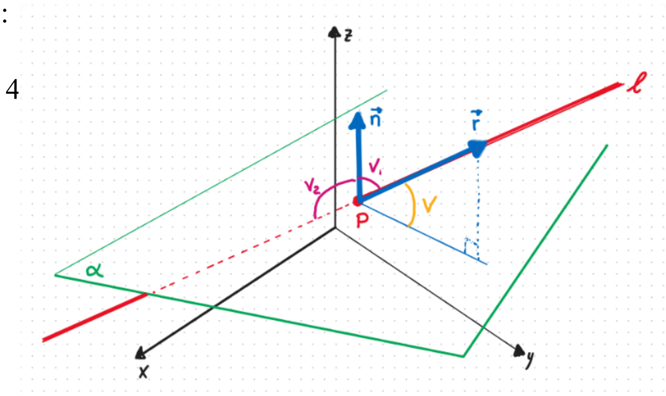
Ad3)
Hvis $\vec{n} \bullet \vec{r} \neq 0$, betyder det at linjen ikke er parallel med planet.
I det tilfælde indsættes linjens koordinater i planets ligning.

Dette vises nemmest ved et eksempel:

Givet et plan, α, og en linje, ℓ.

$$\alpha: \; 2x - 4y + 3z + 4 = 0 \quad \text{og} \quad \ell: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2t \\ 3+4t \\ -2+5t \end{pmatrix}$$

Linjens koordinater indsættes i planets ligning:



$$2 \cdot (1+2t) - 4 \cdot (3+4t) + 3 \cdot (-2+5t) + 4$$
$$\Updownarrow$$
$$2 + 4t - 12 - 16t - 6 + 15t + 4 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$3t - 12 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$3t = 12$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{t = 4}$$

Det vil altså sige, at skæringspunktet eksisterer, når linjens parameter, *t*, er lig med 4.

Altså indsættes værdien 4 i stedet for parameteren i linjens ligning:

$$\ell: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2\cdot 4 \\ 3+4\cdot 4 \\ -2+5\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+8 \\ 3+16 \\ -2+20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 19 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Igen betragtes dette som en stedvektor, så punktkoordinatet for skæringspunktet mellem planet, α, og linjen, ℓ, er:

$$\underline{\underline{(x;y;z) = (9;19;18)}}$$

Det er også muligt at finde vinklen mellem planet og linjen.

$$\vec{n} \bullet \vec{r} = a \cdot r_x + b \cdot r_y + c \cdot r_z = |\vec{n}| \cdot |\vec{r}| \cdot \cos(v),$$

hvor *v* er vinklen mellem linjen og normalvektoren!

Bemærk, at planet ikke er nævnt i denne sammenhæng!

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}} \qquad |\vec{n}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{2^2+(-4)^2+3^2} = \sqrt{4+16+9} \Leftrightarrow \underline{|\vec{n}| = \sqrt{29}}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}} \qquad |\vec{r}| = \sqrt{r_x{}^2+r_y{}^2+r_z{}^2} = \sqrt{2^2+4^2+5^2} = \sqrt{4+16+25} \Leftrightarrow \underline{|\vec{r}| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}}$$

Disse resultater indsættes i skalarproduktet, og giver:

$$a \cdot r_x + b \cdot r_y + c \cdot r_z = |\vec{n}| \cdot |\vec{r}| \cdot \cos(v_1)$$

$$\Updownarrow$$

$$2 \cdot 2 + (-4) \cdot 4 + 3 \cdot 5 = \sqrt{29} \cdot 3\sqrt{5} \cdot \cos(v_1)$$

$$\Updownarrow$$

$$4 - 16 + 15 = 3 \cdot \sqrt{29} \cdot \sqrt{5} \cdot \cos(v_1)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{3}{3 \cdot \sqrt{29} \cdot \sqrt{5}} = \cos(v_1)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{5}} = \cos(v_1)$$

$$\Updownarrow$$

$$v_1 = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{5}}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{v_1 = 85{,}2364°}$$

Nu er det vigtigt at huske, at dette er vinklen mellem linjen og normalvektoren, som jo er vinkelret på planet. Derfor er det komplementvinklen til v, som er det endelige resultat.

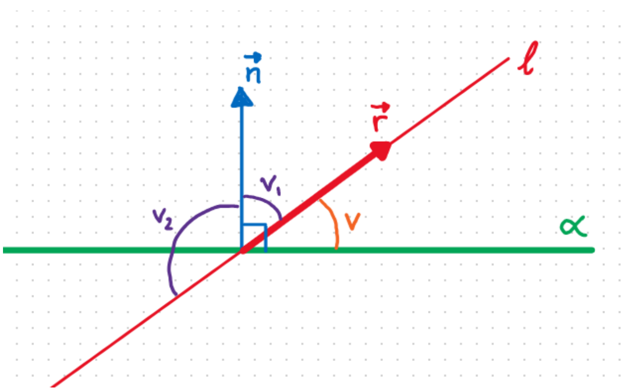
$$v = 90° - v_1$$

$$\Updownarrow$$

$$v = 90° - 85{,}2364° \;\; 98$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{v = 4{,}7636°}}$$



Opgaver til "Skæring mellem linje og plan"

Opgave 31 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

(Opg. 499 Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

Givet et plan α og en ret linje ℓ :

$$\alpha: \ 8x - y + 3z + 5 = 0$$

$$\ell: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-t \\ 4t \\ -3+2t \end{pmatrix}$$

a) Bestem koordinaterne til skæringspunktet mellem α og ℓ .
b) Bestem vinklen mellem α og ℓ .

Opgave 32 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

(Opg. 500 Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

Givet et plan α :

$$\alpha: \ 2x + y - z + 4 = 0$$

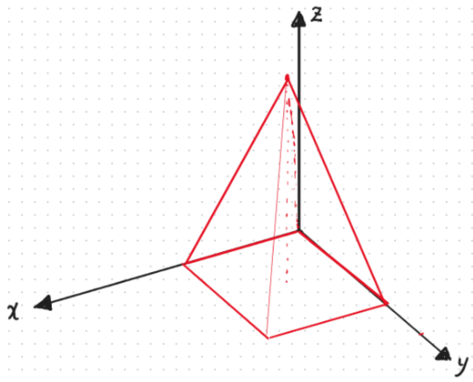
Og en ret linje, der går igennem punkterne $A(1;4;3)$ og $B(5;2;0)$.

a) Bestem en parameterfremstilling for den rette linje.
b) Bestem koordinaterne til skæringspunktet mellem planet α og den rette linje.
c) Bestem vinklen mellem planet α og den rette linje.

Opgave 33 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

(Opg. 501 Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

En pyramide med kvadratisk grundflade og grundflade-kant = 3 *cm* og højde = 5 *cm* er indlagt i et rumligt koordinatsystem som vist på figuren:



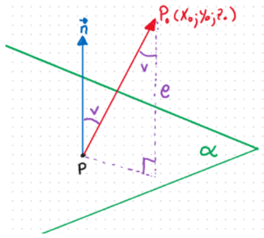
a) Bestem vinklen mellem to skrå sideflader, der ligger over for hinanden.
b) Bestem vinklen mellem to skrå sideflader, der støder op til hinanden.

Afstand mellem punkt og plan

Generelt, når man taler om afstande i rummet, så er der tale om den korteste afstand mellem to objekter.

Victor Borge har engang sagt: ”Den korteste afstand mellem to mennesker er et smil.”
Og selvom denne påstand er smuk og formentlig sand i sin egen humanistiske facon, så er den matematiske definition af den korteste afstand den vinkelrette afstand.
Det blev vist i afsnittet om ”Afstand mellem punkt og linje” i notatet om ”Vektorer i planet”.

Afstanden, *e*, mellem et punkt $P_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ og et plan, $\alpha: ax+by+cz+d=0$ kan udtrykkes som:



$e=\left|\overrightarrow{PP_0}\right|\cdot\cos\left(v\right)$, som vist på figuren til højre:

Idet den hosliggende katete i en retvinklet trekant kan udregnes som:

$$\cos\left(v\right)=\frac{hosliggende\ katete}{hypotenusen}$$

$$\Updownarrow$$

$$hosliggende\ katete = hypotenusen\cdot\cos\left(v\right)$$

Forestiller man sig udtrykket som en brøk, kan brøken forlænges med $\left|\vec{n}\right|$, da $\vec{n}$ er en normalvektor til planet α.

$$e=\frac{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PP_0}\right|\cdot\cos\left(v\right)}{\left|\vec{n}\right|}$$

Lige netop $\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PP_0}\right|\cdot\cos\left(v\right)$ er jo skalarproduktet $\vec{n}\bullet\overrightarrow{PP_0}$ (jvfr. en af definitionerne på skalarproduktet) mellem de to vektorer $\vec{n}$ og $\overrightarrow{PP_0}$. Som set i afsnittet: ”Planets ligning på normalform”, kan dette også skrives som: $a\cdot x_0+b\cdot y_0+c\cdot z_0+d$.

Desuden er det kendt, at $\left|\vec{n}\right|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Sluttelig kan det hele sammensættes i en endelig formel for *e* (afstanden mellem punkt og plan).

$$\boxed{e=\frac{\left|a\cdot x_0+b\cdot y_0+c\cdot z_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

Da der er tale om en afstand (som aldrig kan være negativ), gøres tælleren numerisk.

Eksempel:

Givet et punkt $P_0=(3;5;2)$ og et plan $\alpha: 2x+6y-z+12=0$

Bestem afstanden mellem punktet P_0 og planen α.

$$e=\frac{|a\cdot x_0+b\cdot y_0+c\cdot z_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\Updownarrow$$

$$e=\frac{|2\cdot 3+6\cdot 5+(-1)\cdot 2+12|}{\sqrt{2^2+6^2+(-1)^2}}=\frac{|6+30-2+12|}{\sqrt{6+36+1}}=\frac{46}{\sqrt{43}}$$

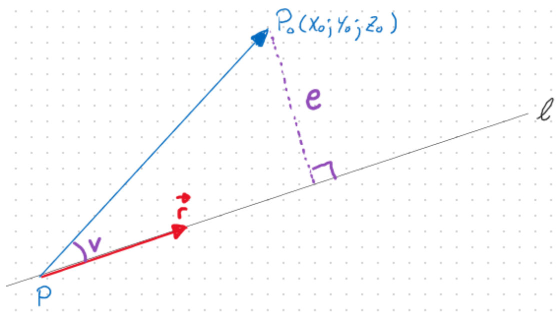
$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{e\simeq 7{,}0150}}$$

Afstand mellem punkt og linje

Skal man bestemme (den vinkelrette) afstand, *e*, fra et punkt, $P_0(x_0;y_0;z_0)$ til en linje, ℓ, kan det gøres med følgende formel:

$$dist=e=\left|\overrightarrow{PP_0}\right|\cdot\sin(v).$$



Her er $P(x;y;z)$ et vilkårligt punkt på en linje, ℓ, og $\vec{r}$ er linjens retningsvektor.

Af en af definitionerne af vektorproduktet, fås:

$$\left|\vec{r}\times\overrightarrow{PP_0}\right|=\left|\vec{r}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PP_0}\right|\cdot\sin(v)$$

$$\Updownarrow$$

$$\left|\overrightarrow{PP_0}\right|\cdot\sin(v)=\frac{\left|\vec{r}\times\overrightarrow{PP_0}\right|}{\left|\vec{r}\right|}$$

Forekomsten af $\left|\overrightarrow{PP_0}\right|\cdot\sin(v)$ i både det omskrevne vektorprodukt og afstandsformlen, udnyttes:

$$\boxed{dist=e=\frac{\left|\vec{r}\times\overrightarrow{PP_0}\right|}{\left|\vec{r}\right|}}$$

Eksempel:

Givet et punkt $P_0 = (8;10;6)$ og en ret linje, ℓ med parameterfremstillingen: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+t \\ 2t \\ 3-4t \end{pmatrix}$.

Bestem afstanden mellem punktet P_0 og den rette linje ℓ.

Der vælges et vilkårligt punkt på linjen ℓ. Man kan overveje, om der ikke er en lidt mere ”nem” vilkårlig linje fremfor andre. Hvis det er muligt, så er det nemt at sætte parameteren t til 0. Derved bliver punktet til konstantdelen (ankerpunktet) fra parameterfremstillingen.

$$\ell_{(t=0)}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ hvilket giver punktet: } \underline{P(P_x;P_y;P_z) = (2;0;3)}$$

Vektoren $\overrightarrow{PP_0}$ udregnes:

$$\overrightarrow{PP_0} = \begin{pmatrix} P_{0x} - P_x \\ P_{0y} - P_y \\ P_{0z} - P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-2 \\ 10-0 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Retningsvektoren ”aflæses” udfra parameterdelen af parameterfremstillingen for ℓ.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Vektorproduktet mellem $\vec{r}$ og $\overrightarrow{PP_0}$ udregnes:

$$\vec{r} \times \overrightarrow{PP_0}: \begin{aligned} x &= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 = 2 \cdot 3 - (-4) \cdot 10 = 6 + 40 = 46 \\ y &= \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 = -4 \cdot 6 - 1 \cdot 3 = (-24) + (-3) = -24 - 3 = -27 \\ z &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 = 1 \cdot 10 - 2 \cdot 6 = 10 - 12 = -2 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\text{Dvs. at } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 46 \\ -27 \\ -2 \end{pmatrix}}}$$

Værdierne indsættes i distanceformlen:

$$dist = e = \frac{\left|\vec{r} \times \overrightarrow{PP_0}\right|}{\left|\vec{r}\right|} = \frac{\sqrt{46^2 + (-27)^2 + (-2)^2}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-4)^2}} = \frac{\sqrt{2116 + 729 + 4}}{\sqrt{1+4+16}} = \frac{\sqrt{2849}}{\sqrt{21}} \Leftrightarrow \underline{\underline{e \simeq 11,65}}$$

Opgave 34 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

(Opg. ??? Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

Bestem afstanden mellem punktet $P_0(2;-8;-3)$ og planet givet ved ligningen $3x+3y+z-3=0$.

Opgave 35 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

(Opg. ??? Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

Bestem afstanden mellem punktet $P_0(10;3;6)$ og den rette linje givet ved:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2t \\ 2-t \\ -5+4t \end{pmatrix}.$$

Opgave 36 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

(Opg. ??? Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

Et plan går igennem punkterne $A(0;0;0)$, $B(2;3;1)$ og $C(5;6;4)$.

Bestem afstanden mellem planet og punktet $P(10;-1;8)$

Opgave 37 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

(Opg. ??? Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

En ret linje går igennem punkterne $A(0;0;3)$ og $B(3;0;0)$.

Bestem afstanden mellem linjen og punktet $(8;5;6)$.

Opgave 38 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

(Opg. ??? Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

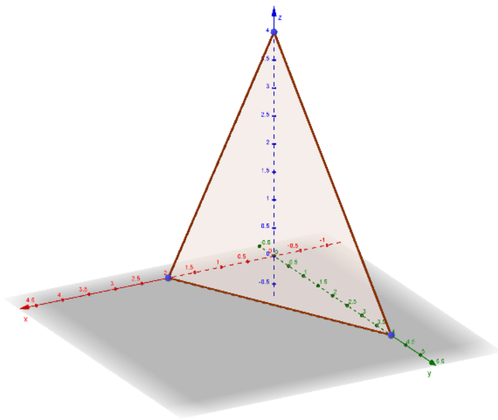
Givet to planer: $\alpha: \quad -4x+2y-3z+5=0 \qquad \beta: \quad 12x-6y+9z-8=0$

a) Vis, at de to planer er parallelle.
b) Bestem afstanden mellem de to planer.

Opgave 39 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

(Opg. ??? Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

Et plan α går igennem punkterne:
$(2;0;0)$, $(0;4;0)$ og $(0;0;4)$.
Se figuren til højre.



a) **Bestem afstanden fra punktet (8;10;7) til planet α.**

b) **Opstil ligningen for det plan β som er parallel med planet α og som går igennem punktet (8;10;7).**

c) **Bestem planet β's skæringspunkter med *x*-, *y*- og *z*-aksen.**

Repetitionsopgaver

Opgave 40 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

(Opg. ??? Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

Givet vektorerne: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

a) **Bestem $\vec{a}+\vec{b}$ og $|\vec{a}+\vec{b}|$.**

b) **Bestem $\vec{a}-\vec{b}$ og $|\vec{a}-\vec{b}|$.**

c) **Bestem $\vec{a}\bullet\vec{b}$.**

d) **Bestem vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.**

e) **Bestem vinklen mellem $\vec{a}+\vec{b}$ og $\vec{a}-\vec{b}$.**

f) **Bestem vinklen mellem $\vec{a}+\vec{b}$ og $\vec{a}-\vec{b}$.**

g) **Bestem $\vec{a}\times\vec{b}$ og $|\vec{a}\times\vec{b}|$.**

h) **Bestem $4\vec{a}-3\vec{b}$ og $|4\vec{a}-3\vec{b}|$.**

Opgave 41 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

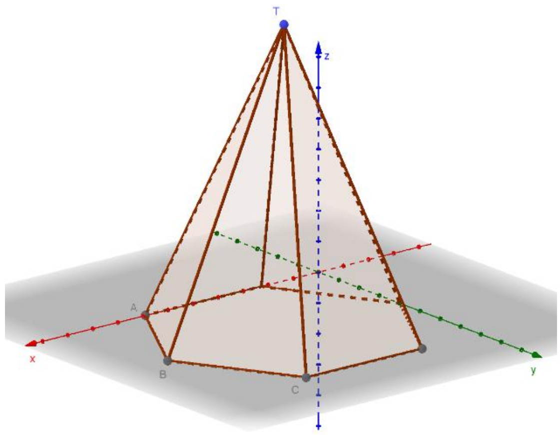
(Opg. ??? Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

Bestem afstanden mellem punktet (5,4,10) og planet, der er udspændt af punkterne: *A*(0;0;0), *B*(3;2;4) og *C*(-2;5;3).

Opgave 42 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

(Opg. ??? Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

En pyramide med højde = 5 *cm* og grundflade formet som en ligesidet sekskant med grundfladekant = 2 *cm* er indlagt i et x, y, z-koordinatsystem som vist på figuren:

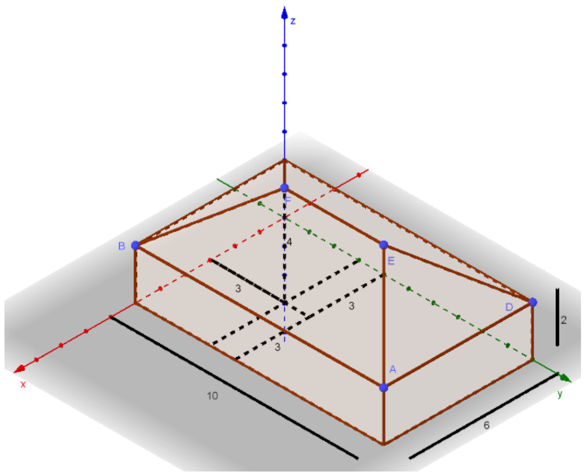


- **a) Bestem koordinaterne til punkterne A, B, C og T.**
- **b) Bestem afstanden $|AT|$**
- **c) Bestem en ligning for planet ABT.**
- **d) Bestem en ligning for planet BCT.**
- **e) Bestem en ligning for linjen BT.**
- **f) Bestem vinklen mellem planerne ABT og BCT**
- **g) Bestem vinklen mellem pyramidens grundflade og planet ABT.**

Opgave 43 (Teknisk Matematik 1997, Preben Madsen)

(Opg. ??? Teknisk matematik 4. udg. Preben Madsen)

Et hus med afvalmet tag er indlagt i et x, y, z-koordinatsystem som vist på figuren: Alle mål er i *m*.



- **a) Bestem koordinaterne til punkterne A, B, C, D, E og F.**
- **b) Bestem afstanden $|AE|$**
- **c) Bestem en ligning for planet $ABEF$.**
- **d) Bestem en ligning for planet $CDEF$.**
- **e) Bestem en ligning for planet ADE.**
- **f) Bestem en ligning for planet BCF.**
- **g) Bestem vinklen mellem planerne $ABEF$ og $CDEF$.**
- **h) Bestem vinklen mellem planerne $ABEF$ og ADE.**

Kuglen

En kugleflade defineres som ethvert punkt på en kugles periferi.

Dvs. alle punkter, som har en given afstand (radius – r) fra et givet punkt (centrum – C).

En kugle(skal) er det geometriske sted for den mængde af punkter, som alle har samme afstand til et givet punkt.

Punktmængden: $\{P \mid |CP| = r\}$

$C = (x_0; y_0; z_0)$ og $P = (x; y; z)$

$$|CP| = r$$
$$\Updownarrow$$
$$|CP|^2 = r^2$$
$$\Updownarrow$$
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$ Kugleskallens ligning!

Igen… Det er kuglefladen eller kugleskallen, der tales om her.

Beskrives den massive kugle, fremstilles den ved følgende ulighed:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \le r^2$$

Idet der jo nødvendigvis er tale om den mængde af punkter, som alle er på eller indenfor kugleskallen.

Overflade, O, (Areal) O: $O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

Rumfang, V, (Volumen) V: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

Bemærk for resten her, at hvis O og V hver især opfattes som funktioner af r,
så er $V'(r) = O(r)$.

Det samme gælder i øvrigt for cirklens areal og omkreds, hvor:

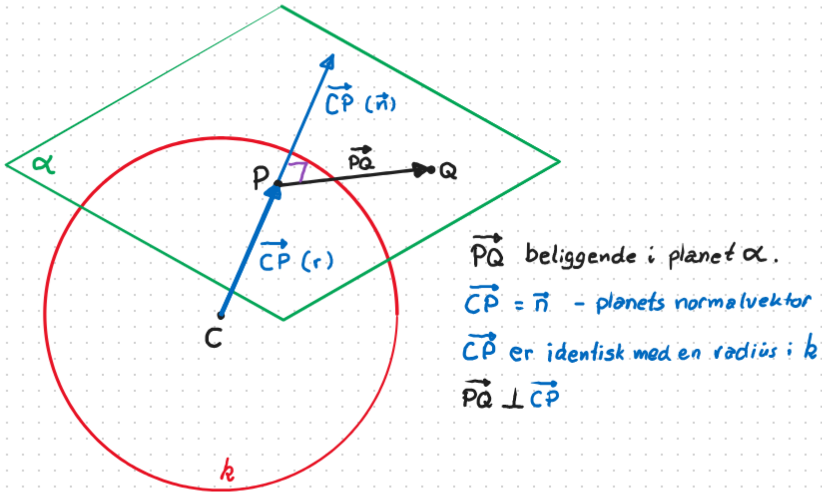
Omkreds, O, (Længde) O: $O = 2 \cdot \pi \cdot r$

Overflade, A, (Areal): A: $V = \pi \cdot r^2$

$$A'(r) = O(r)$$

Kuglens tangentplan:

Et tangentplan til en kugle er et plan, som lige nøjagtig rører en kugle i et eneste punkt. Det nemmeste er at forestille sig en bold, som ligger på et gulv. Da er gulvet et tangentplan til bolden.



I ovenstående figur er *C* kuglens centrum med koordinaterne $C\left(C_x;C_y;C_z\right)$.

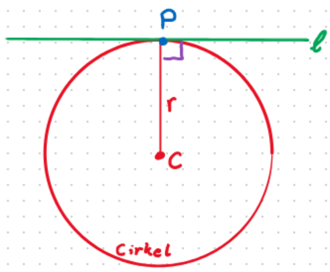
Punktet *P* er et periferipunkt på kugleskallen, i hvilket planen netop rører. $P\left(P_x;P_y;P_z\right)$.

Q er et vilkårligt punkt i planet. Da planet består af uendeligt mange punkter, og dette bevis skal gælde for alle punkter, sættes *Q*'s koordinater til "running" $Q\left(x;y;z\right)$.

(Planets normalvektor), $\vec{n}$, må have samme retning som linjen *r* (Kuglens radius fra kuglens centrum til røringspunktet $P\left(P_x;P_y;P_z\right)$).

Eller rettere: $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ er en forlængelse af kuglens radius.

Det kendes fra analytisk plangeometri, at en tangent til en cirkel (i planet) altid vil være vinkelret på den cirkelradius, som rammer i tangentpunktet, *P*. Det samme kan overføres til tilfældet med kuglen, hvor altså tangentplanet er vinkelret på en radius til kugleskallen.



Deraf følger, at vektoren $\vec{n}$ nødvendigvis må være vinkelret på vektoren $\overrightarrow{PQ}$, som er beliggende i planet.

Derfor er det et faktum at skalarproduktet: $\vec{n} \bullet \overrightarrow{PQ} = 0$.

Da koordinaterne til alle de involverede punkter er kendt, udregnes vektorerne, som forberedelse til at kunne udlede skalarproduktet.

$$\underline{\overrightarrow{CP} = \vec{n} = \begin{pmatrix} P_x - C_x \\ P_y - C_y \\ P_z - C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}} \qquad \underline{\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} Q_x - P_x \\ Q_y - P_y \\ Q_z - P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - P_x \\ y - P_y \\ y - P_z \end{pmatrix}}$$

$\vec{n} \bullet \overrightarrow{PQ} = 0$

$\Updownarrow$

$\begin{pmatrix} P_x - C_x \\ P_y - C_y \\ P_z - C_z \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} Q_x - P_x \\ Q_y - P_y \\ Q_z - P_z \end{pmatrix} = 0$

$\Updownarrow$

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x - P_x \\ y - P_y \\ y - P_z \end{pmatrix} = 0$

$\Updownarrow$

$a(x - P_x) + b(y - P_y) + c(y - P_z) = 0$

$\Updownarrow$

$ax - aP_x + by - bP_y + cz - cP_z = 0$

$\Updownarrow$ $(-aP_x - bP_y - cP_z$ samles til én konstant, $d)$.

$\underline{\underline{ax + by + cz + d = 0}}$

Til sidst bør udtrykket reduceres mest muligt.

Lad alt dette blive anskueliggjort med et eksempel.

Eksempel:
Givet en kugle med centrum i punktet $C(1;–2;1)$ og et punkt $P(4;5;2)$, som er beliggende på kugleskallen.

Planets ligning:

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$, hvor planets normalvektor, $\vec{n}$, er lig med $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} P_x - C_x \\ P_y - C_y \\ P_z - C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 5-(-2) \\ 2-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{\overrightarrow{CP} = \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

er så samtidig normalvektoren til det plan der søges ligningen til.

Dvs. når $Q(x;y;z)$ er et vilkårligt punkt i det søgte plan, som er forskelligt fra $P(P_x;P_y;P_z)$, så gælder der at:

Skalarproduktet mellem $\overrightarrow{CP}$ og $\overrightarrow{PQ}$ er lig med 0 (vinkelret).

$$\overrightarrow{CP} \bullet \overrightarrow{PQ} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} Q_x - P_x \\ Q_y - P_y \\ Q_z - P_z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x-4 \\ y-5 \\ z-2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$a \cdot (Q_x - P_x) + b \cdot (Q_y - P_y) + c \cdot (Q_z - P_z) = 0 \Rightarrow 3 \cdot (x-4) + 7 \cdot (y-5) + 1 \cdot (z-2) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$3x - 12 + 7y - 35 + z - 2 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$3x + 7y + z - 12 - 35 - 2 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{3x + 7y + z - 49 = 0}}$$

Det er ligningen for tangentplanen

Tangentlinje til kugle

Afstanden fra et punkt til en linje skal benyttes i dette "bevis". Hvis afstanden fra en kugles centrum til en linje er lig med kuglens radius, så må linjen være en tangentlinje til kuglen.

Eksempel: En kugle, *k*, er givet ved ligningen: $x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 - 2z = 36$ og en linje, ℓ, er givet ved parameterfremstillingen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Undersøg, om ℓ er en tangent til *K*.

Til at begynde med, kvadratkompletteres leddene med x^2 og x, y^2 og y og med z^2 og z.

$$x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 - 2z = 36$$

$$\Updownarrow$$

$$(x-2)^2 - 2^2 + (y+1)^2 - 1^2 + (z-1)^2 - 1^2 = 36$$

$$\Updownarrow$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 36 + 4 + 1 + 1 = 42$$

Dvs., at det er beregnet, at der er tale om en kugle med centrum i $C(2;-1;1)$ og med radius $r = \sqrt{42}$

Afstanden fra kuglens centrum til et vilkårligt punkt på kugleskallen er altså $\sqrt{42} \approx 6,48$.

Findes afstanden mellem linjen, ℓ, og kuglens centrum, *C*, findes således følgende:

$$dist(C;\ell)=e=\frac{\left|\vec{r}\times\overrightarrow{CP}\right|}{\left|\vec{r}\right|}\ ,$$

hvor $\vec{r}$ er lig med linjens retningsvektor, C er kuglens centrum og P er et vilkårligt punkt på linjen.

$$\overrightarrow{CP}=\begin{pmatrix}P_x-C_x\\P_y-C_y\\P_z-C_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8-2\\2-(-1)\\-3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\3\\-4\end{pmatrix}$$

$$dist(C;\ell)=e=\frac{\left|\vec{r}\times\overrightarrow{CP}\right|}{\left|\vec{r}\right|}=\frac{\left|\begin{pmatrix}-5\\7\\-3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-10\\3\\-4\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{(-5)^2+7^2+(-3)^2}}=\frac{\sqrt{(-19)^2+10^2+55^2}}{\sqrt{25+49+9}}=\frac{\sqrt{361+100+3025}}{\sqrt{25+49+9}}$$

$$=\frac{\sqrt{3486}}{\sqrt{83}}=\underline{\sqrt{42}}\approx 6{,}48$$

Det er således bevist, at afstanden fra linjen til kuglens centrum er identisk med kuglens radius. Derfor må linjen være en tangent til kuglen!

Opgaver til "Kuglen"

486)
Bestem centrum og radius for de kugleskaller, hvis ligninger er:

1) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-10z+14=0$
2) $x^2+y^2+z^2-8y+15=0$
3) $x^2+y^2+z^2-6x+16z+64=0$
4) $2x^2+2y^2+2z^2-10x-16y+34z+169=0$

489)
En kugle har centrum i (2;3;4) og radius 6.

1) Opstil en ligning for kuglen, og angiv koordinaterne til kuglens skæringspunkter med koordinatakserne.

490)
En kugle har centrum i punktet C(–3;6;4) og går gennem punktet (6;0;6).

1) Opskriv en ligning for kuglen.
2) Afgør om hvert af følgende punkter ligger på kuglen, inden i kuglen eller udenfor kuglen:
   a. A(–12;12;6)
   b. B(5;11; –2)
   c. C(7;10;2)
   d. D(6;12;6)

493)
En kugle har ligningen: $x^2+y^2+z^2-14x+2y-10z=-39$.

1) Vis, at punkterne A(11; –5;7) og B(3; –3;9) ligger på kuglen, og bestem ligninger for kuglens tangentplaner i disse to punkter.